Динамические системы, 2015, том 5(33), №1-2, 25–30

УДК 517.938

О градиентно-подобных потоках на локально-тривиальных расслоениях[1]

Е. Я. Гуревич[*], С. Х. Зинина[**]

[*]Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, 603155, Нижний Новгород, *E-mail: egurevich@hse.ru*

[**]Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, 430005, Саранск, *E-mail: kapkaevasvetlana@yandex.ru*

Аннотация. В работе получена топологическая классификация трехмерных многообразий, допускающих градиентно-подобные потоки, неблуждающее множество которых принадлежит притягивающим и отталкивающим инвариантным замкнутым поверхностям. Показано, что такие многообразия являются локально-тривиальными расслоениями над окружностью (то есть фактор-пространствами прямого произведения поверхности $\mathbb{S}_g$ на отрезок $[0,1]$ по отношению эквивалентности $(z,1) \sim (\tau, 0)$, где $\tau\colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ — некоторый гомеоморфизм). Получены достаточные условия, при выполнении которых склеивающий гомеоморфизм τ изотопен периодическому гомеоморфизму.

Ключевые слова: структурно-устойчивые динамические системы, градиентно-подобный поток, локально-тривиальное расслоение над окружностью.

1. Введение

Напомним, что гладкий поток f^t на связном замкнутом многообразии M^n размерности $n \geq 1$ называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество Ω_{f^t} конечно и состоит только из гиперболических состояний равновесия, и для любых различных седловых состояний равновесия $p, q \in \Omega_{f^t}$ инвариантные многообразия W^s_p, W^u_q пересекаются трансверсально. Непустое пересечение $W^s_p \cap W^u_q$, где p, q — различные седловые точки потока f^t, называется *гетероклиническим*, при этом в случае $\dim(W^s_p \cap W^u_q) = 1$ компонента связности пересечения $W^s_p \cap W^u_q$ называется *гетероклинической траекторией*.

Градиентно-подобные потоки занимают особое место среди структурно-устойчивых потоков. Во-первых, относительно простая структура множества особых траекторий позволяет получить законченные результаты по топологической классификации таких систем. Эта задача, помимо чисто математической привлекательности, имеет и прикладное значение, так как градиентно-подобные потоки моделируют детерминированные процессы в естественных и социальных науках. Во-вторых, градиентно-подобные потоки обнаруживают замечательную связь между динамикой и топологией несущего многообразия, что позволяет в ряде случаев получить относительно простой метод различения самих многообразий.

С. Смейл (S. Smale) в работе [6] (Theorem A) показал, что градиентный поток функции Морса на произвольном многообразии M^n (оснащеннном римановой метрикой) может быть сколь угодно близко аппроксимирован (в C^1-топологии) градиентно-подобным потоком, что доказывает существование таких потоков на любом многообразии.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 15-31-50394 мол_нр).

В работе [2] получены достаточные условия, при выполнении которых несущее ориентируемое трехмерное многообразие диффеоморфизма Морса-Смейла является локально-тривиальным расслоением над окружностью (что означает наличие по крайней мере одной циклической фазовой переменной), и продемонстрировано приложение этого результата для решения проблемы о существовании сепараторов (гетероклинических траекторий) в магнитном поле плазмы. В настоящей работе этот результат используется для топологической классификации трехмерных многообразий, допускающих градиентно-подобные потоки, неблуждающее множество которых принадлежит притягивающим и отталкивающим инвариантным замкнутым поверхностям. Для точной формулировки результатов приведем несколько определений.

Пусть $\mathbb{S}_g$ — ориентируемая поверхность (замкнутое двумерное многообразие) рода g, $\tau\colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм (гомеоморфизм склейки). Обозначим через $M^3_{g,\tau}$ пространство орбит действия группы $\Gamma = \{\gamma^i, i \in \mathbb{Z}\}$, порожденной степенями гомеоморфизма $\gamma\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, определенного формулой $\gamma(z,r) = (\tau(z), r-1)$ и через $p_{g,\tau}\colon S^2_g \times \mathbb{R} \to M^3_{g,\tau}$ естественную проекцию. Естественная проекция индуцирует на $M^3_{g,\tau}$ структуру топологического многообразия. В силу классических результатов любое компактное трехмерное топологическое многообразие допускает гладкую структуру, причем единственную, поэтому в дальнейшем будем предполагать многообразие $M^3_{g,\tau}$ гладким.

Пусть $f^t\colon M^3 \to M^3$ — градиентно-подобный поток на связном замкнутом ориентируемом гладком многообразии M^3. Обозначим через $\Omega^i_{f^t}$ множество всех его состояний равновесия, размерность неустойчивого многообразия которых равна $i \in \{0,1,2,3\}$, и положим $\Sigma_{f^t} = \Omega^1_{f^t} \cup \Omega^2_{f^t}$.

Будем говорить, что поток f^t принадлежит классу $G(M^3)$, если множество Σ_{f^t} представляется в виде дизъюнктного объединения двух подмножеств Σ_a, Σ_r таких, что каждая компонента связности множеств $\mathcal{A} = W^u_{\Sigma_a} \cup \Omega^0_{f^t}$, $\mathcal{R} = W^s_{\Sigma_r} \cup \Omega^3_{f^t}$ является ручно вложенной ориентируемой поверхностью[2].

Применив утверждение теоремы из работы [2] к сдвигу на единицу времени вдоль траекторий потока $f^t \in G(M^3)$, получим следующий результат.

Предложение. Если поток f^t принадлежит классу $G(M^3)$, то существует число g и сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\tau\colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ такой, что M^3 диффеоморфно многообразию $M^3_{g,\tau}$.

В разделе 3 мы показываем, что поток $f^t \in G(M^3)$ накрывается потоком F^t на $\mathbb{S}_g \times \mathbb{R}$ таким, что $F^t(\mathbb{S}_g \times i) = \mathbb{S}_g \times i$ для любого $i \in \mathbb{Z}$, ограничение потока F^t на множество $\mathbb{S}_g \times i$ задается формулой $F^t|_{\mathbb{S}_g \times i}(z,i) = (F^t_i(z), i)$, где $z \in \mathbb{S}_g$, и потоки F^t_i, F^t_j топологически сопряжены[3] для всех $i,j \in \mathbb{Z}$.

Будем говорить, что поток f^t принадлежит классу $G^*(M^3)$, если потоки F^t_0 и F^t_1 топологически сопряжены посредством изотопного тождественному гомеоморфизма.

Классу $G^*(M^3)$, например, принадежат потоки, являющиеся *локально прямыми произведениями* градиентно-подобных потоков, описываемые следующей конструкцией.

[2]Поверхность $N \subset M^3$ называется ручно вложенной, если для любой точки $x \in N$ существует окрестность $U_x \subset M^3$ и гомеоморфизм $h_x : U_x \to \mathbb{R}^3$ такие, что $h_x(N \cap U_x) = Oxy$.

[3]Потоки f^t, f'^t на многообразии M называются топологически сопряженными, если существует гомеоморфизм $h\colon M \to M$ такой, что для любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение $f'^t = hf^th^{-1}$.

Пусть $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ — окружность, $\varphi_1^t\colon \mathbb{S}_g^2 \to \mathbb{S}_g^2$, $\varphi_2^t\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ — градиентно-подобные потоки, $\widetilde{\varphi}_2^t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — поднятие потока φ_2^t. Определим поток Φ^t на $\mathbb{S}_g \times \mathbb{R}$ формулой $\Phi^t(z,r) = (\varphi_1^t(z), \tilde{\varphi}_2^t(r))$, $z \in \mathbb{S}_g, r \in \mathbb{R}$. Если $\tau\colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, такой, что для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}$ либо $\varphi_1^t\tau = \tau\varphi_1^t$, либо $\varphi_1^t\tau = \tau^{-1}\varphi_1^t$, то формула $\phi^t = p_{g,\tau}\Phi^t p_{g,\tau}^{-1}$ корректно определяет поток $\phi^t\colon M_{g,\tau}^3 \to M_{g,\tau}^3$, называемый локально-прямым произведением потоков φ_1^t, φ_2^t.

В настоящей работе уточняется изотопический класс гомеоморфизма склейки, что решает вопрос топологической классификации многообразий, допускающих потоки из класса $G^*(M^3)$, в силу следующей классической леммы.

Лемма. *Пусть гомеоморфизмы $\tau\colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g, \tau'\colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ изотопны. Тогда $M_{g,\tau}^3, M_{g,\tau'}^3$ диффеоморфны.*

Напомним, что, согласно классификации Нильсена и Терстона (J. Nielsen, W. Thurston, см. [4],[7]), множество всех изотопических классов отображений $\tau\colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ представляется как объединение четырех непересекающихся подмножеств T_1, T_2, T_3, T_4 со следующими свойствами.

1. если гомотопический класс $\{\tau\}$ отображения τ принадлежит подмножеству T_1, то $\{\tau\}$ содержит периодический гомеоморфизм;
2. если $\{\tau\} \in T_2$, то $\{\tau\}$ содержит приводимый непериодический гомеоморфизм алгебраически конечного типа;
3. если $\{\tau\} \in T_3$, то $\{\tau\}$ содержит приводимый гомеоморфизм, не являющийся гомеоморфизмом алгебраически конечного типа;
4. если $\{\tau\} \in T_4$, то $\{\tau\}$ содержит псевдоаносовский гомеоморфизм.

Гомеоморфизм $\tau\colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ называется периодическим, если существует $r > 0$ такое, что $\tau^r(x) = x$ для любой точки $x \in \mathbb{S}_g$. Определения остальных гомеоморфизмов, упомянутых в перечислении 1-4, имеется, например, в обзоре [1]. Топологическая классификация периодических гомеомофизмов поверхностей получена Нильсеном в [5].

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1. *Если $f^t \in G^*(M_{g,\tau}^3)$, то $\tau \in T_1$.*

В основе доказательства теоремы 1 лежит теорема 2 (теорема о централизаторе[4]), доказываемая в разделе 2.

Напомним, что диффеоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа периодических гиперболических точек и инвариантные многообразия различных седловых периодических точек пересекаются трансверсально. Диффеоморфизм Морса-Смейла $f\colon M^n \to M^n$ называется *градиентно-подобным*, если из условия $W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset$ для различных точек $p, q \in \Omega_f$ следует $\dim\ W_p^u < dim\ W_q^u$. В случае $n = 2$ последнее условие означает, что диффеоморфизм $f\colon M^2 \to M^2$ Морса-Смейла является градиентно-подобным тогда и только тогда, когда инвариантные многообразия различных седловых точек не пересекаются.

[4]Централизатором гомеоморфизма $f\colon M \to M$ называется множество всех гомеоморфизмов $\tau\colon M \to M$ таких, что $f\tau = \tau f$.

Теорема 2. *Пусть $\varphi\colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ — градиентно-подобный диффеоморфизм и $\tau\colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм такой, что $\varphi\tau = \tau\varphi$. Тогда $\tau \in T_1$.*

2. Доказательство теоремы о централизаторе

Пусть $\varphi\colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ — градиентно-подобный диффеоморфизм. Обозначим через Ω^i_φ множество всех периодических точек, размерность неустойчивого многообразия которых равна i, $i \in \{0,1,2\}$, положим $A_\varphi = W^s_{\Omega^1_\varphi} \cup \Omega^0_\varphi$ и $B_\varphi = \mathbb{S}_g \setminus A_\varphi$.

Из условия $\varphi\tau = \tau\varphi$ следует, что $\tau(\Omega^i_\varphi) = \Omega^i_\varphi$, $\tau(A_\varphi) = A_\varphi$. Следовательно, для любой точки $p \in \Omega_\varphi$ существует число $m_p > 0$ такое, что $\tau^{m_p}(p) = p$ и $\tau^i(p) \neq p$ для всех $0 < i < m_p$, и для любой сепаратрисы $l \in A_\varphi$ существует число $m_l > 0$ такое, что $\tau^{m_l}(l) = l$ и $\tau^i(l) \neq l$ для $0 < i < m_l$. Покажем, что для любых двух сепаратрис $l, l' \in A_\varphi$ выполняется равенство $m_l = m_{l'}$.

Пусть $L_\omega = \{l_0, \ldots, l_{k-1}\} \subset A_\varphi$ — множество одномерных сепаратрис седловых периодических точек диффеоморфизма φ, в замыкании которых содержится сток ω. Обозначим через $S_0 \subset W^s_\omega$ замкнутую кривую, ограничивающую диск D_0 с точкой ω внутри, и пересекающуюся с каждой сепаратрисой из множества L_ω в единственной точке. Положим $z_i = l_i \cap S_0$, $i \in \{0, \ldots, k-1\}$. Не уменьшая общности предположим, что индексация сепаратрис выбрана таким образом, что точки $z_1, \ldots, z_k$ разбивают S_0 на k отрезков, причем внутри отрезка с граничными точками z_i, z_{i+1} нет других точек из множества $L_\omega \cap S_0$, $i \in 0, \ldots, k-2$. Положим $S_j = \tau^{jm_\omega}(S_0)$, $z^j_i = l_i \cap S_j$, $i \in \{1, 2, \ldots\}$. Так как отображение $\tau^{jm_\omega}|_{S_0}\colon S_0 \to S_j$, $j = 1, 2, \ldots$, является сохраняющим ориентацию, оно индуцирует перестановку g_j на множестве индексов $\{0, \ldots, k-1\}$ такую, что $g_j(i-1, i, i+1) = (n-1, n, n+1)(mod\, k)$, $i, n \in \{0, \ldots, k-1\}$. Кроме того, если $m_{l_i} = n_i m_\omega$ — период сепаратрисы l_i, то $g_{n_i}(i) = i$. Тогда $g_{n_i}(i-1) = i-1$, $g_{n_i}(i+1) = i+1$, откуда следует, что $m_{l_{i-1}} = m_{l_{i+1}} = m_{l_i}$. В силу произвольности выбора индекса i отсюда следует, что $m_{l_n} = m_{l_i}$ для любых $i, n \in \{0, \ldots, k-1\}$. Теперь для доказательства того факта, что все неустойчивые сепаратрисы из A_φ имеют имеют одинаковый период, достаточно доказать, что множество A_φ связно. Заметим, что A_φ — аттрактор диффеоморфизма φ, то есть существует такая окрестность U множества A_φ что $\varphi(U) \subset U$, и $W^s_{A_\varphi} = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{R}} \varphi(U) = \mathbb{S}_g \setminus \Omega^2_\varphi$. Если A_φ несвязно, то $W^s_{A_\varphi}$ также несвязно, но тогда и $T \setminus \Omega^2_\varphi$ несвязно, что противоречит теореме о разбивающих множествах. Напомним, что теорема о разбивающих множествах утверждает, что любое связное n-мерное многообразие не может быть разбито не несвязные компоненты подмножеством топологической размерности меньшей $n-1$ (см., например, [3]). Положим $m_l = m$.

Построим изотопию $H(x,t)\colon \mathbb{S}_g \times [0,1] \to \mathbb{S}_g$, соединяющую τ с некоторым периодическим отображением τ'.

Для точек $p \in \Omega_\varphi$ положим $H(p,t) = \tau(p)$ для любого $t \in [0,1]$. Пусть $L \in \mathcal{A}_\varphi$ — множество всех сепаратрис таких, что никакие две сепаратисы из L не принадлежат одной орбите гомеоморфизма τ. Для каждой сепаратрисы $l_0 \in L$ положим $l_i = \tau^i(l_0)$, $i \in \{1, \ldots, m-1\}$. Обозначим через $e_i\colon [0,1] \to cl\ l_i$ гомеоморфизм такой, что $e_i(0)$ является седловой точкой. Для $i \in \mathbb{Z}_m$ положим $\tilde{\tau}_i = e^{-1}_{i+1}\tau e_i$, для $s, t \in [0,1]$, $x \in l_i$ положим $\tilde{h}_i(s,t) = \tilde{\tau}_i(s)(1-t) + st$, $h_i(x,t) = e_{i+1}(\tilde{h}_i(e^{-1}_i(x), t))$. Для любой сепаратрисы $l_0 \in L$ определим изотопию $h_{l_0}\colon \mathcal{O}(l_0) \times [0,1] \to \mathcal{O}(l_0)$ на множестве $\mathcal{O}(l_0) = \bigcup\limits_{i=0}^{m-1} l_i$, положив $h_{l_0}(x) = h_i(x)$ для любой точки $x \in l_i$, $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Искомую изотопию H на множестве $\mathcal{A}_\varphi$ определим, положив $H|_{\mathcal{O}(l_0)\times[0,1]} = h_{l_0}$ для любой сепаратрисы $l_0 \in L$.

Доопределим потроенную изотопию на множестве B_φ. Обозначим через $\mathbb{B}^2 \subset \mathbb{R}^2$ стандартный единичный шар с центром в начале координат и через $\mathbb{S}^1$ его границу. Пусть $\Omega^2_* \in \Omega^2_\varphi$ – множество всех точек таких, что никакие две точки из Ω^2_* не принадлежат одной орбите гомеоморфизма τ. Для каждой точки $\alpha_0 \in \Omega^2_*$ обозначим через m_{α_0} ее период и положим $\alpha_i = \tau^i(\alpha_0)$, $i \in \{1, \dots, m_{\alpha_0} - 1\}$. Обозначим через $e_i \colon \mathbb{B}^2 \to W^u_{\alpha_i}$ непрерывное отображение такое, что $e_i(O) = \alpha_i$ и e_i является гомеомофизмом всюду, кроме, возможно, множества X_i, состоящего из конечного числа замкнутых дуг и точек. Для $i \in \mathbb{Z}_{m_{\alpha_0}}$, $t \in [0,1]$ определим гомеоморфизм $\tilde{g}_{i,t} \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, положив $\tilde{g}_{i,t}(x) = e^{-1}_{i+1}(H(e_i(x), t))$ для $x \in \mathbb{S}^2 \setminus X_i$ и доопределив $\tilde{g}_{i,t}$ в точках множества X_i так, чтобы для всех точек $x, x' \in X_i$ таких, что $e_i(x) = e_i(x')$, выпонялось условие $\tilde{g}_{i,t}(x) = \tilde{g}_{i,t}(x')$. Продолжим по радиусам гомеоморфизм $\tilde{g}_{i,t}$ внутрь шара $\mathbb{B}^2$ и обозначим полученный гомеоморфизм через $\tilde{G}_{i,t}$. Далее искомая изотопия определяется точно также, как в предыдущем абзаце. Доказательство закончено.

3. Топологическая классификация многообразий, допускающих потоки из класса $G^*(M^3)$

В этом разделе излагается доказательство теоремы 1. Пусть $f^t \in G(M^3)$ и T — компонента связности множества $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$. В работе [2] (см. доказательство теоремы) доказано, что существует $g \geq 0$ и непрерывное отображение $H \colon \mathbb{S}_g \times [0,1] \to M^3$ такое, что отображения $H|_{\mathbb{S}_g \times (0,1)} \colon \mathbb{S}_g \times (0,1) \to M^3 \setminus T$, $H|_{\mathbb{S}_g \times \{0\}} \colon \mathbb{S}_g \times \{0\} \to T$, $H|_{\mathbb{S}_g \times \{1\}} \colon \mathbb{S}_g \times \{1\} \to T$ являются гомеоморфизмами. Положим $H|_{\mathbb{S}_g \times \{0\}} = H_0$ ($H|_{\mathbb{S}_g \times \{1\}} = H_1$) и $\tau = H_0^{-1} H_1 \colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$. Тогда многообразие $M^3_{g,\tau}$ гомеоморфно многообразию M^3 при помощи гомеоморфизма $\tilde{H}$, отображающего класс эквивалентности $[(z,t)]$ точки $(z,t) \in \mathbb{S}_g \times [0,1]$ в точку $H(z,t)$.

Определим на $\mathbb{S}_g \times \mathbb{R}$ поток F^t, накрывающий поток f^t, положив $\gamma(x,r) = (\tau(x), r-1)$, $F^t(x,r) = \tilde{F}^t(x,r) = H^{-1}(f^t(H(x,r)))$ для $x \in \mathbb{S}_g$, $r \in [0,1]$ и $F^t(x,r) = \gamma^i(\tilde{F}^t(\gamma^{-i}(x,r)))$ для $x \in \mathbb{S}_g, r \in [i, i+1], i \in \mathbb{Z}$. Ограничение потока F^t на множество $\mathbb{S}_g \times i$ задается формулой $F^t|_{\mathbb{S}_g \times i} = (F^t_i(z), i)$, где $z \in \mathbb{S}_g$, и для любого $i \in \mathbb{Z}$ поток F^t_i топологически сопряжен потоку F^t_0 посредством гомеоморфизма τ^i.

Из условий, определяющих класс $G^*(M^3)$, следует, что существует изотопный тождественному гомеоморфизм $h_i \colon \mathbb{S}_g \to \mathbb{S}_g$ такой, что $F^t_0 = h_i F^t_i h_i^{-1}$. Обозначим через $g_i \colon \mathbb{S}_g \times [0,1] \to \mathbb{S}_g$ изотопию, соединяющую тождественное отображение с гомеоморфизмом h_i и определим отображение $H \colon \mathbb{S}_g \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}_g \times \mathbb{R}$ следующим образом:

$$H(z,r) = \begin{cases} (x,r), r \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]; \\ g_i(x, 2(r + \frac{1}{2} - i)), r \in [i - \frac{1}{2}, i]; \\ g_i(x, 2(i + \frac{1}{2} - r)), r \in [i, i + \frac{1}{2}], i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Тогда поток $F'^t = H F^t H^{-1}$ накрывает поток f^t и обладает дополнительным свойством $F'^t_i(x) = F'^t_0(x)$ для любого $x \in \mathbb{S}_g$. Отсюда следует, что поток F'^t_0 коммутирует с отображением склейки $H \tau H^{-1}$, которое, в силу теоремы о централизаторе, изотопно некоторому периодическому гомеоморфизму. Следовательно, гомеоморфизм τ также изотопен периодическому гомеоморфизму. Доказательство закончено.

Авторы благодарят В. З. Гринеса и О. В. Починку за плодотворные обсуждения, а также признательны рецензенту за конструктивные замечания.

Список цитируемых источников

1. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях // УМН. — 1990. — Т.45, №1. — С. 3-39.

   Aranson, S. Kh.; Grines, V. Z. The topological classification of cascades on closed two-dimensional manifolds. // Russ. Math. Surv. — 1990. — Vol.45, no.1. — P. 1-35.
2. *Гринес В. З, Гуревич Е. Я., Жужома Е. В., Зинина С. Х.* Гетероклинические кривые диффеоморфизмов Морса–Смейла и сепараторы в магнитном поле плазмы // Нелинейная динамика — 2014. —Т.10, №4. — С. 427-438.

   Grines V. Z.; Gurevich E. Ya., Zhuzhoma E. V., Zinina S. Kh. Heteroclinic curves of Morse-Smale cascades and separators in magnetic field of plasma. (Russian. English summary)// Nelinein. Din. — 2014. —Vol.10, no.4. — P. 427-438.
3. *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension Theory. Princeton Mathematical Series, V. 4. Princeton University Press, Princeton, N. J. — 1941.
4. *Nielsen J.* Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flachen I // Acta Math. — 1927. — Vol.50. —P. 189-356.
5. *Nielsen J.* Die Struktur periodischer Transformationen von Flachen // Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd. — 1937. — Vol.15. — P. 1-77.
6. *Smale S.* On Gradient Dynamical Systems // Annals of Math. — 1961. — Vol.74, no.1. — P. 199-206.
7. *Thurston W* On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). — 1988. — T. 19. — №2. — C. 417-431.

Получена 30.05.2015 Переработана 23.06.2015