Динамические системы, 2015, том 5(33), №1-2, 61–68

УДК 517.9+519.8

О существовании и единственности сбалансированной оптимальной траектории одной математической модели экономического роста[1]

Ю. А. Кузнецов, Е. В. Круглов

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

603950, Нижний Новгород. *E-mail: Yu-Kuzn@mm.unn.ru, kruglov19@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматривается дискретная математическая модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала типа Лукаса. В достаточно общей постановке исследуется связанная с этой моделью оптимизационная задача о «конкурентном равновесии», в рамках которой изучаются вопросы существования оптимальных сбалансированных траекторий. Эти траектории соответствуют неподвижным точкам некоторой трехмерной динамической системы с дискретным временем. В статье определяются условия существования оптимальной сбалансированной траектории, устанавливается единственность такой траектории и приводится её аналитическое представление.

Ключевые слова: модели экономического роста с учетом человеческого капитала, трехмерные динамические системы с дискретным временем, траектории сбалансированного роста.

Введение

В теории экономического роста принято выделять некоторый набор так называемых *стилизованных фактов* (*stylized facts*) современного экономического роста — набор тенденций и закономерностей, типичных для современной экономической динамики. К их числу относится и тот факт, что в обеспечении высоких темпов экономического роста важную роль играют как *научно-технологический прогресс*, так и *образование и уровень квалификации рабочей силы* (см. подробнее [10], [8], [1]).

Первоначально в теории экономического роста в качестве основных рассматривались лишь такие экономические факторы, как *физический капитал* и *трудовые ресурсы* (в действительности — *численность* занятых в производстве работников). При этом роль уровня квалификации рабочей силы отмечалась ещё классиками экономической теории (такими, как А. Смит, Ж.Б. Сэй, Дж.С. Милль, Л. Вальрас, А. Пигу). В явном и теперь уже общепринятом виде концепция человеческого капитала вошла в экономическую науку только в 60-х годах XX столетия благодаря работам Дж. Минцера, Т. Шульца, Г. Беккера и М. Блауга. В настоящее время *человеческий капитал* (совокупность накопленных профессиональных *знаний, умений и навыков*, получаемых в процессе образования и повышения квалификации) считается одним из самых существенных факторов экономического роста и развития, а механизм его производства и накопления рассматривается как существенная часть *эндогенных математических моделей экономического роста*. Важнейшие концепции, описывающие влияние человеческого капитала и научно-технологического прогресса на динамику экономических систем, восходят к работам К. Эрроу [9], П. Ромера, Р. Нельсона – Э. Фелпса, Х. Узавы и Р. Лукаса [17] (см.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-04604)

подробнее [10], [1]–[5], [7]). Наиболее интересной среди перечисленных представляется работа [17], в которой строится математическая модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала с *непрерывным* временем.

В последнее десятилетие были предприняты попытки рассмотрения аналога модели Лукаса с *дискретным* временем (см., например, [15, 14, 11, 16]). Мотивацией для построения подобных моделей выступает желание получить модель, сохраняющую известные и экономически оправданные качественные особенности исходной модели Лукаса, и, кроме того, такую, которую проще и удобнее сопоставлять с данными экономической статистики (то есть с соответствующими временными рядами).

В настоящей работе рассматривается общая математическая модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала типа Лукаса с дискретным временем, изучение которой сводится к рассмотрению трехмерной дискретной динамической системы. Работа является непосредственным продолжением [6].

1. Модель экономического роста типа Лукаса с дискретным временем

Процедура построения математической модели экономического роста с учетом накопления человеческого капитала с дискретным временем в основном следует логике работы [17] (см. подробнее [6]). Следуя традиции, восходящей к работе [17]), выделим в явном виде «*внутренний*» и «*внешний*» эффекты процесса накопления человеческого капитала. Внутренний эффект этого процесса определяет рост *индивидуальной* эффективности труда «репрезентативного экономического агента»(ЭА); внешний эффект – связан с организационными и социальными аспектами производственной деятельности, на которые не могут повлиять индивидуальные решения ЭА о накоплении своего человеческого капитала. Внешним эффектом определяются так называемые «экстерналии». Как и в работе [17], ограничимся рассмотрением простейшего (и вместе с тем – одного из важнейших) случая, когда производственная функция является функцией типа Кобба – Дугласа, а экстерналии учитываются в мультипликативной форме. Поскольку речь идет о выявлении роли процесса накопления человеческого капитала, а не роста численности работников, естественно ограничиться случаем постоянной численности рабочей силы, то есть считать, что её темп роста равен нулю. В итоге уравнения динамики запишутся в виде:

$$k_{t+1} = Ak_t^{\beta}(u_t h_t)^{1-\beta}\bar{h}_t^{\gamma} - c_t + (1-\delta_k)k_t, \tag{1.1}$$

$$h_{t+1} = \delta(1-u_t)h_t + (1-\delta_h)h_t. \tag{1.2}$$

Здесь t — номер временного периода, $t \geq 0$; $k_t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,\infty)$ – удельный (*per capita*) физический капитал, приходящийся в среднем на одного ЭА; $h_t \in \mathbb{R}_+$ — уровень человеческого капитала ЭА; u_t — доля активного времени ЭА, отводимая трудовой деятельности ($u(t) \in [0,1]$); c_t — уровень потребления ЭА ($c(t) \in \mathbb{R}_+$); δ_k и δ_h — соответственно коэффициенты выведения (*depreciation rate*) физического и человеческого капиталов, $\delta_k \in (0,1)$, $\delta_h \in (0,1)$; $\delta > 0$, $A > 0$, $\beta \in (0,1)$, $\gamma > 0$ — постоянные, характеризующие процесс накопления человеческого капитала и технологические особенности производства. Множитель $\bar{h}_t^{\gamma}$ описывает экстерналии.

Вообще говоря, ЭА при планировании своей деятельности исходит из восприятия экстерналий как заданных (и известных) функций времени. При этом он выбирает свою стратегию из условия максимизации суммарной дисконтированной полезности

$$J[c] = \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \to max. \tag{1.3}$$

Здесь $\sigma > 0$ ($\sigma \neq 1$) и $\rho \in (0,1)$ — постоянные, характеризующие особенности поведения ЭА. Функции $c(t)$ и $u(t)$ являются управлениями.

Форма оптимизационной задачи (1.1), (1.2), (1.3) является вполне традиционной для математической теории экономического роста. Адекватный для исследования этой задачи (а также и более общих задач) математический аппарат достаточно подробно представлен в работах [12], [19], [13], [10] и [1]. Там же описана специфика рассмотрения этой задачи, трактуемой в содержательном плане как задача о «*конкурентном равновесии*» (*competitive equilibrium*).

Используя подход работ [12], [19] и [13], основанный на методе множителей Лагранжа, записанном в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина, можно показать, что необходимые условия экстремума в данной задаче могут быть представлены в виде следующей системы разностных уравнений:

$$k_{t+1} = Ak_t^{\beta} u_t^{1-\beta} h_t^{1-\beta+\gamma} - c_t + (1-\delta_k)k_t, \tag{1.4}$$

$$h_{t+1} = \delta(1-u_t)h_t + (1-\delta_h)h_t, \tag{1.5}$$

$$\left(\frac{c_t}{c_{t-1}}\right)^{\sigma} = \rho\left(\beta A k_t^{\beta-1} u_t^{1-\beta} h_t^{1-\beta+\gamma} + (1-\delta_k)\right) \tag{1.6}$$

$$\left(\frac{u_t}{u_{t-1}}\right)^{\beta} = \rho\left(\frac{c_{t-1}}{c_t}\right)^{\sigma}\left(\frac{k_t}{k_{t-1}}\right)^{\beta}\left(\frac{h_t}{h_{t-1}}\right)^{\gamma-\beta}((1-\delta_h)+\delta). \tag{1.7}$$

Заметим, что в уравнениях (1.4)–(1.7) фактически предполагается, что, в соответствии с экономическим смыслом переменных, справедливо включение $(k_t, h_t, c_t, u_t) \in \mathbb{R}^4_{++}$, $\mathbb{R}_{++} \equiv (0, \infty)$.

2. Сбалансированная оптимальная траектория

В математической теории экономического роста обычно ограничиваются исследованием только некоторого подмножества $\mathcal{P}_{BGP}$ множества $\mathcal{P}$ оптимальных траекторий, а именно – рассмотрением *сбалансированных оптимальных траекторий* (BGP – траекторий) [17]. Фактически речь идет о траекториях, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности и таким, что темпы роста всех или нескольких переменных вдоль таких траекторий постоянны.

Напомним, что для функции $z(t)$ дискретного аргумента t темпом роста называется величина $\omega_z(t) = \frac{z(t+1)}{z(t)}$. Таким образом, сбалансированной траекторией системы (1.4) – (1.7) является траектория, для которой темпы роста ω_k, ω_h, ω_c и ω_u постоянны.

В [6] доказано, что если система уравнений (1.4)-(1.7) имеет BGP — траектории, то для них справедливы следующие утверждения:

1*. Для переменных $(k_t, h_t, c_t, u_t) \in \mathbb{R}^4_{++}$ имеют место «законы сохранения»:

$$u_t = const, \; k_t^{\beta-1} h_t^{1-\beta+\gamma} = const, \; \frac{c_t}{k_t} = const. \tag{2.1}$$

2^*. Для темпов роста переменных $(k_t, h_t, c_t, u_t) \in \mathbb{R}^4_{++}$ имеют место равенства:

$$\omega_u = 1,\ \omega_k = \omega_c,\ \omega_k^{1-\beta} = \omega_h^{1-\beta+\gamma}, \tag{2.2}$$

$$\omega_h^{\frac{\gamma(1-\sigma)}{1-\beta}-\sigma} = \frac{1}{\rho[(1-\delta_h)+\delta]}. \tag{2.3}$$

Соотношения (2.1) позволяют провести замену переменных в системе уравнений (1.4)–(1.7). Введем новые переменные $q_t = \frac{c_t}{k_t}$ и $x_t = \frac{k_t}{(h_t)^{\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}}}$. Переход от переменых (k, h, c, u) к переменным (x, q, c, u) позволяет привести систему уравнений (1.4)–(1.7) к виду:

$$\frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{Ax_t^{\beta-1}u_t^{1-\beta} - q_t + (1-\delta_k)}{[\delta(1-u_t)+(1-\delta_h)]^{\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}}}, \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{q_{t+1}}{q_t}\right)^{\sigma} = \frac{\rho\left[\beta A x_{t+1}^{\beta-1}u_{t+1}^{1-\beta} + (1-\delta_k)\right]}{\left[Ax_t^{\beta-1}u_t^{1-\beta} - q_t + (1-\delta_k)\right]^{\sigma}}, \tag{2.5}$$

$$\left(\frac{u_{t+1}}{u_t}\right)^{\beta} = \frac{\left[Ax_t^{\beta-1}u_t^{1-\beta} - q_t + (1-\delta_k)\right]^{\beta}[\delta(1-u_t)+(1-\delta_h)]^{\gamma-\beta}}{[\beta A x_{t+1}^{\beta-1}u_{t+1}^{1-\beta} + (1-\delta_k)]}[(1-\delta_h)+\delta]. \tag{2.6}$$

$$(\frac{c_t}{c_{t-1}})^{\sigma} = \rho\left[\beta A x_t^{\beta-1}u_t^{1-\beta} + (1-\delta_k)\right], \tag{2.7}$$

Система уравнений (2.4)-(2.7) обладает специфической структурой — уравнения (2.4)-(2.6) образуют замкнутую подсистему. Их решение позволяет однозначно определить решение уравнения (2.7). Таким образом, произведенная замена переменных позволила «понизить порядок» исследуемой системы уравнений.

Заметим, что в силу (2.1) и (2.2) справедливы равенства

$$\omega_q = 1, \quad \omega_x = 1, \quad \omega_u = 1, \tag{2.8}$$

означающие, что первые три координаты сбалансированных траекторий совпадают с неподвижными (стационарными) точки системы (2.4)-(2.6).

3. Существование и единственность сбалансированной траектории

Очевидно, что исследование динамики исходной математической модели и вопросов существования BGP-траекторий тесно связано с изучением трёхмерной динамической системы, которая задаётся разностными уравнеными (2.4)-(2.6). При этом важную роль играет определение количества неподвижных точек этой системы и их свойств.

Обозначим координаты неподвижных точек системы (2.4)-(2.6) (x, q, u). Учитывая условие (2.8), в результате очевидных преобразований получим следующую алгебраическую систему для определения координат неподвижных точек системы (2.4)-(2.6):

$$[\delta(1-u)+(1-\delta_h)]^{\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}} = U - q + (1-\delta_k), \tag{3.1}$$

$$[U - q + (1-\delta_k)]^{\sigma} = \rho\left[\beta U + (1-\delta_k)\right], \tag{3.2}$$

$$\beta U + (1-\delta_k) = [U - q + (1-\delta_k)]^{\beta}\left[\delta(1-u)+(1-\delta_h)\right]^{\gamma-\beta}\left[(1-\delta_h)+\delta\right]. \tag{3.3}$$

В [6] доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Система* (2.4)-(2.6) *имеет не менее одной неподвижной точки, причем*

$$u \equiv u_{BGP} = \frac{\Delta - [\rho\Delta]^{\frac{1}{D}}}{\delta}, \tag{3.4}$$

где

$$\Delta \equiv (1-\delta_h) + \delta, \;\; D = \frac{\sigma(1-\beta) + \gamma(\sigma - 1)}{1-\beta} \tag{3.5}$$

Теорема 2. *Пусть имеет место одна из следующих систем неравенств:*

$$1^*. \;\; D > 0, \quad \frac{(1-\delta_h)^D}{(1-\delta_h)+\delta} < \rho < ((1-\delta_h)+\delta)^{D-1}. \tag{3.6}$$

$$2^*. \;\; D < 0, \quad ((1-\delta_h)+\delta)^{D-1} < \rho < (1-\delta_h)^D((1-\delta_h)+\delta)^{-1}. \tag{3.7}$$

Тогда справедливо включение $u_{BGP} \in (0,1)$.

Имея в виду, что всюду в дальнейших рассуждениях $u \equiv u_{BGP}$, найдём остальные координаты неподвижной точки.

Для дальнейшего введём новые обозначения. А именно, обозначим

$$1 - \delta_k \equiv \Delta_k, \;\; \Delta_k \in (0,1); \;\; 1 - \delta_h \equiv \Delta_h, \;\; \Delta_h \in (0,1). \tag{3.8}$$

Тогда в (3.5) $\Delta \equiv \Delta_h + \delta$. Отметим также, что

$$\Delta - \delta u = \Delta - \delta\frac{\Delta - [\rho\Delta]^{\frac{1}{D}}}{\delta} = (\rho\Delta)^{\frac{1}{D}}. \tag{3.9}$$

Пусть

$$P_1 = \frac{\gamma}{\sigma(1-\beta) + \gamma(\sigma-1)}, \;\; P_2 = \frac{1-\beta+\gamma}{\sigma(1-\beta)+\gamma(\sigma-1)}. \tag{3.10}$$

Заметим, что $P_2 = \frac{1}{D} + P_1$.

Уравнения (3.1)-(3.3) перепишутся в виде:

$$[\rho\Delta]^{P_2} = U - q + \Delta_k \tag{3.11}$$

$$[U - q + \Delta_k]^{\sigma} = \rho\left[\beta U + \Delta_k\right], \tag{3.12}$$

$$\beta U + \Delta_k = [U - q + \Delta_k]^{\beta}\,[\rho\Delta]^{\frac{\gamma-\beta}{D}}\,\Delta. \tag{3.13}$$

Зная значение u_{BGP}, найдём $x = x_{BGR}$. В самом деле, из (3.12) имеем:

$$U - q + \Delta_k = (\rho(\beta U + \Delta_k))^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Тогда вместо (3.13) получим:

$$(\beta U + \Delta_k)^{\frac{\sigma-\beta}{\sigma}} = \rho^{\frac{\sigma-\beta}{\sigma}P_1}\Delta^{\frac{\sigma-\beta}{\sigma}P_2\sigma},$$

откуда найдём U:

$$U = \frac{1}{\beta}(\rho^{P_1}\Delta^{P_2\sigma} - \Delta_k). \tag{3.14}$$

Таким образом,

$$x \equiv x_{BGP} = (A\beta)^{\frac{1}{1-\beta}} \left(\rho^{P_1} \Delta^{P_2\sigma} - \Delta_k\right)^{\frac{1}{\beta-1}} u_{BGP}, \tag{3.15}$$

где координата u_{BGP} определяется из (3.4).

Третья координата $q \equiv q_{BGP}$ легко находится из уравнения (3.11), где U находится из (3.14). А именно,

$$q \equiv q_{BGP} = \frac{1}{\beta}(\rho^{P_1} \Delta^{P_2\sigma} - \Delta_k) + \Delta_k - (\rho\Delta)^{P_2}. \tag{3.16}$$

Из проведённых вычислений следует

Теорема 3. *Динамическая система* (2.4) – (2.6) *имеет единственную неподвижную точку с координатами* (3.15), (3.16), (3.4).

Обозначим вектор параметров системы (1.1)-(1.3) $\theta \equiv col\{A, \delta, \gamma, \beta, \rho, \delta_k, \delta_h, \sigma\} \in \Theta$, $\Theta \equiv \mathbb{R}^3_{++} \times [0,1]^4 \times \Sigma$, $\Sigma = (0,1) \cup (1,\infty)$. Для того, чтобы сделать вывод о существовании единственной сбалансированной оптимальной траектории, соответствующей найденному стационарному состоянию системы, требуется показать, что в пространстве параметров Θ системы (2.4)-(2.6) можно выделить непустую область Θ_{BGP}, для которой BGP – траектория существует. Покажем, что это так. Определим достаточные условия существования сбалансированной оптимальной траектории, соответствующей полученному состоянию равновесия. Первое условие найдено в работе [6] (теорема 2 настоящей работы).

Из (3.15) и (3.16) непосредственно вытекают следующие теоремы.

Теорема 4. *В условиях теоремы 2 если*

$$\rho^{P_1} \Delta^{P_2\sigma} - \Delta_k > 0, \tag{3.17}$$

то $x_{BGP} > 0$.

Теорема 5. *В условиях теорем 2 и 4 если*

$$\frac{1}{\beta}(\rho^{P_1} \Delta^{P_2\sigma} - \Delta_k) + \Delta_k > (\rho\Delta)^{P_2}, \tag{3.18}$$

то $q_{BGP} > 0$.

Условия теорем 2,4,5 выделяют в множестве Θ_{BGP} некоторое подмножество Θ_{BGP+}, для значений параметрой из которого координаты BGP-траектории положительны и, следовательно, имеют экономический смысл. Покажем, что множество Θ_{BGP+} не пусто. С этой целью рассмотрим следующий

Пример 1. Выберем значения параметров $\delta = \gamma = 1$, $\beta = \delta_k = \delta_h = \frac{1}{2}$, $\sigma = 1,1$, $\rho = 0,75$. Они принадлежат области изменения параметров модели. Покажем, что при данных значениях утверждения теорем 2, 4, 5 имеют место.

В самом деле, в этом случае $D = 1,3 > 0$. Второе неравенство (3.6), после «разумного»округления принимает вид: $0,3964 < 0,75 < 1,0438$. Заметим, что при этом $u_{BGP} \approx 0,402 \in (0,1)$.

Установим выполнение условий теорем 4 и 5. В самом деле,

$$\rho^{P_1}\Delta^{P_2\sigma}-\Delta_k=0,75^{\frac{10}{13}}1,5^{\frac{0,825}{0,65}}-0,5\approx 0,57>0,$$

и $x_{BGP}>0$. Рассмотрим, далее, неравенство (3.18). Подставляя значения параметров в левую часть неравенства, получим:

$$\frac{1}{\beta}(\rho^{P_1}\Delta^{P_2\sigma}-\Delta_k)+\Delta_k\approx 2\cdot 0,57+0,5=1,64.$$

Подстановка значений в левую часть неравенства даст

$$(\rho\Delta)^{P_2}=(0,75\cdot 1.5)^{\frac{0,75}{0,65}}\approx 1,15,$$

то есть $q_{BGP}>0$.

Из теорем 2, 4, 5 и приведённого примера непосредственно вытекает

Теорема 6. *В пространстве параметров $\theta\equiv col\{A,\delta,\gamma,\beta,\rho,\delta_k,\delta_h,\sigma\}\in\Theta$, $\Theta\equiv\mathbb{R}^3_{++}\times[0,1]^4\times\Sigma$, $\Sigma=(0,1)\cup(1,\infty)$ системы (2.4)-(2.6) имеется непустая область $\Theta_{BGP+}\subset\Theta_{BGP}$, для которой выполняются неравенства $u_{BGP}\in(0,1)$, $x_{BGP}>0$, $q_{BGP}>0$, то есть у исходной модели существует единственная сбалансированная оптимальная траектория.*

Вопросам исследования поведения орбит системы в окрестности сбалансированной оптимальной траектории, а также изучения структуры фазоаого пространства будет посвящена отдельная статья.

Список цитируемых источников

1. *Кузнецов Ю. А.* Оптимальное управление экономическими системами. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2008. — 449 с.

   Kuznetsov, Yu.A. Optimal control of economic systems (in Russian). — Nizhny Novgorod, UNN publishing house, 2008. — 449 p.
2. *Кузнецов Ю. А.* Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты. I // Экономический анализ: теория и практика. — 2011. — №17(224). — С.50-61.

   Kuznetsov, Yu.A. Mathematical modelling of economic cycles: facts, concepts, results. I (in Russian) // Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika. — 2011. — no 17(224). — P. 50-61.
3. *Кузнецов Ю. А.* Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты. II // Экономический анализ: теория и практика. — 2011. — №18(225). — С.42-57.

   Kuznetsov, Yu.A. Mathematical modelling of economic cycles: facts, concepts, results. II (in Russian) // Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika. — 2011. — no 18(225). — P. 42-57.
4. *Кузнецов Ю. А.* Человеческий капитал, производительность труда и экономический рост. I // Экономический анализ: теория и практика. – 2012. – N43(298). — С.2-17.

   Kuznetsov, Yu.A. Human capital, productivity and economic growth. I (in Russian) // Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika. — 2012. — no 43(298). — P. 2-17.
5. *Кузнецов Ю. А.* Человеческий капитал, производительность труда и экономический рост. II // Экономический анализ: теория и практика. — 2012. — №44(299). — С.2-14.

   Kuznetsov, Yu.A. Human capital, productivity and economic growth. II (in Russian) // Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika. — 2012. — no 44(299). — P. 2-14.

6. *Кузнецов Ю. А., Круглов Е. В., Бурлакова Д. А.* Математическая модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала с дискретным временем // Журнал Средневолжского математического общества. — 2015. — Т.17, №2. — С.58-65.

   Kuznetsov, Yu.A.; Kruglov, E.V.; Burlakova, D.A. Mathematical model of economic growth based on the accumulation of human capital with discrete time (in Russian) // Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva. — 2015. — Vol. 17, no 2. — P. 58-65.
7. *Кузнецов Ю. А., Мичасова О. В.* Обобщенная модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. — Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2012. — №4. — С.46-57.

   Kuznetsov, Yu.A.; Michasova, Yu.A. Generalized model of economic growth based on the accumulation of human capital (in Russian) // Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta, Seriya 10. — Applied Mathematics. Informatics. Process control. — 2012. — no 4. — P. 46-57.
8. *Шараев Ю. В.* Теория экономического роста. — Москва: Издательство ГУ ВШЭ, 2006. — 254 с.

   Sharaev, Yu.V. The theory of economic growth. (in Russian) — Moscow: HSE publishing house, 2006. — 254 pp.
9. *Arrow K. J.* The Economic Implications of Learning by Doing // Review of Economic Studies. — 1962. — Vol. 29, no 1. — P 155-173.
10. *Barro R., Sala - i – Martin X.* Economic Growth. 2-nd Edition. Cambridge, Massachusetts. — London, England: MIT Press,2004. — 654 pp.
11. *Bethmann D.* Closed-form Solution of the Uzawa – Lucas Model of Endogenous Growth // Journal of Economics. — 2007. — Vol.90. — no 1. — P. 87-107.
12. *Chow G. C.* Dynamic Economics: Optimization by Lagrange Method. — Oxford: Oxford University Press, 1997. — 234 pp.
13. *De la Croix D., Michel P. A.* Theory of Economic Growth. Dynamic and Policy in Overlapping Generations Cambridge. — Cambridge University Press, 2004. — 378 pp.
14. *Gomes O.* Decentralized allocation of human capital and nonlinear growth // Computering Economics. — 2008. — no 31. — P. 45-75.
15. *Gourdel P., Ngoc L. H., Le Van C., Mazamba T.* Equilibrium and Competitive Equilibrium in a Discrete-Time Lucas Model // Journal of Difference Equations and Applications. — 2004. — Vol.10, N5. — P. 501-514.
16. *Hiraguchi R.* A two sector endogenous growth model with habit formation // Journal of Economic Dynamics and Control. — 2011. — Vol.35, N3. — P. 430–441.
17. *Lucas R. E.* On the mechanics of economic development // Journal of Monetary Economics. — 1988. — Vol.22, N1. — P. 3-42.
18. *Robinson C.* Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. — CRC Press LLC, 1999. — 506 p.
19. *Stokey N. L., Lucas R. E. Jr., Prescott E. C.* Recursive Methods in Economic Dynamics. Seventh printing. Cambridge, Massachusetts. — London, England: Harvard University Press, 2004. — 588 p.
20. *Uzawa H.* Optimal technical change in an aggregate model of economic growth // International Economic Review. — 1965. — N6. — P.213-217.

Получена 20.06.2015