Динамические системы, 2015, том 5(33), №1-2, 57–60

УДК 517.938

О динамике эндоморфизмов двумерного тора с одномерными базисными множествами[1]

Е. Д. Куренков

Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики
Нижний Новгород. *E-mail: eugene2402@mail.ru*

Аннотация. В настоящей заметке рассматриваются эндоморфизмы, заданные на замкнутом двумерном многообразии, удовлетворяющие аксиоме А. В работах Пшетыцкого (F. Przytycki) были получены необходимые и достаточные условия Ω-устойчивости таких эндоморфизмов. Также он показал, что в любой окрестности Ω-неустойчивого эндоморфизма существует счетное число попарно Ω-несопряженных эндоморфизмов. В данной работе строится пример однопараметрического семейства Ω-сопряженных, но топологически несопряженных эндоморфизмов двумерного тора.

Ключевые слова: аксиома А, Ω-неустойчивый эндоморфизм, топологическая сопряженность.

Введение и формулировка результатов

Пусть M^2 — замкнутое ориентируемое 2-многообразие и $f\colon M^2 \to M^2$ — C^r-эндоморфизм, удовлетворяющий аксиоме А. Напомним, что эндоморфизм f удовлетворяет аксиоме А, если выполнены следующие два условия:

1) множество периодических точек Per_f плотно в неблуждающем множестве Ω_f;

2) неблуждающее множество Ω_f — гиперболично.

Гиперболичность Ω_f означает, что существуют константы $C > 0$, $0 < \mu < 1$ и риманова метрика на TM такие, что для любой траектории из неблуждающего множества $\bar{x} = \{x_i \mid f(x_i) = x_{i+1}, x_i \in \Omega_f, i \in \mathbb{Z}\}$ существует разложение касательного пространства в прямую сумму $T_{\bar{x}} = E^s \oplus E^u$, инвариантное относительно производной $Df\colon T_{\bar{x}}M \to T_{\bar{x}}M$, и для которого верны следующе неравенства:

1. $\|Df^n(v)\| \leqslant C\mu^n\|v\|$, для любых $n \geqslant 0$, $v \in E^s$;
2. $\|Df^n(v)\| \geqslant (1/C)\mu^{-n}\|v\|$, для любых $n \geqslant 0$, $v \in E^u$.

В работе Пшетыцкого [3] получены необходимые и достаточные условия Ω-устойчивости таких эндоморфизмов, при условии, что в неблуждающем множестве Ω_f не содержится особых точек f, то есть точек, в которых производная $Df\colon T_pM \to T_{f(p)}M$ не инъективна.

Кроме того, в [3] доказано, что если эндоморфизм f не является Ω-устойчивым, то в любой его окрестности существует счетное число попарно Ω-несопряженных эндоморфизмов.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения»).

В данной работе мы воспользуемся представлениями: $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Рассмотрим прямое произведение следующих отображений $\varphi\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ и $\psi\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$:

$$\varphi(x) = 2x \mod 1, \quad \psi(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(\pi x)e^{2\pi}\right) \mod 1.$$

Диффеоморфизм $\psi\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ представляет собой сдвиг на единицу времени вдоль потока $\dot{x} = \sin(2\pi x)$, $x \in \mathbb{S}^1$. Каждое из этих отображений в отдельности является структурно устойчивым, в то время как их прямое произведение $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $f(x,y) = (\varphi(x), \psi(y))$ уже не является даже Ω-устойчивым.

В силу результатов Пшетыцкого [3] для любого базисного множества Ω_i Ω-устойчивого эндоморфизма $f\colon M \to M$, удовлетворяющего аксиоме A, необходимо выполнено одно из двух условий:

1) сужение $f|_{\Omega_i}$ является взаимно-однозначным отображением;
2) сужение $f|_{\Omega_i}$ является квазирасширяющим, то есть для любой траектории $\bar{x} \in \Omega_i$ $\dim E^u_{x_0} = \dim M$.

Очевидно, что аттрактор $A = \{(x,y) \in \mathbb{T}^2 \mid x = 1/2\}$ построенного эндоморфизма $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ не удовлетворяет ни ожному из приведенных условий.

Нашей основной задачей здесь будет построение континуума попарно Ω-сопряженных, но топологически несопряженных эндоморфизмов в окрестности f.

Доказательство основного результата

Лемма. *Если гомеомрфизм $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ удовлетворяет условию $h \circ \varphi = \varphi \circ h$, то либо $h(x) = x \mod 1$, либо $h(x) = -x \mod 1$, $x \in \mathbb{S}^1$.*

Доказательство. Так как $x = 0$ — единственная неподвижная точка эндоморфизма φ, то необходимо $h(0) = 0$. Далее, поскольку $\varphi^{-1}(0) = \{0, 1/2\}$, то необходимо $h(1/2) = 1/2$. Рассматривая прообразы точки $x = 1/2$, получаем, что либо $h(1/4) = 1/4$ и $h(3/4) = 3/4$, либо $h(1/4) = 3/4$ и $h(3/4) = 1/4$. В первом случае h оказывается сохраняющим ориентацию, а во втором — меняющим. Прообразы точки $x = 0$ при отображении φ^n имеют вид $\frac{k}{2^n}$, $0 \leqslant k < 2^n - 1$, $k \in \mathbb{Z}$. В первом случае имеем единственное продолжение h на множество $\varphi^{-n}(0)$, то есть $h\left(\frac{k}{2^n}\right) = \frac{k}{2^n}$, а во втором — единственное продолжение $h\left(\frac{k}{2^n}\right) = \frac{2^n-k}{2^n}$. Так как множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \varphi^{-n}(0)$ всюду плотно, то получаем, что либо $h(x) = x \mod 1$, либо $h(x) = -x \mod 1$. □

Рассмотрим семейство $f_\varepsilon\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, эндоморфизмов тора, непрерывно зависящее от параметра. Здесь и далее мы предполагаем, что $\varepsilon \geqslant 0$.

$$f_\varepsilon(x,y) = (\varphi(x), \psi^{t(x,\varepsilon)}(y)),$$

где

$$\psi^\tau(y) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(\pi y)e^{2\pi\tau}\right) \mod 1, \quad t(x,\varepsilon) = 1 + \varepsilon e^{-\operatorname{tg}^2\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)}.$$

Отображение $\psi^\tau(y)$ представляет собой сдвиг на время τ вдоль потока $\dot{y} = \sin(2\pi y)$. Заметим также, что при $\varepsilon = 0$ f_ε, совпадая с f, приобретает вид прямого произведения. Кроме того, любой эндоморфизм из данного класса удовлетворяет аксиоме A.

Теорема. *Эндоморфизмы* $f_{\varepsilon_1}\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ *и* $f_{\varepsilon_2}\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ *не являются топологически сопряженными при* $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$.

Доказательство. Предположим, что эндоморфизмы f_{ε_1} и f_{ε_1} при условии $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ топологически сопряжены. То есть существует такой гомеоморфизм $h\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, для которого $h \circ f_{\varepsilon_1} = f_{\varepsilon_2} \circ h$.

Поскольку блуждающее множество эндоморфизма f_ε состоит в точности из двух компонент связности $\{(x,y) \in \mathbb{T}^2 \mid y \in (0,1/2)\}$ и $\{(x,y) \in \mathbb{T}^2 \mid y \in (1/2,1)\}$, а отображение f_ε на этих компонантах связности симметрично в смысле следующего соотношения $\psi^\tau(y) = 1 - \psi^\tau(1-y)$, $y \in (0,1)$, то достаточно доказать, что не существует сопрягающего гомеоморфизма $h\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ в классе гомеоморфизмов, переводящих компоненту связности блуждающего множества $\{(x,y) \in \mathbb{T}^2 \mid y \in (0,1/2)\}$ в себя.

Заметим, что при любом $\varepsilon \geqslant 0$ окружности $R = \{(x,y) \in \mathbb{T}^2 \mid y = 0\}$ и $A = \{(x,y) \in \mathbb{T}^2 \mid y = 1/2\}$ являются репеллером и аттрактором соответственно. Кроме того, так как сужение f_ε на аттрактор есть φ, то в силу леммы либо $h|_A(x,y) \equiv (x,y)$, либо $h|_A(x,y) \equiv (-x \mod 1, y)$.

Рассмотрим случай, когда $h(x,y)|_A = (x,y)$. Устойчивое многообразие неподвижной точки $a = (0,1/2)$ ($W^s_a = \{p \in \mathbb{T}^2 \mid d(a, f^n_\varepsilon(p)) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\}$) не зависит от выбора ε и имеет вид $W^s_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{T}^2 \setminus R \mid x = \frac{m}{2^n}, m,n \in \mathbb{Z}\right\}$. Заметим, что устойчивое многообразие W^s_a плотно в $\mathbb{T}^2$, а его компоненты связности единственным образом доопределяются до f_ε-инвариантного слоения $L = \{x = \alpha \mid \alpha \in \mathbb{S}^1\}$ на $\mathbb{T}^2$. Из этого следует, что гомеоморфизм h необходимо сохраняет слоение L, а в силу трансверсальности A и L, и того, что сужение $h|_A \equiv \mathrm{id}$, следует, что каждый слой слоения L инвариантен относительно h, то есть $h(x,y_1) = (x,y_2)$.

Таким образом, гомеоморфизм h представим в виде косого произведения $h(x,y) = (x, g_x(y))$. Для любого ε имеет место тождество: $f_\varepsilon(0,y) = (0, \psi^1(y))$, поэтому верно соотношение:

$$g_0 \circ \psi^1 = \psi^1 \circ g_0. \tag{1}$$

Кроме того, поскольку ψ^τ есть сдвиг вдоль потока, то

$$\psi^{\tau_1} \circ \psi^{\tau_2} = \psi^{\tau_1} \circ \psi^{\tau_2} = \psi^{\tau_1+\tau_2} \quad \text{для любых } \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Если некоторое из отображений $g_x(y)$ задано, то отображение $g_{\varphi^{-1}(x)}(y)$ определяется единственным образом из условия:

$$g_{\varphi(x)} \circ \psi^{t(x,\varepsilon_1)} = \psi^{t(x,\varepsilon_2)} \circ g_x. \tag{3}$$

Из (3) получаем:

$$g_{\varphi^{-1}(x)} = \psi^{-t(\varphi^{-1}(x),\varepsilon_2)} \circ g_x \circ \psi^{t(\varphi^{-1}(x),\varepsilon_1)} \tag{4}$$

(здесь под $\varphi^{-1}(x)$ понимается любая точка из полного прообраза).

Рассмотрим последовательность отображений $g_{1/2}, g_{1/4}, \ldots, g_{1/2^n}, \ldots$. Так как h является гомеоморфизмом, то данная последовательность отображений должна поточечно сходиться к отображению g_0.

Из (1) и (4) имеем:

$$g_{1/2^n} = \psi^{-\sigma(n,\varepsilon_2)} \circ g_0 \circ \psi^{\sigma(n,\varepsilon_1)}, \tag{5}$$

где
$$\sigma(n,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{n}\left[t\left(\frac{1}{2^k},\varepsilon\right)-1\right].$$
Данный ряд сходится при любом $\varepsilon \geqslant 0$. Действительно, поскольку $\frac{\partial}{\partial x}\big|_{x=0} t(x,\varepsilon)=0$, то $t(x,\varepsilon)-1<x$ при x достаточно близких к нулю. Следовательно $t\left(\frac{1}{2^n},\varepsilon\right)-1<\frac{1}{2^n}$ для достаточно больших n, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[t\left(\frac{1}{2^k},\varepsilon\right)-1\right]$ сходится. Отсюда в пределе получаем равенство
$$g_0=\psi^{-\sigma(\infty,\varepsilon_2)}\circ g_0\circ\psi^{\sigma(\infty,\varepsilon_1)}, \tag{6}$$
где
$$\sigma(\infty,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[t\left(\frac{1}{2^k},\varepsilon\right)-1\right].$$
Из неравенства $\varepsilon_1>\varepsilon_2$ следует, что $t(x,\varepsilon_1)>t(x,\varepsilon_2)$ для любого $x\in\mathbb{S}^1$, $x\neq 0$, но тогда и $\sigma(\infty,\varepsilon_1)>\sigma(\infty,\varepsilon_2)$.

Покажем, что при выполнении соотношения (1), равенство (6) выполняться не может, что и завершит наше доказательство. Выберем произвольную точку y из отрезка $[0, 1/2]$ и рассмотрим системы отрезков $\Delta_i=[\psi^{i-1}(y),\psi^i(y)]$ и $\widetilde{\Delta}_i=[\psi^{i-1}(g_0(y)),\psi^i(g_0(y))]$, $i\in\mathbb{Z}$. В силу соотношения (1) имеем $g(\Delta_i)=\widetilde{\Delta}_i$. Выберем целое число k так, чтобы выполнялось неравенство $k(\sigma(\infty,\varepsilon_1)-\sigma(\infty,\varepsilon_2))>1$. Принимая во внимание равенство (2) получаем, что точки $\psi^{k\sigma(\infty,\varepsilon_2)}\circ g_0(y)$ и $g_0\circ\psi^{k\sigma(\infty,\varepsilon_1)}(y)$ принадлежат разным отрезкам $\widetilde{\Delta}_i$, что противоречит равенству (6).

Случай, когда $h(x,y)|_A=(-x \mod 1, y)$ рассматривается совершенно аналогично в силу того, что $t(x,\varepsilon)\equiv t(-x \mod 1, y)$. □

Автор благодарит В. З. Гринеса за постановку задачи, а также Е. В. Жужому и О. В. Починку за полезные обсуждения.

Список цитируемых источников

1. *Shub M.* Endomorphisms of compact differentiable manifols // Amer. J. Math. — 1969. — Vol.91. — P.175-199.
2. *Przytycki F.* Anosov endomorphisms // Stud. Math. — 1976. — Vol.58(3). — P. 249–285.
3. *Przytycki F.* On Ω-stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A // Stud. Math. — 1977. — LX. — P. 61-77.

Получена 19.06.2015