Динамические системы, 2015, том 5(33), №1-2, 43–49

УДК 517.938

О типах ячеек Ω-устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях[1]

В. Е. Круглов*, Т. М. Митрякова*, О. В. Починка**
*Нижегородский Государственный Университет имени Н.И. Лобачевского,
603950, Нижний Новгород.
**Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики
603155, Нижний Новгород.
E-mail: KruglovSlava21@mail.ru, tatiana.mitryakova@yandex.ru, olga-pochinka@yandex.ru

Аннотация. В классических работах А. А. Андронова, Л. С. Понтрягина, Е. А. Леонтович, А. Г. Майера, М. Пейшото (M. Peixoto) топологическая классификация потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях следовала из канонического описания динамики в областях (ячейках), на которые эти траектории делят несущее многообразие. В настоящей работе описаны все допустимые ячейки для класса Ω-устойчивых потоков без периодических траекторий на ориентируемых поверхностях. Полученное описание позволяет представить динамику рассматриваемых потоков комбинаторным образом.

Ключевые слова: поток, Ω-устойчивость, ячейка

1. Введение и формулировка результатов

Традиционный подход к качественному изучению динамики потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях состоит в выделении на несущем многообразии областей с предсказуемым поведением траекторий — *ячеек*. Такой взгляд на непрерывные динамические системы восходит к классической работе А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1] 1937 года, в которой они рассмотрели систему дифференциальных уравнений $\dot{x} = v(x)$, где $v(x)$ — C^1-векторное поле, заданное в круге на плоскости, граница которого является кривой без контакта, и нашли критерий грубости этой системы.

В работах Е. А. Леонтович-Андроновой и А. Г. Майера [4], [5] рассматривался более общий класс динамических систем и их классификация также была основана на идеях о выделении множества специальных траекторий, относительное положение которых (*схема Леонтович-Майера*) полностью определяет качественную структуру разбиения фазового пространства динамической системы на траектории. Основной трудностью в обобщении этого результата на случай произвольных ориентируемых поверхностей положительного рода является возможность нового типа движения – незамкнутая рекуррентная траектория. Отсутствие таких траекторий для грубых потоков без особенностей на 2-торе была доказана А.Г. Майером [6] в 1939 году. В 1971 М. Пейшото в работе [10] обобщил схему Леонтович-Майера для структурно устойчивых потоков на произвольных поверхностях и получил топологическую классификацию таких потоков, опять-таки изучив все допустимые ячейки для них. В 1976 году Д. Нейманом и Т. О'Брайеном [7] на произвольных поверхностях были рассмотрены, так называемые *регулярные потоки* —

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения»), Российского фонда научных исследований (гранты N 13-01-12452 офи-м и 15-01-03689-а) и Российского Научного фонда (грант 14-41-00044).

потоки без нетривиальных периодических траекторий, которые включают в себя описанные выше потоки как частный случай. Они ввели полный топологический инвариант для регулярных потоков — *орбитальный комплекс*, который представляет из себя пространство орбит потока, оснащенное некоторой дополнительной информацией.

В настоящей работе описываются все допустимые ячейки для класса G, состоящего из Ω-устойчивых потоков без периодических траекторий на ориентируемых поверхностях. Класс G входит в множество регулярных потоков, рассмотренных в [7], однако подход к топологической классификации таких потоков со стороны ячеек позволит в дальнейшем описать их динамику комбинаторным образом, подобно [3], и решить для них проблему реализации, подобно [8]. Более детально.

Пусть S — *ориентируемая поверхность*, т.е. сфера с ручками или без (см. Рис. 1). *Гладким потоком* на поверхности S называется гладкое отображение $f : S \times \mathbb{R} \to S$ с групповыми свойствами:

1) $f(x, 0) = x \ \forall x \in S$;

2) $f(f(x,t), s) = f(x, t+s) \ \forall x \in S, \forall s, t \in \mathbb{R}$.

В дальнейшем будем полагать, что $f^t(x) = f(x,t)$ при $x \in S$, $t \in \mathbb{R}$.

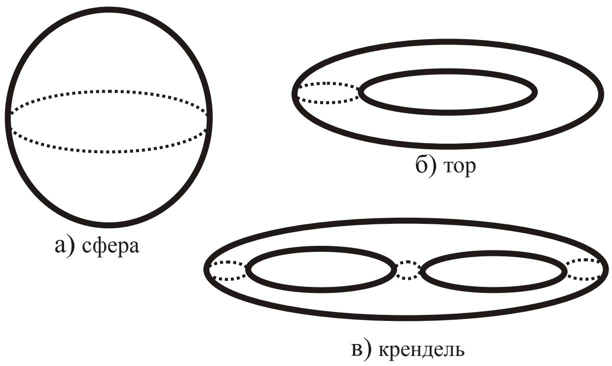

Рис. 1. Примеры поверхности S

Траекторией или *орбитой* точки $x \in S$ называется множество $O_x = \{f^t, t \in \mathbb{R}\}$. Полагают, что траектории потока ориентированы в соответствии с возрастанием параметра t. Точка x называется *неподвижной точкой* или *состоянием равновесия*, если $O_x = \{x\}$. Точка $x \in S$ называется *блуждающей точкой* потока f^t, если существует окрытая окрестность U_x точки x такая, что $f^t(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $t > 1$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*. Множество всех блуждающих (неблуждающих) точек потока f^t называется его *блуждающим множеством* (*неблуждающим множеством*). Неблуждающее множество потока f^t обозначается Ω_{f^t}. Неподвижная точка x потока f^t называется *гиперболической*, если собственные значения линеаризации потока в окрестности точки x не имеют нулевых действительных частей.

Пусть d — метрика на S. Тогда гиперболичность неподвижной точки x влечет существование у нее *устойчивого* и *неустойчивого многообразий*, определяемых следующим образом:

$$W_x^s = \{y \in S : d(x, f^t(y)) \to 0 \text{ при } t \to +\infty\},$$
$$W_x^u = \{y \in S : d(x, f^t(y)) \to 0 \text{ при } t \to -\infty\}.$$

Устойчивой (*неустойчивой*) *сепаратрисой* неподвижной точки x называется компонента связности l_x^s (l_x^u) множества $W_x^s \setminus \{x\}$ ($W_x^u \setminus \{x\}$).

Поток f^t называется *Ω-устойчивым*, если существует окрестность $U(f^t)$ в $C^1(S \times \mathbb{R}, S)$ такая, что если $f'^t \in U(f^t)$, то $f^t|_{\Omega_{f^t}}$ и $f'^t|_{\Omega_{f'^t}}$ топологически эквивалентны посредством гомеоморфизма несущего многообразия.

Из критерия Ω-устойчивости [11] следует, что потоки класса G имеют неблуждающее множество, состоящее из конечного числа гиперболических неподвижных точек и не имеют *циклов*, то есть наборов неподвижных точек $x_1, \dots, x_k, x_{k+1} = x_1$ со свойством

$$W_{x_i}^s \cap W_{x_{i+1}}^u \neq \emptyset, \; i = 1, \dots, k.$$

При этом в классе G системы могут быть как структурно устойчивыми, так и нет, а определяется это отсутствием или наличием *связок* — сепаратрис, идущих из седла в седло. Условие Ω-устойчивости влечет тот факт, что связки потока из класса G не образуют замкнутых кривых.

Простейшим примером структурно устойчивой системы из класса G служит поток на сфере, имеющий четыре неподвижные точки: источник α, седло σ и два стока ω_1 и ω_2 (см. Рис. 2).

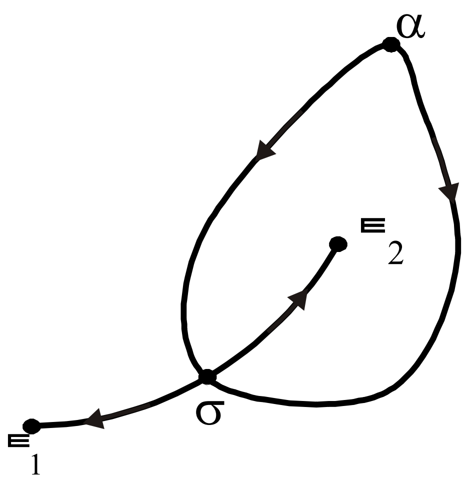

Рис. 2. Простейший пример структурно устойчивого потока из класа G

В качестве простейшего примера потока, не являющегося структурно устойчивым, можно привести поток, имеющий шесть неподвижных точек: источники α_1, α_2, стоки ω_1, ω_2 и седла σ_1, σ_2 такие, что неустойчивая сепаратриса σ_1 совпадает с устойчивой сепаратрисой σ_2 (см. Рис. 3).

Обозначим через $\Omega^0_{f^t}$, $\Omega^1_{f^t}, \Omega^2_{f^t}$ множество всех стоков, сёдел и источников потока f^t, соответственно. Положим

$$\tilde{S} = S \setminus (\Omega^0_{f^t} \cup W^s_{\Omega^1_{f^t}} \cup W^u_{\Omega^1_{f^t}} \cup \Omega^2_{f^t}).$$

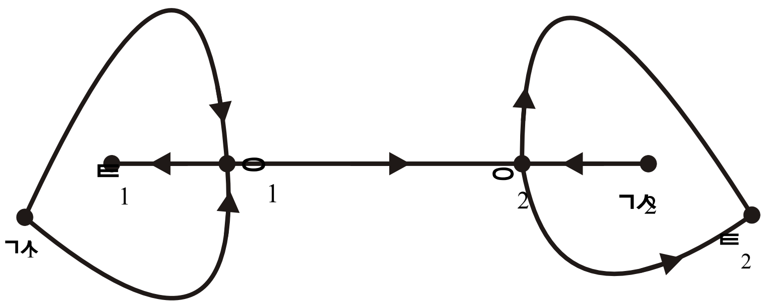

Рис. 3. Простейший пример потока из класса G, не являющегося структурно устойчивым

Компонента связности множества $\tilde{S}$ называется *ячейкой*. Если множество $\Omega^1_{f^t}$ пусто, то поток f^t имеет в точности две неподвижные точки: источник и сток, и одну ячейку, замыкание которой совпадает со всем несущим многообразием, которое в этом случае является сферой. Поэтому везде далее мы будем предполагать, что поток f^t имеет хотя бы одну седловую точку.

Основным результатом настоящей работы являются следующая теорема:

Теорема. *Пусть $f^t \in G$ и J — ячейка потока f^t. Тогда*

1) *J гомеоморфна открытому диску;*

2) *граница ячейки J состоит из замыканий сепаратрис седловых точек;*

3) *$cl\ J$ имеет один из типов, изображённых на рисунке 4, где α — источник; ω — сток; σ и ρ с различными индексами — седла; при этом σ_1^+ может совпадать с σ_1^-; множества $\mathcal{P}^- = \{\rho_1^-, \ldots, \rho_i^-, \ldots, \rho_n^-\}$, $\mathcal{P}^+ = \{\rho_1^+, \ldots, \rho_j^+, \ldots, \rho_m^+\}$ могут быть пересекающимися и каждое из них может быть пустым; сепаратрисы, содержащие сток ω (источник α) в своем замыкании не могут совпадать.*

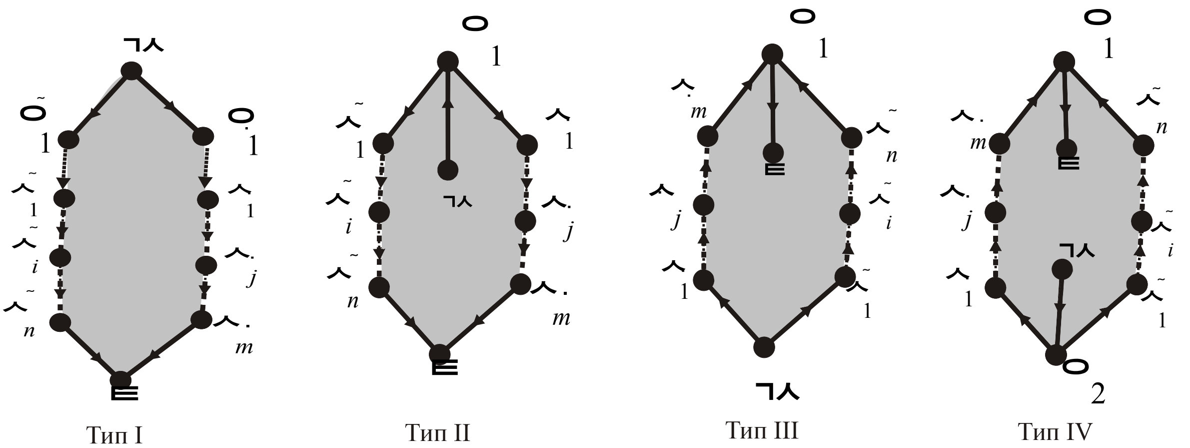

Рис. 4. Типы ячеек потоков из класса G

Так поток на рисунке 2 имеет ячейки типов I и III, а на рисунке 3 — типов I, II и III.

2. Вспомогательные факты

Пусть $f^t : S \to S$ поток из класса G. В этом разделе мы сформулируем необходимые для доказательства основной теоремы факты. Их доказательства следуют из аналогичных фактов для дискретных динамических систем, доказанных в [2].

Предложение 1. Пусть $f^t \in G$. Тогда

1) $S = \bigcup\limits_{p\in\Omega_{f^t}} W^u_p = \bigcup\limits_{p\in\Omega_{f^t}} W^s_p$;

2) W^u_p (W^s_p) является гладким подмногообразием многообразия S, диффеоморфным $\mathbb{R}^i$ ($\mathbb{R}^{2-i}$) для любой неподвижной точки $p \in \Omega^i_{f^t}$;

Предложение 2. Пусть поток $f^t \in G$. Тогда для любого источника α (стока ω) потока f^t существует хотя бы одна устойчивая (неустойчивая) сепаратриса l^s_σ (l^u_σ) седловой точки σ такая, что $cl(l^s_\sigma)\backslash(l^s_\sigma) = \{\sigma, \alpha\}$ ($cl(l^u_\sigma)\backslash(l^u_\sigma) = \{\sigma, \omega\}$).

3. Разбиение несущей поверхности на ячейки

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма. *Пусть $f^t \in G$. Тогда*

(i) Для $p \in \Omega^0_{f^t}$ выполняется $cl(l^u_p) = \{p\}$;

(ii) Для $p \in \Omega^1_{f^t}$ выполняется

$$cl(l^u_p)\backslash(l^u_p \cup \{p\}) = \begin{cases} \sigma \in \Omega^1_{f^t} \ \text{и}\ l^u_p = l^s_\sigma, \\ \omega \in \Omega^0_{f^t} \ \text{и}\ l^u_p \subset W^s_\omega; \end{cases}$$

(iii) Для $p \in \Omega^2_{f^t}$ выполняется $cl(l^u_p)\backslash(l^u_p \cup \{p\}) = \bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_p} cl(l^u_\sigma)$, где Ω_p непустое подмножество множества $\Omega^1_{f^t}$.

Доказательство. Докажем (i). В случае, когда p — сток, выполняется $W^u_p = \{p\}$, следовательно, $cl(l^u_p) = \{p\}$.

Рассмотрим случай (ii): p — седловая точка. Пусть $x \in cl(l^u_p)$. По пункту 1) Предложения 1 любая точка l^u_p является точкой W^s_r для некоторой неподвижной точки r. Для r возможны три варианта: а) r — сток; б) r — седло; в) r — источник.

а) Рассмотрим сток $r = \omega$, такой что $x \in W^s_\omega$. Поскольку ω — сток и $l^u_p = \mathcal{O}_x$, то $l^u_p \subset W^s_\omega$. Таким образом $cl(l^u_p)\backslash(l^u_p \cup \{p\}) = \{\omega\}$.

б) Рассмотрим седловую точку $r = \sigma$, для которой выполняется $x \in W^s_\sigma$. В этом случае $l^u_p = l^s_\sigma$. Таким образом $cl(l^u_p)\backslash(l^u_p \cup \{p\}) = \{\sigma\}$.

в) Допустим, что существует источник $r = \alpha$ такой, что $x \in W^s_\alpha$. Поскольку $W^s_\alpha = \{\alpha\}$, получаем $\alpha \in l^u_p$, что невозможно, поскольку l^u_p состоит из блуждающих точек. Следовательно, случай в) невозможен.

Рассмотрим случай (iii): $p = \alpha$ — источник.

Из пункта 1) Предложения 1 следует, что множество

$$A = cl(l^u_\alpha)\backslash(l^u_\alpha \cup \{\alpha\})$$

есть f^t-инвариантное подмножество множества $W^u_{\Omega^1_{f^t}} \cup \Omega^0_{f^t}$. Тогда для доказательства утверждения достаточно показать, что

а) если $\sigma \in A$ для некоторого $\sigma \in \Omega^1_{f^t}$, то $l^u_\sigma \subset A$;

б) если $\omega \in A$ для некоторого $\omega \in \Omega^0_{f^t}$, то существует $\sigma \in \Omega^1_{f^t}$ такое, что $\omega \in cl(l^u_\sigma)$ и $l^u_\sigma \subset A$.

В случае а), поскольку $\sigma \in A$, то существует последовательность $x_n \in l^u_\alpha$ такая, что $x_n \to \sigma$ для $n \to +\infty$. Тогда $\mathcal{O}_{x_n} \subset l^u_\alpha$ и, в силу эквивалентности потока в окрестности гиперболической седловой точки его линейной части (см., например, [9]), множество $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{x_n}$ содержит в своем замыкании l^u_σ.

В случае б), если $\omega \in A$, то существует последовательность $x_n \in l^u_\alpha$ такая, что $x_n \to \omega$ для $n \to +\infty$. Согласно Предложению 2, существует конечное число седловых точек $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \Omega^1_{f^t}$ такое, что $\omega \in cl(l^u_{\sigma_i})$ для $i = 1, \dots, k$. Тогда среди них существуют седловые точки $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}$ (возможно совпадающие) такие, что последовательность x_n принадлежит компоненте связности D множества $W^s_\omega \setminus (\omega \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k} l^u_{\sigma_i})$. Откуда следует, что $D \subset l^u_\alpha$. Таким образом, $l^u_{\sigma_{i_1}} \subset A$ и $l^u_{\sigma_{i_2}} \subset A$. □

Аналогичную лемму можно доказать для устойчивых сепаратрис.

4. Доказательство теоремы

Покажем, что любая ячейка потока из класса G имеет один из типов, изображённых на рисунке 4.

Доказательство. В силу предложения 1,

$$\tilde{S} = (\bigcup_{\alpha\in\Omega^2_{f^t}} l^u_\alpha) \setminus (\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_{f^t}} l^s_\sigma).$$

Тогда любая компонента связности D множества $\tilde{S}$ является компонентой связности множества $l^u_\alpha \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{k} l^s_{\sigma_i})$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \Omega^1_{f^t}$ седловые точки такие, что $\alpha \in cl(l^s_{\sigma_i})$ для $i = 1, \dots, k$. Таким образом, любая ячейка $cl(D)$ содержит в своем замыкании единственный источник α, устойчивые седловые сепаратрисы $l^s_{\sigma_{i_1}}, l^s_{\sigma_{i_2}} \subset l^u_\alpha$ (возможно совпадающие) и, в силу доказанной выше леммы, конечное (возможно нулевое) число связок.

Аналогично, поскольку

$$\tilde{S} = (\bigcup_{\omega\in\Omega^0_{f^t}} l^s_\omega) \setminus (\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_{f^t}} l^u_\sigma),$$

то любая ячейка $cl(D)$ содержит в своем замыкании единственный сток ω, неустойчивые седловые сепаратрисы $l^u_{\sigma_{j_1}}, l^u_{\sigma_{j_2}} \subset l^s_\omega$ (возможно совпадающие) и конечное(возможно нулевое) число связок.

Перебирая все возможные наборы сепаратрис в границе ячейки, получаем все типы ячеек, изображённые на рисунке 4. □

Список цитируемых источников

1. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы // Доклады Академии наук СССР. — 1937. — Т.14(5). — С. 247-250.

   Andronov A.A., Pontryagin L.S. Rough systems // Doklady Akademii Nauk. — 1937, Vol.14(5). — P. 247-250.
2. *Гринес В.З., Починка О.В.* Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях // Успехи математических наук. — 2013. — Т.68:1(409). — С. 129-188

   Grines V.Z., Pochinka O.V. Morse-Smale cascades on 3-manifolds // Russian Mathematical Surveys. — 2013. — Т.68:1(409). — P. 117-174.
3. *Починка О. В., Круглов В. Е.* Многоцветный граф как полный топологический инвариант потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях // Журнал Средневолжского математического общества. — 2015. — Т.17, N 1. — С. 65-71.

   Pochinka O.V., Kruglov V.E. Multi-color graph as a complete topological invariants of flows with finite number of singular trajectories on surfaces // Zhurnal srednevolzhskogo mathematicheskogo obschestva. — 2015. — Vol.17, no 1. — P.65-71.
4. *Леонтович Е.А., Майер А.Г.* О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории// Докл. Акад. АН СССР. — 1937. — Т.14 (5). —С.251-257

   Leontovich E.A., Mayer A.G. On trajectories defining the qualitative structure of decomposition of the sphere into trajectories // Doklady Akademii Nauk. — 1937. — Vol.14 (5). — P. 251-257.
5. *Леонтович Е.А., Майер А.Г.* О схеме, определяющей топологическую структуры разбиения на траектории // Докл. Акад. АН СССР. — 1955. — Т.103 (4). — С. 557-560

   Leontovich E.A., Mayer A.G. On the scheme defining the topological structure of the partition on the trajectory // Doklady Akademii Nauk. — 1955. — Vol.103 (4). — P. 557-560.
6. *Майер А.Г.* Грубые преобразования окружности в окружность // Уч. Зап. ГГУ. — 1939. — Т.12. — С. 215-229

   Mayer A.G. A rough transformation of a circle into a circle // Uch. Zap. Gor'kovskogo Univ. — 1939. — Vol.12. — P. 215-229
7. *Neumann D. and O'Brien T.* Global structure of continuous flows on 2-manifolds // J. Diff. Eq. — 1976. — Vol.22, no 1. — P.89-110.
8. *Ошемков А.А., Шарко В.В.* О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Матем. сб. — 1998. — Т.189:8. — С. 93-140.

   Oshemkov A.A., Sharko V.V. Classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds // Mat.Sb. — 1998. — Vol.189:8. — P. 93-140.
9. *Палис Ж., Де Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. — Пер. с англ. — Мир, 1998. — 301 с.

   Palis J., De Melo W. Geometric theory of dynamical systems. New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1982.
10. *Peixoto M.* On the classification of flows on two-manifolds // Dynamical systems / Proc. Symp. held at the Univ.of Bahia, Salvador-Bahia, Brasil. 1971. M. Peixoto (ed.) N.Y. London: Acad. press. — 1973. — P. 389-419.
11. *Pugh C., Shub M.* Ω-stability for flows // Inven. Math. — 1970. —Vol.11. — P. 150-158.

Получена 25.06.2015