Динамические системы, 2015, том 5(33), №1-2, 39–42

УДК 517.938

О топологии 3-многообразий, допускающих псевдоаносовские аттракторы и репеллеры[1]

В. З. Гринес, О. В. Починка, А. А. Шиловская

Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: vgrines@yandex.ru, olga-pochinka@yandex.ru, a.shilovskaia@gmail.com

Аннотация. В работе введен класс G гомеоморфизмов, заданных на трехмерных многообразиях, таких, что их неблуждающие множества состоят из объединения псевдоаносовских аттракторов и репеллеров. Доказано, что несущее многообразие M^3 такого гомеоморфизма диффеоморфно многообразию M_τ, полученному из $M^2 \times [0,1]$ отождествлением точек $(z,1)$ и $(\tau(z),0)$, где τ является либо псевдоаносовским гомеоморфизмом, либо периодическим гомеоморфизмом, сохраняющим слоения некоторого псевдоаносовского гомеоморфизма

Ключевые слова: неблуждающее множество, псевдоаносовский гомеоморфизм, топология многообразия

1. Введение и формулировка результатов

Начиная с 2012 г., в серии работ [1], [3], [4], [2] В. З. Гринеса, Ю. А. Левченко, В. С. Медведева, О. В. Починки рассматривались A-диффеоморфизмы трехмерных многообразий, неблуждающее множество которых состоит в точности из двумерных базисных множеств. Было установлено, что в этом случае все базисные множества являются объединением ручно вложенных поверхностей, гомеоморфных двумерному тору, а несущее многообразие диффеоморфно многообразию $M_{\widehat{J}}$, полученному из $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ отождествлением точек $(z,1)$ и $(\widehat{J}(z),0)$, где $\widehat{J}$ — алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей J, которая либо является гиперболической, либо совпадает с единичной матрицей $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, либо совпадает с матрицей $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Напомним, что *алгебраическим автоморфизмом* тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм $\widehat{C}$, задаваемый матрицей $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из множества $GL(2,\mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем ± 1. То есть $\widehat{C}(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ $(mod\ 1)$. Алгебраический автоморфизм $\widehat{C}$ называется *гиперболическим*, если собственные значения λ_1, λ_2 матрицы C удовлетворяют условиям $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$. При этом матрица C также называется *гиперболической*.

В работе Ф. Хертца, М. Хертц и Р. Уреса [6] аналогичный вывод о структуре многобразия получен в предположении, что многообразие M^3 является неприводимым (то

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения»), Российского фонда научных исследований (гранты N 13-01-12452 офи-м и 15-01-03689-а) и Российского Научного фонда (грант 14-41-00044).

есть любая цилиндрически вложенная в M^3 двумерная сфера ограничивает в нем трехмерный шар) и допускает диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$ с инвариантным *аносовским тором* (то есть диффеоморфизмы с гладким f-инвариантным подмногообразием, гомеоморфным тору, на фундаментальной группе которого f индуцирует гиперболическое действие). Заметим, что в работах [1], [3], [4], [2], в отличие от [6], не требовалось неприводимости многообразия M^3, однако аносовский тор необходимо был либо аттрактором, либо репеллером — *аносовским аттрактором или репеллером.*

Настоящая работа является продолжением вышеописанных исследований. Точнее, мы выделяем класс трехмерных гомеоморфизмов с так называемыми псевдоаносовскими аттракторами и репеллерами и даем классификацию несущих многообразий для таких отображений.

Напомним, что гомеоморфизм $h\colon M^2 \to M^2$ называется *псевдоаносовским отображением (pA-гомеоморфизмом)*, если на поверхности M^2 существует пара h-инвариантных трансверсальных слоений $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^u$ (устойчивое и неустойчивое соответственно) с множеством седловых особенностей S и трансверсальными мерами μ^s, μ^u такая, что:

1) каждая седловая особенность из S имеет не менее трех сепаратрис;

2) существует число, называемое дилатацией, $\lambda > 1$ такое, что $\mu^s(h(\alpha)) = \lambda\mu^s(\alpha)$ $(\mu^u(h(\alpha)) = \lambda^{-1}\mu^u(\alpha))$ для любой дуги α, трансверсальной слоениям F^s (F^u).

Коротко все описанные выше свойства записываются так:

$$h(\mathcal{F}^s,\mu^s) = (\mathcal{F}^s,\lambda^{-1}\mu^s) \text{ и } h(\mathcal{F}^u,\mu^u) = (\mathcal{F}^u,\lambda\mu^u).$$

Пусть $f\colon M^3 \to M^3$ гомеоморфизм, заданный на замкнутом трехмерном многообразии M^3. Если существует замкнутая окрестность U f-инвариантного множества A такая, что

$$f(U) \subset int\ U, \quad \bigcap_{j\geq 0} f^j(U) = A,$$

то множество A называется *аттрактором.* Аттрактор для гомеоморфизма f^{-1} называется *репеллером* R гомеоморфизма f. Далее мы будем рассматривать диффеоморфизмы $f\colon M^3 \to M^3$, неблуждающее множество которых лежит на ручно вложенных ориентируемых поверхностях, каждая из которых является аттрактором или репеллером. Множество аттракторов (репеллеров) обозначим через $\mathcal{A}$ $(\mathcal{R})$. Согласно работе [5], каждая компонента V множества $M^3\setminus(\mathcal{A}\cup\mathcal{R})$ гомеоморфна прямому произведению поверхности M^2 на интервал и содержит в своем замыкании в точности один аттрактор $A \subset \mathcal{A}$ и один репеллер $R \subset \mathcal{R}$. Тогда несущее многообразие M^3 гомеоморфно фактор-пространству M_τ, полученному из $M^2\times[0,1]$ отождествлением точек $(z,1)$ и $(\tau(z),0)$, где $\tau\colon M^2 \to M^2$ некоторый гомеоморфизм. Таким образом, M_τ есть локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем M^2.

Обозначим через G класс гомеоморфизмов $f\colon M^3 \to M^3$, неблуждающее множество $NW(f)$ которых является объединением *псевдоаносовских аттракторов и репеллеров*, то есть $NW(f)$ состоит из поверхностей S таких, что:

1) S есть ручное вложение в M^3 ориентируемой замкнутой поверхности M^2 рода $p > 1$;

2) S является либо аттрактором, либо репеллером;

3) для некоторого $k \geq 1$ ограничение f на S является псевдоаносовским гомеоморфизмом.

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество гомеоморфизмов поверхности M^2, состоящее из всех псевдоаносовских гомеоморфизмов и всех периодических гомеоморфизмов (конечная степень такого гомеоморфизма является тождественным отображением), сохраняющих слоения некоторого псевдоаносовского гомеоморфизма. Сформулируем основной результат:

Теорема. *Многообразие M^3 допускает гомеоморфизм f из класса G тогда и только тогда, когда M^3 диффеоморфно многообразию M_τ, где $\tau \in \mathcal{T}$.*

Доказательству теоремы посвящен следующий раздел.

2. Классификация многообразий, допускающих псевдоаносовские аттракторы и репеллеры

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть многообразие M^3 допускает гомеоморфизм f из класса G. Не уменьшая общности, будем считать, что $f(A) = A$ для некоторого аттрактора A гомеоморфизма f (в противном случае можно рассмотреть подходящую степень гомеоморфизма f). В силу работы [5] существует непрерывное отображение $E_f : M^2 \times [0,1] \to M^3$ такое, что отображения $E_f|_{M^2\times(0,1)} : M^2 \times (0,1) \to M^3 \setminus A$, $E_f|_{M^2\times\{0\}} : M^2 \times \{0\} \to A$, $E_f|_{M^2\times\{1\}} : M^2 \times \{1\} \to A$ являются гомеоморфизмами. Обозначим через $E_{f,0} : M^2 \to A$ ($E_{f,1} : M^2 \to A$) гомеоморфизм такой, что $E_f(z,0) = E_{f,0}(z)$ ($E_f(z,1) = E_{f,1}(z)$) для любого $z \in M^2$. Положим $J = E^{-1}_{f,0}E_{f,1} : M^2 \to M^2$. По построению многообразие M_J гомеоморфно многообразию M^3 посредством гомеоморфизма $\check{E}_f$, ставящего в соответствие классу эквивалентности $[(z,t)]$, $(z,t) \in M^2 \times [0,1]$ точку $E_f(z,t)$. Следовательно, гомеоморфизм $g = \check{E}_f f \check{E}_f^{-1} : M_J \to M_J$ принадлежит классу G и допускает поднятие на $M^2 \times \mathbb{R}$ до гомеоморфизма $\tilde{g}$ такого, что $\tilde{g}(M^2 \times \{0\}) = M^2 \times \{0\}$ и $\tilde{g}|_{M^2\times\{0\}}$ – псевдоаносовский гомеоморфизм. Обозначим через $g_0 : M^2 \to M^2$ гомеоморфизм такой, что $\tilde{g}(z,0) = (g_0(z),0)$ для любого $z \in M^2$.

Поскольку $M_J = (M^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где Γ — циклическая группа гомеоморфизмов $M^2 \times \mathbb{R}$ с образующей $\gamma(z,r) = (J(z), r-1)$ и гомеоморфизм $\tilde{g}$ проектируется на M_J посредством естественной проекции $p_{_J} : M^2 \times \mathbb{R} \to M_J$, то либо $\tilde{g}\gamma = \gamma\tilde{g}$, либо $\tilde{g}\gamma = \gamma^{-1}\tilde{g}$. Тогда соответствующие индуцированные в группе $\pi_1(M^2 \times \mathbb{R})$ гомоморфизмы связаны либо соотношением $\tilde{g}_*\gamma_* = \gamma_*\tilde{g}_*$, либо соотношением $\tilde{g}_*\gamma_* = \gamma_*^{-1}\tilde{g}_*$. Так как фундаментальные группы $\pi_1(M^2 \times \mathbb{R})$ и $\pi_1(M^2)$ изоморфны, а действие в группе $\pi_1(M^2)$ однозначно определяет изотопический класс (см., например, [8]), то отображение $g_0 J g_0^{-1}$ изотопно J^k, где $k \in \{-1, 1\}$. Согласно [7], существует гомеоморфизм τ изотопный J такой, что $g_0 \tau g_0 = \tau^k$, при этом τ либо псевдоаносовский гомеоморфизм, либо периодический гомеоморфизм, сохраняющий слоения гомеоморфизма g_0. Осталось доказать, что многообразия M_J и M_τ гомеоморфны.

Действительно, поскольку τ изотопен J, то существует изотопия $\xi_t : M^2 \to M^2$, $t \in [0,1]$, соединяющая отображение $\xi_0 = J\tau^{-1}$ с тождественным отображением ξ_1. Определим гомеоморфизм $E_J : M^2 \times [0,1] \to M^2 \times [0,1]$ по формуле $E_J(z,t) = (\xi_t(z), t)$. Тогда гомеоморфизм $\check{E}_J : M_\tau \to M_J$, который ставит в соответствие классу эквивалентности $[(z,t)]$ класс эквивалентности $[E_J(z,t)]$, является искомым.

Достаточность. Для доказательства достаточности построим гомеоморфизм из класса G на многообразии M_τ для любого $\tau \in \mathcal{T}$. Из определения класса $\mathcal{T}$ следует, что существует псевдоаносовским гомеоморфизмом h такой, что τ либо совпадает с h, либо является периодическим гомеоморфизмом, сохраняющим слоения гомеоморфизма h. Обозначим через $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – сдвиг на единицу времени потока, порожденного векторным полем $\dot{r} = \sin(2\pi r)$. Зададим гомеоморфизм $\tilde{f} : M^2 \times \mathbb{R} \to M^2 \times \mathbb{R}$ формулой $\tilde{f}(z, r) = (h(z), \psi(r))$. Пусть Γ — циклическая группа гомеоморфизмов $M^2 \times \mathbb{R}$ с образующей $\gamma(z, r) = (\tau(z), r-1)$. Тогда $M_\tau = (M^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$. Обозначим через $p_\tau : M^2 \times \mathbb{R} \to M_\tau$ естественную проекцию. Поскольку $h\tau = \tau h$, то гомеоморфизм $\tilde{f}$ проектируется на M_τ гомеоморфизмом $f = p_\tau \tilde{f} p_\tau^{-1}$. □

Список цитируемых источников

1. *Гринес В. З., Левченко Ю. А.* О топологической классификации диффеоморфизмов трехмерных многообразий с двумерными поверхностными аттракторами и репеллерами // Доклады Академии Наук. — 2012. — Т.447, №2. — С.127-129.

   Grines, V.Z.; Levchenko, Yu.A. On a topological classification of diffeomorphisms on 3-manifolds with two-dimensional surface attractors and repellers. Dokl. Math. 86, No. 3, 747-749 (2012).
2. *Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V., Pochinka O.* The topological classification of structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets // Nonlinearity. — 2015. — Vol.28 (11). — P. 4081-4102.
3. *Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V., Pochinka O.* On the Dynamical Coherence of Structurally Stable 3-diffeomorphisms // Regular and Chaotic Dynamics. — 2014. — Vol.19, No.4. — P. 506-512.
4. *Гринес В. З., Левченко Ю. А., Починка О. В.* О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами // Нелинейная динамика. — 2014. — Т.10, №1. — С.17-33.

   Grines, V.Z.; Levchenko, Yu.A.; Pochinka, O.V. On topological classification of diffeomorphisms on 3-manifolds with two-dimensional surface attractors and repellers // Nelineynaya Dinamika. — 2014. — Vol.10, №1. —P. 17-33.
5. *Гринес В. З., Починка О. В., Шиловская А. А.* Топологически псевдокогерентные диффеоморфизмы 3-многообразий // Журнал Средневолжского математического общества. — 2015. — Т.17, №2. — С.27-34.

   Grines, V.Z.; Pochinka, O.V.; Shilovskaya, A.A. Topologically pseudo-coherent diffeomorphisms on 3-manifolds // Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva. — 2015. — Vol.17, №2. — P. 27-34.
6. *Hertz F., Herts M., Ures R.* Tori with hyperbolic dynamics in 3-manifolds // Journal of modern dynamics. — 2011. — Vol.5, No.1. — P. 185-202.
7. *McCarthy J.* Normalizers and centralizers of pseudo-Anosov mapping classes. — 1984. — preprint.
8. *Rolfsen D.* Knots and links // Mathematics lecture series. Vol.7. — Houston, TX: Publish or Perish, 1990. — 439 pp.

Получена 09.06.2015