Динамические системы, 2015, том 5(33), №1-2, 69–75

УДК 517.432+517.98+517.982.224

О минимальности J-симметрической и J-самосопряжённой дилатаций линейного оператора с непустым множеством регулярных точек

Ю. Л. Кудряшов, Д. В. Третьяков
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: kudryashov_2889@mail.ru, dvttvd@mail.ru*

Аннотация. В статье доказывается минимальность J-симметрической и J-самосопряженной дилатаций плотно заданного оператора A с непустым множеством регулярных точек. Пространства J-дилатаций строятся с помощью дефектных подпространств исходного оператора. Дефектные подпространства оператора A и J-метрики пространств J-дилатаций образуются полярными разложениями дефектных операторов. Минимальность указанных дилатаций гарантируются сепарабельностью дефектных подпространств

Ключевые слова: неограниченный, минимальная дилатация, J-самосопряженный оператор

1. Введение. Предварительные сведения

Для оператора сжатия в [6] была построена унитарная дилатация и доказана ее минимальность. Используя преобразование Кэли можно доказать существование самосопряженной дилатации диссипативного оператора и дать определение минимальности такой дилатации.

В [3] были явно построены J-симметрическая и J- самосопряженная дилатации линейного оператора с непустым множеством регулярных точек.

В статье доказываются минимальности J-симметрической и J- самосопряженной дилатаций из [3] при определённых, естественных условиях на дефектные подпространства исходного оператора.

Определение 1. Пусть A — линейный, не обязательно ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ называется дилатацией оператора A [1, 4], если выполняются следующие условия:

1) существует $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(\mathsf{A})$;

2) $\mathfrak{H} \subset \mathbf{H}$;

3) $R^n_{\lambda_0}(A)\,h = \mathsf{P}R^n_{\lambda_0}(\mathsf{A})h$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathfrak{H}$, P — ортопроектор из $\mathbf{H}$ на $\mathfrak{H}$, $R_{\lambda_0}(A) = (A - \lambda_0\, I)^{-1}$, $R_{\lambda_0}(\mathsf{A}) = (\mathsf{A} - \lambda_0\, \mathsf{I})^{-1}$.

Исходя из этого определения, естественно, дать следующее определение минимальности J-симметрической дилатации.

Определение 2. Симметрическая дилатация L, действующая в пространстве $\mathbf{H}$, оператора A, действующего в пространстве $\mathfrak{H}$ называется *минимальной*, если

$$\mathbf{H} = \overline{\operatorname{span}_{n\geq 0}\,\{R^n_{\lambda_0}(\mathsf{L})\,\mathfrak{H}\}} = \mathbf{H}_{\min}.$$

Очевидно, что для произвольной J-симметрической дилатации L выполнено включение $\mathbf{H}_{\min} \subset \mathbf{H}$ и $\mathbf{H}_{\min}$ инвариантно относительно резольвенты $R_{\lambda_0}(\mathsf{L})$, но не обязательно инвариантно относительно самого оператора L. Поэтому не всякую дилатацию можно сузить до минимальной, как в случае изометрической дилатации оператора сжатия [6].

В случае J-самосопряженной дилатации S, определение минимальности следующее:

Определение 3. Самосопряженная дилатация S, действующая в пространстве $\mathbf{H}$, оператора A, действующего в пространстве $\mathfrak{H}$, называется *минимальной*, если

$$\mathbf{H} = \overline{\operatorname{span}_{n\geq 0}\,\{R^n_{\lambda_0}(\mathsf{S})\,\mathfrak{H},\ R^n_{\overline{\lambda_0}}(\mathsf{S})\,\mathfrak{H}\}} = \mathbf{H}_{\min}.$$

2. J-симметрическая дилатация

Везде далее A — линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, с плотной областью определения $\operatorname{dom}(A)$ и $-i \in \rho(A)$.

Рассмотрим операторы

$$B_+ = i\,R_{-i} - i\,R^*_{-i} - 2\,R^*_{-i}\,R_{-i}, \quad B_- = i\,R_{-i} - i\,R^*_{-i} - 2\,R_{-i}\,R^*_{-i}, \text{где}\, R_{-i} = (A + i\,I)^{-1},$$

$Q_\pm = \sqrt{|B_\pm|}$, $B_\pm = J_\pm |B_\pm|$ и подпространства $\mathfrak{Q}_\pm = \overline{Q_\pm \mathfrak{H}}$.

В гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_+ = L_2(\mathbb{R}_+;\ \mathfrak{Q}_+) \oplus \mathfrak{H} = \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{H}$, построим оператор L следующим образом.

Вектор $\mathsf{h} = \begin{pmatrix} h_+(t) \\ h_0 \end{pmatrix}$, где $h_+(t) \in \mathfrak{D}_+$, $\quad h_0 \in \mathfrak{H}$, принадлежит $\operatorname{dom}(\mathsf{L})$ тогда и только тогда, когда

1) $h_+(t) \in W^1_2(\mathbb{R}_+;\ \mathfrak{Q}_+)$;
2) $h_0 \in \operatorname{dom}(A)$;
3) $h_+(0) = i\,Q_+(A + i\,I)h_0$.

Если $\mathsf{h} \in \operatorname{dom}(\mathsf{L})$, то

$$\mathsf{L}\,\mathsf{h} = \mathsf{L}\begin{pmatrix} h_+(t) \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_+ h_+)(t) \\ A\,h_0 \end{pmatrix},$$

где $(\mathcal{P}_+ h_+)(t) = i h'_+(t)$.

J-метрику в указанном пространстве определим равенством:

$$\mathsf{J}\,\mathsf{h} = \mathsf{J}\begin{pmatrix} h_+(t) \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{J}_+ h_+)(t) \\ h_0 \end{pmatrix},$$

где $(\mathcal{J}_+ h_+)(t) = J_+ h_+(t)$ – оператор J_+ действует на $h_+(t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}_+$.

Оператор L является J-симметрической дилатацией оператора A [3].

Теорема 1. *Если подпространство $\mathfrak{Q}_+$ сепарабельно, то дилатация L является минимальной.*

Доказательство. Надо доказать, что

$$\mathbf{H}_+ = \mathfrak{D}_+ \oplus \mathfrak{H} = \overline{\operatorname{span}_{n\geq 0}\{R^n_{-i}(\mathsf{L})\,\mathfrak{H}\}}.$$

Непосредственными вычислениями можно проверить, что

$$R_{-i}(\mathsf{L})\begin{pmatrix} h_+(t) \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((\mathcal{P}_0 + i\,I)^{-1}h_+)(t) + i\,e^{-t}\,Q_+\,h_0 \\ R_{-i}\,h_0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_+|_{\mathrm{dom}(\mathcal{P}_0)}$, $\quad \mathrm{dom}(\mathcal{P}_0) = \{\,h_+ \in \mathrm{dom}(\mathcal{P}_+) | \quad h_+(0) = 0\}$,

$$((\mathcal{P}_0 + i\,I)^{-1}h_+)(t) = \frac{1}{i}\int\limits_0^t e^{s-t}h_+(s)\,ds.$$

Отсюда

$$R_{-i}(\mathsf{L})\begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\,e^{-t}\,Q_+\,h_0 \\ R_{-i}\,h_0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Докажем формулу для n-ой степени резольвенты оператора L:

$$R^n_{-i}(\mathsf{L})\begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

$$\varphi_n(t) = e^{-t}\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!\,i^{n-k-1}}\,Q_+\,R^{k-1}_{-i}h_0, \quad \psi_n = R^n_{-i}\,h_0.$$

Легко видеть, что при $n = 1$ мы получаем формулу (2.2).
Если равенство (2.3) верно для любого $k \leq n$, то при $k = n + 1$

$$\varphi_{n+1}(t) = e^{-t}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\,i^{n-k}}\,Q_+\,R^{k-1}_{-i}\,h_0.$$

Применяя формулу (2.1), получим:

$$R^{n+1}_{-i}(\mathsf{L})\begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix} = R_{-i}(\mathsf{L})\,R^n_{-i}(\mathsf{L})\begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_{n+1}(t) \\ \psi'_{n+1} \end{pmatrix},$$

где

$$\varphi'_{n+1}(t) = \frac{1}{i}\int\limits_0^t e^{s-t}\cdot e^{-s}\sum_{k=1}^{n}\frac{s^{n-k}}{(n-k)!\,i^{n-k-1}}\,Q_+\,R^{k-1}_{-i}h_0\,ds + i\,e^{-t}\,Q_+\,R^n_{-i}\,h_0,$$

$$\psi'_{n+1} = R^{n+1}_{-i}\,h_0 = \psi_{n+1}.$$

Преобразуем $\varphi'_{n+1}(t)$:

$$\varphi'_{n+1}(t) = e^{-t}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^t \frac{s^{n-k}}{(n-k)!\; i^{n-k}}\, ds\, Q_+ R_{-i}^{k-1}\, h_0 \;+ i\, e^{-t}\, Q_+ R_{-i}^{n}\, h_0 =$$

$$= e^{-t}\sum_{k=1}^{n} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\; i^{n-k}}\, Q_+ R_{-i}^{k-1}\, h_0 \;+ i\, e^{-t} Q_+ R_{-i}^{n}\, h_0 =$$

$$= e^{-t}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\; i^{n-k}}\, Q_+ R_{-i}^{k-1}\, h_0 = \varphi_{n+1}.$$

Таким образом, формула (2.3) доказана.

Пусть $h_0 \in \operatorname{dom}(A)$, тогда для $n \geq 0$, получаем:

$$R_{-i}^{n+1}(\mathsf{L})\begin{pmatrix} 0 \\ (A+i\,I)\,h_0 \end{pmatrix} - R_{-i}^{n}(\mathsf{L})\begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi''_n(t) \\ \psi''_n \end{pmatrix},$$

где $\psi''_n = 0$,

$$\varphi''_n(t) = e^{-t}\left(\frac{t^n}{n!\; i^{n-1}}\, Q_+\,(A+i\,I)\,h_0 + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\; i^{n-k}}\, Q_+ R_{-i}^{k-2}\, h_0 - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!\; i^{n-k+1}}\, Q_+ R_{-i}^{k-1}\, h_0\right) = \frac{e^{-t}\, t^n}{n!\; i^{n-1}}\, Q_+\,(A+i\,I)\,h_0.$$

Приходим к выводу, что при каждом t:

$$\varphi''_n(t) \in \overline{Q_+\,(A+i\,I)\operatorname{dom}(A)} = \overline{Q_+\,\mathfrak{H}} = \mathfrak{Q}_+.$$

Так как пространство $\mathfrak{Q}_+$ сепарабельно, то множество вектор-функций вида $t^n\, e^{-t}\, h_0$, где $h_0 \in \mathfrak{Q}_+$, $\quad n \geq 0$, всюду плотно в $L_2(\mathbb{R}_+;\ \mathfrak{Q}_+)$.

Тогда $\mathfrak{D}_+ = \overline{\operatorname{span}_{n\geq 1}\{R_{-i}^{n}(\mathsf{L})\,\mathfrak{H}\}}$. □

Замечание. Если при построении дилатации положить $\mathfrak{D}_+ = L_2(\mathbb{R}_+;\ \mathfrak{Q}'_+)$ где $\mathfrak{Q}'_+ =\supset \mathfrak{Q}_+$, то полученная дилатация, как легко видеть, минимальной не будет.

3. J-самосопряженная дилатация

Рассмотрим пространства вектор-функций: $\mathfrak{D}_\pm{=}L_2(\mathbb{R}_\pm;\mathfrak{Q}_\pm)$.

Образуем гильбертово пространство $\mathbf{H} = \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+$ и построим в нем оператор S следующим образом: вектор $\mathsf{h} = \begin{pmatrix} h_-(t) \\ h_0 \\ h_+(t) \end{pmatrix}$, где $h_\pm(t) \in \mathfrak{D}_\pm$, $\quad h_0 \in \mathfrak{H}$, принадлежит $\operatorname{dom}(\mathsf{S})$ тогда и только тогда, когда

1) $h_\pm(t),\ \in W_2^1(\mathbb{R}_\pm;\mathfrak{Q}_\pm)$;

2) $\varphi = h_0 + Q_- h_-(0) \in \mathrm{dom}(A)$;

3) $h_+(0) = T^* h_-(0) + i J_+ Q_+ (A + iI)\varphi$, где $T^* = I + 2i R^*_{-i}$.

Если $\mathsf{h} \in \mathrm{dom}(\mathsf{S})$, то

$$\mathsf{S}\,\mathsf{h} = \mathsf{S}\begin{pmatrix} h_-(t) \\ h_0 \\ h_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_- h_-)(t) \\ -i h_0 + (A + iI)\varphi \\ (\mathcal{P}_+ h_+)(t) \end{pmatrix},$$

где $(\mathcal{P}_\pm h_\pm)(t) = i h'_\pm(t)$.

Оператор S является J-самосопряженной дилатацией оператора A [3].

Теорема 2. *Если подпространства $\mathfrak{Q}_\pm$ сепарабельны, то дилатация S является минимальной.*

Доказательство. В нашем случае $\lambda_0 = -i$, следовательно, надо доказать, что

$$\mathbf{H} = \overline{\mathrm{span}_{n\geq 0}\,\{R^n_{-i}(\mathsf{S})\mathfrak{H}, R^n_i(\mathsf{S})\mathfrak{H}\}}.$$

Для этого достаточно проверить, что

1) $\mathfrak{D}_+ = \overline{\mathrm{span}_{n\geq 1}\,\{R^n_{-i}(\mathsf{S})\mathfrak{H}\}}$;

2) $\mathfrak{D}_- = \overline{\mathrm{span}_{n\geq 1}\,\{R^n_i(\mathsf{S})\mathfrak{H}\}}$.

Непосредственными вычислениями можно проверить следующие два равенства (3.1) и (3.2):

$$R_{-i}(\mathsf{S})\begin{pmatrix} h_-(t) \\ h_0 \\ h_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((\mathcal{P}_- + iI)^{-1} h_-)(t) \\ R_{-i} h_0 - Q_- V_-(0) \\ ((\mathcal{P}_0 + iI)^{-1} h_+)(t) + e^{-t} V_+(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_-(t) \\ V_0 \\ V_+(t) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где

$$((\mathcal{P}_0 + iI)^{-1} h_+)(t) = \frac{1}{i}\int_0^t e^{s-t} h_+(s)\,ds, \quad ((\mathcal{P}_- + iI)^{-1} h_-)(t) = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^t e^{s-t} h_-(s)\,ds,$$

$$V_-(0) = \left[(\mathcal{P}_- + iI)^{-1} h_-(t)\right]_{t=0}, \quad V_+(0) = T^* V_-(0) + i J_+ Q_+ h_0.$$

$$R_i(\mathsf{S})\begin{pmatrix} h_-(t) \\ h_0 \\ h_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((\mathcal{P}_{-0} - iI)^{-1} h_-)(t) + e^t U_-(0) \\ R^*_{-i} h_0 - Q_+ U_+(0) \\ ((\mathcal{P}_+ - iI)^{-1} h_+)(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_-(t) \\ U_0 \\ U_+(t) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где

$$((\mathcal{P}_{-0} - iI)^{-1} h_-)(t) = \frac{1}{i}\int_t^0 e^{t-s} h_-(s)\,ds, \quad ((\mathcal{P}_+ - iI)^{-1} h_+)(t) = \frac{1}{i}\int_t^\infty e^{t-s} h_+(s)\,ds,$$

$$U_+(0) = \left[((\mathcal{P}_+ - i\,I)^{-1}\,h_+)(t)\right]_{t=0}, \qquad \mathcal{P}_{-0} = \mathcal{P}_-|_{M_-},$$
$$M_- = \{h_- \in \mathrm{dom}(\mathcal{P}_-) | \quad h_-(0) = 0\}, \quad U_-(0) = T\,U_+(0) - i\,J_-Q_-\,h_0,$$

Из (3.1) следует, что:

$$R_{-i}(\mathsf{S}) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ h_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_{-i}\,h_0 \\ ((\mathcal{P}_0 + i\,I)^{-1}\,h_+)(t) + i\,e^{-t}\,J_+Q_+\,h_0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $h_0 \in \mathrm{dom}(A)$, тогда для $n \geq 0$, получаем

$$R_{-i}^{n+1}(\mathsf{S}) \begin{pmatrix} 0 \\ (A + i\,I)\,h_0 \\ 0 \end{pmatrix} - R_{-i}^{n}(\mathsf{S}) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_n''(t) \end{pmatrix},$$

где

$$\omega_n''(t) = e^{-t} \left(\sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\; i^{n-k}}\, J_+Q_+\,R_{-i}^{k-2}\,h_0 + \frac{t^n}{n! i^{n-1}} J_+Q_+(A + i\,I)h_0 - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!\; i^{n-k-1}}\, J_+Q_+\,R_{-i}^{k-1}\,h_0 \right) = \frac{e^{-t}t^n}{n! i^{n-1}} J_+Q_+(A + i\,I)h_0.$$

Так как $\overline{J_+Q_+\,(A + i\,I)\,\mathrm{dom}(A)} = \overline{Q_+J_+\,\mathfrak{H}} = \mathfrak{Q}_+$, то в силу сепарабельности пространства $\mathfrak{Q}_+$, множество вектор-функций вида: $t^n\,e^{-t}\,h_0$, где $h_0 \in \mathfrak{Q}_+, n \geq 0$, всюду плотно в $L_2(\mathbb{R}_+;\; \mathfrak{Q}_+)$.

Докажем (3.2). Для этого надо обосновать формулу:

$$R_{i}^{n}(\mathsf{S}) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n(t) \\ g_n \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где $g_n = R_{-i}^{*^n}\,h_0, \quad f_n(t) = e^t \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!\;(-i)^{n-k-1}}\, J_-Q_-\,R_{-i}^{*^{k-1}}\,h_0$. Доказательство аналогично.

Пусть $h_0 \in \mathrm{dom}(A^*)$, тогда для $n \geq 0$ получаем:

$$R_{i}^{n+1}(\mathsf{S}) \begin{pmatrix} 0 \\ (A^* - i\,I)\,h_0 \\ 0 \end{pmatrix} - R_{i}^{n}(\mathsf{S}) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n''(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$f_n''(t) = e^{t} \left(\sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\;(-i)^{n-k}}\, J_-Q_-\,R_{-i}^{*^{k-2}}\,h_0 + \frac{t^n\,e^t}{n!\;(-i)^{n-1}}\, J_-Q_-\,(A^* - i\,I)\,h_0 - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!\;(-i)^{n-k-1}}\, J_-Q_-\,R_{-i}^{*^{k-1}}\,h_0 \right) = \frac{t^n\,e^t}{n!\;(-i)^{n-1}}\, J_-Q_-\,(A^* - i\,I)\,h_0.$$

Так как $\overline{J_-Q_-\,(A^* - i\,I)\,\mathrm{dom}(A^*)} = \overline{Q_-J_-\,\mathfrak{H}} = \mathfrak{Q}_-$, то в силу сепарабельности пространства $\mathfrak{Q}_-$, множество вектор-функций вида: $t^n\,e^t\,h_0$, где $h_0 \in \mathfrak{Q}_-$, $n \geq 0$, всюду плотно в $L_2\,(\mathbb{R}_-;\; \mathfrak{Q}_-)$. □

4. Заключение

В статье впервые доказана минимальность J-симметрической и J–самосопряженной дилатаций произвольного линейного оператора с непустым множеством регулярных точек при условии, что при построении дилатации дефектные подпространства $\mathfrak{Q}_+$ и $\mathfrak{Q}_-$ являются сепарабельными. Понятие минимальности позволяет решать ряд важных задач: построение функциональной модели оператора и изучение структуры пространства дилатации и др.

Список цитируемых источников

1. *Золотарев В. А.* Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. // Харьков: ХНУ, — 2003. — 342 с.
2. *Кудряшов Ю. Л.* Минимальность σ — симметрической дилатации операторного узла. // Ученые записки ТНУ им. В. И. Вернадского. — 2012. — Т. 25(64) №2. — С. 84–88.
3. *Кудряшов Ю. Л.* J-эрмитовы и J-самосопряженные дилатации линейных операторов. // Динамические системы, — 1984. — № 3 — С. 94–98.
4. *Кужель А. В., Кудряшов Ю. Л.* Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов. // ДАН СССР. — 1980. — Т. 253 №4. — С. 812–815.
5. *Кудряшов Ю. Л.* Минимальность самосопряжённой дилатации диссипативного оператора. // Динамические системы. — 2014. — № 3. — с. 94-98.
6. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. // М.: Мир, – 1970. – 431 с.

Получена 04.06.2015