Динамические системы, 2015, том 5(33), №1-2, 115–124

УДК 517.9

Периодическая задача для уравнения типа Льенара, не разрешенного относительно производной[1]

С. М. Чуйко, А. С. Чуйко, О. В. Несмелова (Старкова)
Донбасский государственный педагогический университет,
Славянск 84116, УКРАИНА. *E-mail: chujko-slav@inbox.ru*

Аннотация. Исследована задача о нахождении условий существования и построении решений автономной периодической задачи для слабонелинейного уравнения типа Льенара, не разрешенного относительно производной. Рассмотрен случай наличия кратных корней уравнения для порождающих амплитуд. Для нахождения решений поставленной задачи получены конструктивные необходимые и достаточные условия существования, а также предложена сходящаяся итерационная схема. В качестве примера исследована задача о нахождении периодических решений нелинейной системы уравнений Лотка-Вольтерра, которое в малой окрестности положения равновесия приведено к автономной периодической задаче для слабонелинейного уравнения типа Льенара, не разрешенного относительно производной.

Ключевые слова: автономная периодическая краевая задача, уравнение, не разрешенное относительно производной, уравнение типа Льенара, метод простых итераций, уравнение Лотка-Вольтерра.

1. Постановка задачи

Исследована задача о нахождении условий существования и построении $T_1(\varepsilon)$-периодических решений [4, 11, 12]

$$y(t,\varepsilon): \ y(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0,T_1(\varepsilon)], \ T_1(0) = 2\pi, \ y(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

уравнения типа Льенара, не разрешенного относительно производной [3, с. 174]

$$\frac{d^2y(t,\varepsilon)}{dt^2} + y(t,\varepsilon) = \varepsilon \cdot Y(y(t,\varepsilon), y'(t,\varepsilon), y''(t,\varepsilon), \varepsilon). \tag{1.1}$$

Периодические решения уравнения типа Льенара (1.1) ищем в малой окрестности нетривиального решения порождающего уравнения

$$\frac{d^2y_0(t)}{dt^2} + y_0(t) = 0.$$

Здесь $Y(y,y',y'',\varepsilon)$ — нелинейная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной y и ее производным y' и y'' в малой окрестности решения порождающей задачи и его производных y_0' и y_0'', а также непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Поставленная задача является продолжением исследования автономных краевых задач [4, 7, 11, 12, 15, 17, 19], а также краевых задач, не разрешенных относительно производной [5, 8].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0115U003182)

Существенным отличием автономной периодической задачи для уравнения (1.1) от аналогичной неавтономной периодической задачи является тот факт, что любое периодическое решение $z(t,\varepsilon)$ уравнения (1.1) существует наряду с серией периодических решений $z(t+h,\varepsilon)$, отличающихся от исходного сдвигом по независимой переменной. Этот факт позволяет зафиксировать начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающей задачи стало однопараметрическим, например $y_0(t,c_0) = c_0 \cdot \cos t,\ c_0 \in \mathbb{R}^1$, при этом периодические решения уравнения (1.1), соответствующие синусам в порождающем решении могут быть получены простым смещением начального момента времени [4, с. 148].

Согласно традиционной классификации периодических краевых задач поставленная задача является критической [2, 4, 12]. Для произвольной функции $f(t)$ задача о нахождении 2π-периодических решений уравнения

$$\frac{d^2 y_0(t,c)}{dt^2} + y_0(t,c) = f(t),\ f(t) \in \mathbb{C}[0,2\pi] \tag{1.2}$$

разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} H(s) f(s)\, ds = 0,\ H(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix};$$

в этом случае при соответствующей фиксации начала отсчета независимой переменной общее решение 2π-периодической задачи для уравнения (1.2) имеет вид

$$y_0(t,c) = c \cdot \cos t + g[f(s)](t),\ g[f(s)](t) := \int_0^t \sin(t-s) f(s)\, ds,\ c \in \mathbb{R}^1.$$

Совершая в уравнении (1.1) замену независимой переменной [4]

$$t = \tau(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)),\ T_1(\varepsilon) = 2\pi(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)),\ \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\ \beta(0) := \beta_0,$$

приходим к задаче об отыскании 2π-периодических решений

$$y(\tau,\varepsilon):\ y(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0,2\pi],\ y(\tau,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

уравнения

$$\frac{d^2 y(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2} + y(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\, \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon). \tag{1.3}$$

При условии $1 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \neq 0$ функция

$$\mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) := -(2+\varepsilon\beta(\varepsilon))\beta(\varepsilon)\, y(\tau,\varepsilon) +$$
$$+ (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2\, Y\left(y(\tau,\varepsilon), \frac{y'(\tau,\varepsilon)}{(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))}, \frac{y''(\tau,\varepsilon)}{(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2}, \varepsilon\right)$$

непрерывно дифференцируема по неизвестной $y(\tau,\varepsilon)$ и ее производным $y'(\tau,\varepsilon)$ и $y''(\tau,\varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи и его производных $y_0'(\tau,c_0)$ и $y_0'(\tau,c_0)$, непрерывно дифференцируема по функции $\beta(\varepsilon)$ в малой окрестности точки β_0, а также непрерывно дифференцируема по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$.

2. Необходимое условие существования решения

Необходимое и достаточное условие существования 2π-периодических решений уравнения (1.3):

$$\int_0^{2\pi} H(s)\,\mathcal{Y}(y(s,\varepsilon), y'(s,\varepsilon), y''(s,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)\; ds = 0 \tag{2.1}$$

приводит к уравнению для порождающих амплитуд

$$F(\check{c}_0) := \int_0^{2\pi} H(s)\,\mathcal{Y}(y_0(s,c_0), y_0'(s,c_0), y_0''(s,c_0), \beta_0, 0)\; ds = 0. \tag{2.2}$$

Лемма. *Если периодическая задача для уравнения типа Льенара* (1.1) *имеет решение*

$$y(t,\varepsilon):\;\; y(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, T_1(\varepsilon)],\;\; T_1(0) = 2\pi,\;\; y(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\;\; 1 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \neq 0,$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $y_0(t,c_0) = c_0 \cdot \cos t$, *то вектор* $\check{c}_0$ *удовлетворяет уравнению*

$$F(\check{c}_0) = 0,\;\; \check{c}_0 = \mathrm{col}\;(c_0,\;\beta_0) \in \mathbb{R}^2.$$

Предположим, что уравнение для порождающих амплитуд (2.2) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^2$ уравнения (2.2), приходим к задаче об отыскании периодических решений уравнения типа Льенара (1.1)

$$y(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + x(\tau,\varepsilon)$$

в окрестности порождающего решения $y_0(\tau,c_0) = c_0 \cdot \cos\tau$. Обозначим (2×2)-мерную матрицу

$$B_0 = \frac{\partial F(\check{c})}{\partial \check{c}}\Bigg|_{\begin{array}{l} c\; = c_0, \\ \beta\; = \beta_0 \end{array}}.$$

В случае простых ($\det B_0 \neq 0$) корней уравнения для порождающих амплитуд (2.2) уравнение (1.1) имеет единственное периодическое решение [4, 11, 17], при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $y_0(t,c_0) = c_0 \cdot \cos t$. Данный критический случай назван критическим случаем первого порядка [4, 11, 12, 17]. Менее изученным является случай [13, 18] кратных корней ($\det B_0 = 0$) уравнения (2.2); при этом согласно традиционной классификации периодических краевых задач поставленная задача для уравнения (1.1) не может быть отнесена к критическому случаю второго или более высокого порядка [12], а также к особому критическому случаю, поскольку уравнение для порождающих амплитуд не обращается в тождество [6, 16].

При наличии кратных корней уравнения для порождающих амплитуд, оставляя только одну линейно-независимую строку уравнения (2.2), получаем эквивалентное условие разрешимости периодической задачи для уравнения типа Льенара (1.1)

$$F_\rho(\check{c}_0) := \int_0^{2\pi} H_\rho(s)\,\mathcal{Y}(y_0(s,c_0), y_0'(s,c_0), y_0''(s,c_0), \beta_0, 0)\; ds = 0; \tag{2.3}$$

здесь $H_\rho(t) = \cos t$, либо $H_\rho(t) = \sin t$, в зависимости от нелинейности $Y(y,y',y'',\varepsilon)$ уравнения (1.1). Предметом исследования данной статьи является случай кратных ($\det B_0 = 0$) корней уравнения для порождающих амплитуд (2.2) при условии, что матрица B_0 имеет ненулевые элементы: $B_0 \neq 0$; назовем этот случай частным критическим случаем [9, 13, 18].

Пример 1. Частный критический случай имеет место в задаче о нахождении периодического решения

$$z(t,\varepsilon) := (\ z^{(a)}(t,\varepsilon)\ z^{(b)}(t,\varepsilon)\ )^*,\ z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[0,T_1(\varepsilon)],\ z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

уравнения Лотка-Вольтерра

$$z'(t,\varepsilon) = Az(t,\varepsilon) + Z(z(t,\varepsilon)), A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Z(z(t,\varepsilon)) := \begin{pmatrix} -z^{(a)}(t,\varepsilon)z^{(b)}(t,\varepsilon) \\ z^{(a)}(t,\varepsilon)z^{(b)}(t,\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Действительно, в окрестности положения равновесия

$$z^{(a)}(t,\varepsilon) \equiv 1,\ z^{(b)}(t,\varepsilon) \equiv 1$$

уравнение (2.4) посредством замены

$$z^{(a)}(t,\varepsilon) := 1 + \varepsilon\, u(t,\varepsilon),\ z^{(b)}(t,\varepsilon) := 1 + \varepsilon\, y(t,\varepsilon)$$

приводится к виду

$$(1+\varepsilon y(t,\varepsilon))y''(t,\varepsilon) = \varepsilon(y'(t,\varepsilon))^2 - y(t,\varepsilon)(1+\varepsilon y(t,\varepsilon))(1+\varepsilon y(t,\varepsilon)+\varepsilon y'(t,\varepsilon)). \tag{2.5}$$

В свою очередь, уравнение (2.5) приводится к виду (1.1) посредством функции

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) := (y'(\tau,\varepsilon))^2 - \varepsilon\,(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2\, y^3(\tau,\varepsilon) - \\ - (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))\, y^2(\tau,\varepsilon)(2+2\,\varepsilon\beta(\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)(\beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)) + \\ + \varepsilon y'(\tau,\varepsilon)) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))y'(\tau,\varepsilon) + y''(\tau,\varepsilon)).\end{aligned}$$

Уравнение для порождающих амплитуд (2.3) в случае задачи о нахождении периодического решения уравнения (2.5) принимает вид

$$F_\rho(c_0,\beta_0) = -2\pi c_0\beta_0 = 0.$$

Корень $c_0 = 0$ соответствует тривиальному порождающему решению $y_0(\tau,c_0) \equiv 0$, в малой окрестности которого расположено лишь положение равновесия уравнения Лотка-Вольтерра (2.5). Серия корней $\beta_0 = 0,\ c_0 \in \mathbb{R}^1$ определяет вырожденную ($\det B_0 = 0$) матрицу B_0. Положим $\beta_0 = 0,\ c_0 = 0,1$; матрица B_0 при этом имеет ненулевые элементы

$$B_0 = -\frac{\pi}{5}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0;$$

таким образом, задача о нахождении периодического решения уравнения (2.4) представляет частный критический случай. Заметим, что для корня $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^2$ имеет место неравенство $1+\varepsilon\beta_0 \equiv 1 \neq 0$.

3. Достаточные условия существования решения

Фиксируя одно из решений $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^2$ уравнения (2.3), приходим к задаче об отыскании периодических решений уравнения типа Льенара (1.1)

$$y(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x(\tau,\varepsilon)$$

в окрестности порождающего решения $y_0(\tau, c_0) = c_0 \cdot \cos\tau$. Для нахождения возмущения

$$x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, 2\pi],\ \ x(\tau,\cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

получаем задачу об отыскании периодических решений уравнения

$$\frac{d^2x(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2} + x(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\, \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon). \tag{3.1}$$

Решение

$$x(\tau,\varepsilon) = \nu \cdot \cos\tau + x^{(1)}(\tau,\varepsilon),\ \ \beta(\varepsilon) := \beta_0 + \gamma(\varepsilon)$$

периодической задачи для уравнения (3.1) зависит от выбора корня $\check{c}_0$; здесь

$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon) := \varepsilon\, g[\mathcal{Y}(y_0(s,c_0) + x(s,\varepsilon), y_0'(s,c_0) + x'(s,\varepsilon), y_0''(s,c_0) + x''(s,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)](\tau).$$

Предположим, что порождающее решение $y_0(\tau, c_0)$ не является искомым периодическим решением уравнения (1.1). Обозначим производные

$$\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0) := \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\substack{y(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,c_0)\\ y'(\tau,\varepsilon)=y_0'(\tau,c_0)\\ y''(\tau,\varepsilon)=y_0''(\tau,c_0)\\ \beta(\varepsilon)=\beta_0,\quad \varepsilon=0.}}$$

$$\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0) := \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial y'}\Bigg|_{\substack{y(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,c_0)\\ y'(\tau,\varepsilon)=y_0'(\tau,c_0)\\ y''(\tau,\varepsilon)=y_0''(\tau,c_0)\\ \beta(\varepsilon)=\beta_0,\quad \varepsilon=0.}}$$

$$\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0) := \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial y''}\Bigg|_{\substack{y(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,c_0)\\ y'(\tau,\varepsilon)=y_0'(\tau,c_0)\\ y''(\tau,\varepsilon)=y_0''(\tau,c_0)\\ \beta(\varepsilon)=\beta_0,\quad \varepsilon=0.}}$$

$$\mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0),\beta_0) := \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \beta}\Bigg|_{\substack{y(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,c_0)\\ y'(\tau,\varepsilon)=y_0'(\tau,c_0)\\ y''(\tau,\varepsilon)=y_0''(\tau,c_0)\\ \beta(\varepsilon)=\beta_0,\quad \varepsilon=0.}}$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0) := \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{y(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,c_0)\\ y'(\tau,\varepsilon)=y_0'(\tau,c_0)\\ y''(\tau,\varepsilon)=y_0''(\tau,c_0)\\ \beta(\varepsilon)=\beta_0,\quad \varepsilon=0.}}$$

Используя непрерывную дифференцируемость по неизвестной $y(\tau,\varepsilon)$ и ее производным $y'(\tau,\varepsilon)$ и $y''(\tau,\varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи и его производных $y_0'(\tau, c_0)$ и $y_0''(\tau, c_0)$, а также непрерывную дифференцируемость по $\beta(\varepsilon)$ в окрестности точки β_0 и по ε в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $y_0(\tau,c_0)$, $y_0'(\tau,c_0)$, $y_0''(\tau,c_0)$, β_0 и $\varepsilon=0:$

$$\begin{gathered}
\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0)+x(\tau,\varepsilon),y_0'(\tau,c_0)+x'(\tau,\varepsilon),y_0''(\tau,c_0)+x''(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)= \\
=\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0),y_0'(\tau,c_0),y_0''(\tau,c_0),\beta_0,0)+\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x(\tau,\varepsilon)+ \\
+\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x'(\tau,\varepsilon)+\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x''(\tau,\varepsilon)+\mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0),\beta_0)\gamma(\varepsilon)+ \\
+\varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0)+\mathcal{R}(y_0(\tau,c_0)+x(\tau,\varepsilon),y_0'(\tau,c_0)+x'(\tau,\varepsilon),y_0''(\tau,c_0)+x''(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon).
\end{gathered}$$

Здесь
$$\mathcal{R}(y_0(\tau,c_0)+x(\tau,\varepsilon),y_0'(\tau,c_0)+x'(\tau,\varepsilon),y_0''(\tau,c_0)+x''(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)$$
— остаток последнего разложения, более высокого порядка малости по $x(\tau,\varepsilon)$, $x'(\tau,\varepsilon)$, $x''(\tau,\varepsilon)$, $\gamma(\varepsilon)$ и ε в окрестности точек $y_0(\tau,c_0)$, $y_0'(\tau,c_0)$, $y_0''(\tau,c_0)$, β_0 и $\varepsilon=0$, чем предыдущие слагаемые. Оставляя только одну линейно-независимую строку в условии (2.1) разрешимости задачи об отыскании периодических решений уравнения (3.1), с учетом равенства (2.3), получаем эквивалентное условие разрешимости исходной задачи об отыскании периодических решений уравнения (1.1):

$$\begin{gathered}
\int_0^{2\pi} H_\rho(\tau)\{\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[\nu\cdot\cos\tau+x^{(1)}(\tau,\varepsilon)]+\mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0),\beta_0)\gamma(\varepsilon)+ \\
+\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[\nu\cdot\cos\tau+x^{(1)}(\tau,\varepsilon)]'_\tau+\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[\nu\cdot\cos\tau+x^{(1)}(\tau,\varepsilon)]''_{\tau^2} \\
+\varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0)+\mathcal{R}(y(\tau,\varepsilon),y'(\tau,\varepsilon),y''(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\}\;d\tau=0,
\end{gathered}$$

равносильное уравнению

$$\begin{gathered}
{}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)\cdot\begin{pmatrix}\nu(\varepsilon)\\ \gamma(\varepsilon)\end{pmatrix}=-\int_0^{2\pi} H_\rho(\tau)\{\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x^{(1)}(\tau,\varepsilon)+ \\
+\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[x^{(1)}(\tau,\varepsilon)]'_\tau+\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[x^{(1)}(\tau,\varepsilon]''_{\tau^2}+ \\
+\varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0)+\mathcal{R}(y(\tau,\varepsilon),y'(\tau,\varepsilon),y''(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\}\;d\tau, \quad (3.2)
\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}
{}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0):=\Big\{\int_0^{2\pi} H_\rho(\tau)[\mathcal{A}_1(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)\cos\tau- \\
-\mathcal{A}_2(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)\sin\tau-\mathcal{A}_3(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)\cos\tau]d\tau;\;\int_0^{2\pi} H_\rho(\tau)\mathcal{A}_\beta(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)d\tau\Big\}
\end{gathered}$$

— постоянная (1×2)-матрица. При условии ${}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)\neq 0$ уравнение (3.2) имеет по меньшей мере одно решение

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix}\nu(\varepsilon)\\ \gamma(\varepsilon)\end{pmatrix}=-{}_0^+(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)\int_0^{2\pi} H_\rho(\tau)\{\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x^{(1)}(\tau,\varepsilon)+ \\
+\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[x^{(1)}(\tau,\varepsilon)]'_\tau+\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[x^{(1)}(\tau,\varepsilon)]''_{\tau^2}+ \\
+\varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0)+\mathcal{R}(y(\tau,\varepsilon),y'(\tau,\varepsilon),y''(\tau,\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\}\;d\tau.
\end{gathered}$$

Действительно, обозначим

$$P_{{}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)}:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{N}({}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0))$$

и

$$P_{{}_0^*(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)}:\ \mathbb{R}^1 \to \mathbb{N}({}_0^*(y_0(\cdot,c_0),\beta_0))$$

— отопроекторы матриц ${}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)$ и ${}_0^*(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)$. При условии

$${}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) \neq 0$$

имеет место равенство rank ${}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) = 1$, следовательно

$$P_{{}_0^*(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)} = 0,$$

при этом уравнение (3.2) разрешимо. В силу равенства

$$\operatorname{rank}\ P_{{}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)} = 1$$

уравнение (3.2) разрешимо не однозначно. Таким образом, для любого из кратных корней уравнения для порождающих амплитуд (2.2), при условии ${}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) \neq 0$, по меньшей мере одно периодическое решение уравнения (1.1) определяет операторная система

$$y(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + x(\tau,\varepsilon),\ x(\tau,\varepsilon) = \nu(\varepsilon)\cos\tau + x^{(1)}(\tau,\varepsilon),\ \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \gamma(\varepsilon), \tag{3.3}$$

$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon) := \varepsilon\, g[\mathcal{Y}(y_0(s,c_0) + x(s,\varepsilon), y_0'(s,c_0) + x'(s,\varepsilon), y_0''(s,c_0) + x''(s,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)](\tau),$$

$$\begin{pmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \gamma(\varepsilon) \end{pmatrix} = -{}_0^+(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau)\{\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) +$$
$$+ \mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[x^{(1)}(\tau,\varepsilon)]'_\tau + \mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[x^{(1)}(\tau,\varepsilon)]''_{\tau^2} +$$
$$+ \varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0) + \mathcal{R}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)\}\ d\tau.$$

Для построения решений системы (3.3) применим метод простых итераций [4, 11, 17].

Теорема. *При наличии кратных* ($\det B_0 = 0$) *корней уравнения для порождающих амплитуд* (2.2), *при условии* ${}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) \neq 0$ *задача об отыскании периодических решений уравнения* (1.1) *имеет по меньшей мере одно решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $y(\tau,0) = y_0(\tau,c_0)$, *при условии* $1 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \neq 0$ *представимое операторной системой* (3.3). *Для построения периодических решений уравнения* (1.1) *применима итерационная схема*

$$y_{k+1}(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ x_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \nu_{k+1}(\varepsilon)\cos\tau + x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

$$x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\, g[\mathcal{Y}(y_k(s,\varepsilon), y_k'(s,\varepsilon), y_k''(s,\varepsilon), \beta_k(\varepsilon), \varepsilon)](\tau), \tag{3.4}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_{k+1}(\varepsilon) \\ \gamma_{k+1}(\varepsilon) \end{pmatrix} = -{}_0^+(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau)\{\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) +$$
$$+ \mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon)]'_\tau + \mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon)]''_{\tau^2} +$$
$$+ \varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0) + \mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon), y_k'(\tau,\varepsilon), y_k''(s,\varepsilon), \beta_k(\varepsilon), \varepsilon)\}\ d\tau,$$

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_0 + \gamma_{k+1}(\varepsilon),\ \ldots,\ k = 0, 1, 2,\ \ldots .$$

Пример 2. Исследуем задачу о построении периодического решения

$$y(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, T_1(\varepsilon)],\ y(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

уравнения Лотка-Вольтерра в форме (2.5).

Выше было установлено, что уравнение для порождающих амплитуд (2.3) для уравнения Лотка-Вольтерра в форме (2.5) имеет корень $\beta_0 = 0,\ c_0 = 0,1$. Матрица B_0 при этом имеет ненулевые элементы, следовательно согласно доказанной теореме задача о построении периодического решения уравнения Лотка-Вольтерра (2.4) в малой окрестности порождающего решения $y_0(\tau, c_0)$ имеет по меньшей мере одно решение. На первом шаге итерационной схемы (3.4)

$$x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\, g[\mathcal{Y}(y_0(s,c_0), y_0'(s,c_0), y_0''(s,c_0), \beta_0, 0)](\tau) =$$
$$= \frac{\varepsilon}{600}[-\cos\tau + 2\cos 2\tau + 2\sin\tau - \sin 2\tau\ ].$$

Далее вычисляем производные

$$\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0) = \frac{1}{10}(\sin\tau - 3\cos\tau),\ \mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0) = -\frac{1}{10}(\ 2\sin\tau + \cos\tau),$$
$$\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0) = -\frac{\cos\tau}{10},\ \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0),\beta_0) = -\frac{\cos\tau}{5},$$
$$\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0) = \frac{1}{4000}(\sin\tau + \sin 3\tau - 3\cos\tau - \cos 3\tau)$$

и матрицу

$$_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) = \frac{\pi}{5}\ (\ 0\ 1\ )\ .$$

Таким образом, первом шаге итерационной схемы (3.4) находим функции

$$\nu_1(\varepsilon) \approx 0,\ \gamma_1(\varepsilon) \approx \frac{\varepsilon}{1200} + \frac{\varepsilon^2}{7200} - \frac{7\,\varepsilon^3}{988\ 000} + \frac{\varepsilon^4}{2\ 400\ 000} +\ \dots,$$

определяющие первое приближение к решению уравнения (2.5)

$$y_1(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

а также первое приближение к периоду

$$T_1(\varepsilon) = 2\pi(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)),\ \beta_1(\varepsilon) := \beta_0 + \gamma_1(\varepsilon)$$

этого решения, и, в свою очередь, первое приближение к решению уравнения (2.4):

$$z_1^{(a)}(t,\varepsilon) := 1 + \varepsilon\, u_1(t,\varepsilon),\ z_1^{(b)}(t,\varepsilon) := 1 + \varepsilon\, y_1(t,\varepsilon),\ u_1(t,\varepsilon) := \frac{y_1'(t,\varepsilon)}{1+\varepsilon\, y_1(t,\varepsilon)}.$$

Заметим, что для первого приближения к решению уравнения (2.4) имеет место неравенство $1 + \varepsilon\beta_1 \geq 0$. Для оценки точности найденных приближений к периодическому решению уравнения Лотка-Вольтерра определим невязки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \left\| \left\| \begin{pmatrix} \delta_k^{(a)}(\varepsilon) \\ \delta_k^{(b)}(\varepsilon) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} \right\|_{C[0;2\pi]}$$

нулевого и первого приближений к решению уравнения (2.4); здесь

$$\delta_k^{(a)}(\varepsilon) := (z_k^{(a)}(\tau,\varepsilon))'' - (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))z_k^{(a)}(\tau,\varepsilon)(1-z_k^{(b)}(\tau,\varepsilon)),$$

$$\delta_k^{(b)}(\varepsilon) := (z_k^{(b)}(\tau,\varepsilon))'' + (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))z_k^{(b)}(\tau,\varepsilon)(1-z_k^{(a)}(\tau,\varepsilon)),\ k=0,\ 1.$$

Положив $\varepsilon = 0,1$, имеем

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,000\ 111\ 335,\ \Delta_1(0,1) \approx 2,13\ 834 \cdot 10^{-6}.$$

При $\varepsilon = 0,01$ невязки уменьшаются:

$$\Delta_0(0,01) \approx 1,11\ 756 \cdot 10^{-6},\ \Delta_1(0,01) \approx 2,12\ 820 \cdot 10^{-9}.$$

Для построения решений операторной системы (3.3) применим также метод наименьших квадратов [1, 9, 14, 19].

Список цитируемых источников

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации.— М. Наука., 1965. — 408 с.
2. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
3. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Факториал. — 1997. — 512 с.
4. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
5. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа. — 1963. — 546 с.
6. *Чуйко С.М.* Нетерова краевая задача в особом критическом случае // Доп. НАН України. — 2007. — №. 2. — С. 26–30.
7. *Чуйко С.М., Старкова О.В.* Автономные краевые задачи в частном критическом случае // Динамические системы. — 2009. — Т. 27. — С. 127–142.
8. *Чуйко С.М., Старкова О.В., Пирус О.Е.* Нелинейные нетеровы краевые задачи, не разрешенные относительно производной // Динамические системы. — Т. 2(30), №1–2. — 2012. — С. 169–186.
9. *Чуйко С.М., Старкова О.В., Чуйко А.С.* Автономная нетерова краевая задача в частном критическом случае // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 4. — С. 337–357.
10. *Чуйко С.М., Чуйко А.С.* О приближенном решении автономных нетеровых краевых задач методом наименьших квадратов // Динамические системы. — 2011. — Т. 29. — С. 103–111.
11. *Boichuk A.A., Chuiko S.M.* Autonomous weakly nonlinear boundary value problems // Differential Equations. — 1992. — V. 28, Is. 10. — P. 1668–1674.
12. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.— Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.
13. *Boichuk I.A., Starkova O.V., Chuiko S.M.* Weakly perturbed nonlinear boundary-value problem in critical case // Studies of the University of Žilina. Math. series. — 2009. — V. 23, Is. 1. — P. 1–8.
14. *Chuiko S.M.* On approximate solution of boundary-value problems by the least squares method // Nonlinear Oscillations. — 2008. — V. 11, Is. 4. — P. 585–604.
15. *Chuiko S.M.* Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary-value problem // Nonlinear Oscillations. — 2006. — V. 9, Is. 3. — P. 405–422.

16. *Chuiko S.M.* Weakly nonlinear boundary-value problem in a special critical case // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — V. 61, Is. 4. — З. 657–673.
17. *Chuiko S.M., Boichuk I.A.* Autonomous noetherian boundary-value problem in the critical case // Nonlinear Oscillations. — 2009. — V. 12, Is. 3. — P. 417–428.
18. *Chuiko S.M., Boichuk I.A.* Nonlinear Noetherian boundary-value problems in the critical case // Nonlinear Oscillations. — 2010. — V. 13, Is. 1. — P. 128–146.
19. *Chuiko S.M., Starkova O.V.* On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the least-squares method // Nonlinear Oscillations. — 2009. — V. 12, Is. 4. — P. 574–591.

Получена 27.05.2015