

УДК 539.3

О регулярности бесконечных систем для установившихся вынужденных колебаний ортотропных прямоугольных призм

А. Д. Ляшко, В. Н. Чехов

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. E-mail: chekhov40@mail.ru

Аннотация. Получено новое аналитическое представление решения для установившихся колебаний ортотропной прямоугольной призмы и соответствующая бесконечная система линейных алгебраических уравнений. По сравнению с известными аналитическими представлениями новое представление существенно упрощает анализ регулярности, существования решения бесконечной системы и применимость метода улучшенной редукции для численных оценок решения бесконечной системы. Впервые найдено счетное множество элементарных собственных частот и собственные формы колебаний ортотропных прямоугольных призм, которые соответствуют известным модам Ламе для изотропных призм. Представлен пример вычисления наименьшей собственной частоты колебаний. Численно исследовано увеличение верхней границы регулярности бесконечной системы при исключении из нее нескольких первых неизвестных.

Ключевые слова: установившиеся колебания ортотропной призмы, метод суперпозиции, регулярная бесконечная система линейных алгебраических уравнений, собственные частоты ортотропной прямоугольной призмы, аналитическое представление решения.

Введение

Ортотропные прямоугольные пластинки и призмы являются одними из наиболее распространенных и современных элементов конструкций в машиностроении и в строительстве. Результаты и обзоры исследований динамического поведения ортотропных тонких пластин и прямоугольных призм представлены в работах [5, 8–11]. Наиболее полно они исследованы вариационным методом Рэлея - Ритца [11]. Однако много исследователей применяют различные варианты метода суперпозиции [1, 2, 5–11], который в классическом варианте, включая задачи статики, приводит к оценкам решений бесконечной системы линейных алгебраических уравнений [1–10, 12]. В статике для изгиба прямоугольных пластин удачный вариант метода суперпозиции был предложен С.П. Тимошенко еще в 1939 году [6, 7, 12]. На распространение этого варианта [9, 10 и др.] повлияло существование нулевого предела для решения соответствующей бесконечной системы и «практическая» сходимости метода простой редукции. Об исходной бесконечной системе порой даже не упоминают. Однако, «практическая» сходимости затрагивает только прогибы пластины. Для напряжений и поперечных усилий необходимо дифференцировать 2-3 раза ряды для прогибов, что приводит к увеличению погрешности результатов. Теория регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений [1–3] позволяет улучшать сходимости рядов и даже аналитически просуммировать все ряды в представлении решения. Предлагаемое здесь новое аналитическое представление решения является обобщением на ортотропные призмы представления решения [4] для

изотропных призм. Авторы надеются упростить применение средств теории регулярных бесконечных систем в практических исследованиях.

1. Постановка задачи об установившихся вынужденных колебаниях ортотропной призмы

Рассматривается плоская деформация прямоугольной призмы $(x, y) \in \{-a, a\} \times \{-b, b\}$. Дифференциальные уравнения колебаний имеют следующую форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В случае ортотропного материала связь между компонентами вектора смещений и тензора напряжений может быть задана при помощи технических констант: $\nu_1, \nu_2, E_1, E_2, G$ — соответственно коэффициентов Пуассона и модулей Юнга в направлениях координатных осей Ox и Oy , а также модуля сдвига G :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_1} \sigma_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_2} \sigma_{yy} &= \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\tau_{xy}}{G} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Граничные условия зададим в несколько упрощенном виде, чтобы уменьшить громоздкость выкладок:

$$\begin{aligned} \left. \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_1} \tilde{\sigma}_{xx} \right|_{x=\pm a} &= f(y) \sin \omega t; & \left. \frac{\tilde{\tau}_{xy}}{G} \right|_{x=\pm a} &= 0; \\ \left. \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_2} \tilde{\sigma}_{yy} \right|_{y=\pm b} &= g(x) \sin \omega t; & \left. \frac{\tilde{\tau}_{xy}}{G} \right|_{y=\pm b} &= 0; \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ограничимся случаем симметричных по обоим осям колебаний.

Поскольку мы рассматриваем установившиеся вынужденные колебания, введем амплитудные характеристики перемещений:

$$\tilde{u} = u \sin \omega t, \quad \tilde{v} = v \sin \omega t \quad (1.4)$$

Подстановка (1.2) в (1.1) и переход к амплитудным характеристикам приведет к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(G + \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \nu_1 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\pi^2 G \Omega^2}{4} u &= 0, \\ \left(G + \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \nu_2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\pi^2 G \Omega^2}{4} v &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $\Omega = \frac{2\omega}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{G}}$.

2. Элементарные собственные формы ортотропных прямоугольных призм

Задача о вынужденных установившихся колебаниях упругих изотропных тел имеет набор элементарных мод, которые в [2] называются модами Ламе. Эти моды имеют следующий вид:

$$u = B \sin\left(\frac{\Omega_2}{\sqrt{2}}x\right) \cos\left(\frac{\Omega_2}{\sqrt{2}}y\right), v = -B \cos\left(\frac{\Omega_2}{\sqrt{2}}x\right) \sin\left(\frac{\Omega_2}{\sqrt{2}}y\right), \quad (2.1)$$

где $\Omega_2 = \Omega\pi/2$, B - произвольная постоянная. Данные выражения являются собственными формами только при

$$\Omega = (2m - 1)\sqrt{2}(m = 1, 2, 3, \dots); b/a = (2k - 1)/(2m - 1)(k = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.2)$$

Они характеризуются нулевыми значениями объемного расширения и касательных напряжений во всем объеме.

Для ортотропного случая также можно найти решения, которые являются собственными формами для определенных соотношений сторон. Для того, чтобы их получить, будем искать перемещение в следующем виде:

$$U = \cos(py) \sin(\alpha x), V = A \sin(py) \cos(\alpha x). \quad (2.3)$$

Две неизвестные из трёх могут быть найдены из того условия, что перемещения должны удовлетворять уравнениям (1.5). Третью неизвестную найдем из условия тождественного равенства нулю касательных напряжений. После умножения найденных перемещений на одинаковую постоянную, они примут следующий вид:

$$U = \sqrt{\frac{1 + \nu_1}{1 - \nu_1\nu_2}} \frac{1}{\Omega_{12}} \frac{\cos\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}}y\right) \sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}}x\right)}{\sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}}b\right) \sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}}a\right)}, \quad (2.4)$$

$$V = -\sqrt{\frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_1\nu_2}} \frac{1}{\Omega_{11}} \frac{\sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}}y\right) \cos\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}}x\right)}{\sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}}b\right) \sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}}a\right)}.$$

Здесь $\Omega_2 = \pi\Omega/2$, $\Omega_{11} = \Omega_2 \sqrt{G(1 - \nu_1\nu_2)/E_1}$ и $\Omega_{12} = \Omega_2 \sqrt{G(1 - \nu_1\nu_2)/E_2}$. Этим перемещениям согласно закону Гука соответствуют следующие напряжения:

$$\frac{1 - \nu_1\nu_2}{E_1} \sigma_{xx} = \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \frac{\cos\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}}x\right) \cos\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}}y\right)}{\sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}}a\right) \sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}}b\right)}, \quad (2.5)$$

$$\frac{1 - \nu_1\nu_2}{E_1} \sigma_{yy} = -\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}} \frac{\cos\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}}x\right) \cos\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}}y\right)}{\sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}}a\right) \sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}}b\right)},$$

$$\frac{\tau_{xy}}{G} = 0.$$

Данные выражения будут собственными формами, если они будут являться решением однородной краевой задачи. Это возможно при следующих соотношениях сторон и частотах:

$$\frac{b}{a} = \frac{1 + 2l}{1 + 2k} \sqrt{\frac{(1 + \nu_1)\nu_2}{(1 + \nu_2)\nu_1}}, \quad (2.6)$$

$$\Omega a = (1 + 2k) \sqrt{\frac{E_1}{G(1 + \nu_1)}}, \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

В изотропном случае, когда $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $E_1 = E_2 = E$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, данные выражения в точности совпадают с известными модами Ламе (2.3). Таким образом можно считать, что (2.4) является их обобщением на случай ортотропной анизотропии.

3. Представление решения для перемещений

Согласно [5] общее решение для перемещений будем искать в следующем виде:

$$u = \frac{Y_0}{\Omega_{11}} \frac{\sin \Omega_{11} x}{\sin \Omega_{11} a} + \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(-\frac{p_{1n}(p_{2n}^2 \nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)\alpha_n} \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{\operatorname{sh} p_{1n} b} + \right. \\ \left. + \frac{p_{2n}(p_{1n}^2 \nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)\alpha_n} \frac{\operatorname{ch} p_{2n} y}{\operatorname{sh} p_{2n} b} \right) \sin \alpha_n x + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(-\frac{q_{1m}(q_{2m}^2 \nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2)}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)\beta_m} \operatorname{Coff}(\beta_m, q_{1m}, E_2) \frac{\operatorname{sh} q_{1m} x}{\operatorname{sh} q_{1m} a} + \right. \\ \left. + \frac{q_{2m}(q_{1m}^2 \nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2)}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)\beta_m} \operatorname{Coff}(\beta_m, q_{2m}, E_2) \frac{\operatorname{sh} q_{2m} x}{\operatorname{sh} q_{2m} a} \right) \cos \beta_m y, \quad (3.1)$$

$$v = \frac{X_0}{\Omega_{12}} \frac{\sin \Omega_{12} y}{\sin \Omega_{12} b} + \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(-\frac{q_{1m}(q_{2m}^2 \nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2)}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)\beta_m} \frac{\operatorname{ch} q_{1m} x}{\operatorname{sh} q_{1m} a} + \right. \\ \left. + \frac{q_{2m}(q_{1m}^2 \nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2)}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)\beta_m} \frac{\operatorname{ch} q_{2m} x}{\operatorname{sh} q_{2m} a} \right) \sin \beta_m y + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(-\frac{p_{1n}(p_{2n}^2 \nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)\alpha_n} \operatorname{Coff}(\alpha_n, p_{1n}, E_1) \frac{\operatorname{sh} p_{1n} y}{\operatorname{sh} p_{1n} b} + \right. \\ \left. + \frac{p_{2n}(p_{1n}^2 \nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)\alpha_n} \operatorname{Coff}(\alpha_n, p_{2n}, E_1) \frac{\operatorname{sh} p_{2n} y}{\operatorname{sh} p_{2n} b} \right) \cos \alpha_n x, \quad (3.2)$$

где

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{a}, \quad \beta_m = \frac{\pi m}{b}, \quad \operatorname{Coff}(\gamma, r, E) = \frac{(1 - \nu_1 \nu_2)(r^2 + \Omega_2^2) - \gamma^2 E/G}{(1 + \nu_1 E/2G - \nu_1 \nu_2)r\gamma}.$$

Величины p_{1n} , p_{2n} , q_{1m} , q_{2m} являются корнями следующих биквадратных уравнений:

$$p^4 + \left(\Omega_{12}^2 + \Omega_2^2 - \left(\frac{E_1}{G} - 2\nu_1 \right) \alpha_n^2 \right) p^2 + \frac{\nu_1}{\nu_2} (\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_2^2) = 0, \\ q^4 + \left(\Omega_{11}^2 + \Omega_2^2 - \left(\frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \beta_m^2 \right) q^2 + \frac{\nu_2}{\nu_1} (\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)(\beta_m^2 - \Omega_2^2) = 0.$$

В [4] представление решения строилось таким образом, чтобы при подстановке всех неизвестных равными единице, ряды для перемещений и напряжений суммировались к выражениям, совпадающим с модами Ламе (2.3). Данный подход оказался плодотворным и в случае колебаний ортотропной призмы. Для того, чтобы получить тождества, были найдены значения X_n, Y_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), при которых получаются перемещения (2.4):

$$\begin{aligned} \tilde{X}_0 &= -\frac{1}{\Omega_{11}a} \sqrt{\frac{(1+\nu_2)\nu_1}{(1+\nu_1)\nu_2}}, & \tilde{X}_n &= \frac{2}{a} \sqrt{\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}} \frac{\alpha_n^2}{\Omega_{11}^2 - \alpha_n^2(1-\nu_1\nu_2)/(1+\nu_1)}, \\ \tilde{Y}_0 &= \frac{1}{\Omega_{12}b} \sqrt{\frac{(1+\nu_1)\nu_2}{(1+\nu_2)\nu_1}}, & \tilde{Y}_m &= -\frac{2}{b} \sqrt{\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}} \frac{\beta_m^2}{\Omega_{12}^2 - \beta_m^2(1-\nu_1\nu_2)/(1+\nu_2)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Используя эти значения неизвестных, мы можем выписать следующие тождества внутри прямоугольной области:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1\nu_2}} \frac{1}{\Omega_{12}} \frac{\sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}} x\right) \cos\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}} y\right)}{\sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}} a\right) \sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}} b\right)} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}} \frac{1}{\Omega_{12}^2} \frac{\sin \Omega_{11} x}{\sin \Omega_{11} a} + \\ & \frac{2}{a} \sqrt{\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n (-1)^n}{\Omega_{11}^2 - \alpha_n^2(1-\nu_1\nu_2)/(1+\nu_1)} \left(-\frac{p_{1n}(p_{2n}^2\nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2) \operatorname{ch} p_{1n} y}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2) \operatorname{sh} p_{1n} b} + \right. \\ & \left. + \frac{p_{2n}(p_{1n}^2\nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2) \operatorname{ch} p_{2n} y}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2) \operatorname{sh} p_{2n} b} \right) \sin \alpha_n x - \frac{2}{b} \sqrt{\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m (-1)^m}{\Omega_{12}^2 - \beta_m^2(1-\nu_1\nu_2)/(1+\nu_2)} \times \\ & \times \left(-\frac{q_{1m}(q_{2m}^2\nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2)}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)} \operatorname{Coff}(\beta_m, q_{1m}, E_2) \frac{\operatorname{sh} q_{1m} x}{\operatorname{sh} q_{1m} a} + \right. \\ & \left. + \frac{q_{2m}(q_{1m}^2\nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2)}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)} \operatorname{Coff}(\beta_m, q_{2m}, E_2) \frac{\operatorname{sh} q_{2m} x}{\operatorname{sh} q_{2m} a} \right) \cos \beta_m y, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\frac{1+\nu_2}{1-\nu_1\nu_2}} \frac{1}{\Omega_{11}} \frac{\cos\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}} x\right) \sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}} y\right)}{\sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}} a\right) \sin\left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}} b\right)} = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}} \frac{1}{\Omega_{11}^2} \frac{\sin \Omega_{12} y}{\sin \Omega_{12} b} - \\ & -\frac{2}{b} \sqrt{\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m (-1)^m}{\Omega_{12}^2 - \beta_m^2(1-\nu_1\nu_2)/(1+\nu_2)} \left(-\frac{q_{1m}(q_{2m}^2\nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2) \operatorname{ch} q_{1m} x}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2) \operatorname{sh} q_{1m} a} + \right. \\ & \left. + \frac{q_{2m}(q_{1m}^2\nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2) \operatorname{ch} q_{2m} x}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2) \operatorname{sh} q_{2m} a} \right) \sin \beta_m y + \frac{2}{a} \sqrt{\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n (-1)^n}{\Omega_{11}^2 - \alpha_n^2(1-\nu_1\nu_2)/(1+\nu_1)} \times \\ & \times \left(-\frac{p_{1n}(p_{2n}^2\nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)} \operatorname{Coff}(\alpha_n, p_{1n}, E_1) \frac{\operatorname{sh} p_{1n} y}{\operatorname{sh} p_{1n} b} + \right. \\ & \left. + \frac{p_{2n}(p_{1n}^2\nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)} \operatorname{Coff}(\alpha_n, p_{2n}, E_1) \frac{\operatorname{sh} p_{2n} y}{\operatorname{sh} p_{2n} b} \right) \cos \alpha_n x, \end{aligned} \quad (3.5)$$

С помощью подстановки $X_n = \hat{X}_n/\tilde{X}_n, Y_n = \hat{Y}_n/\tilde{Y}_n$ в (3.1) и (3.2) получим представление решения, обладающее тем свойством, что при подстановке всех неизвестных равными

единице, их можно просуммировать с помощью тождеств, указанных выше:

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{N_1}{b} \frac{Y_0}{\Omega_{12}^2} \frac{\sin \Omega_{11} x}{\sin \Omega_{11} a} - \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_2 \alpha_n X_n (-1)^n}{\Omega_{11}^2 - \alpha_n^2 \frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_1}} \left(\frac{p_{1n}(p_{2n}^2\nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)} \frac{\text{ch } p_{1n}y}{\text{sh } p_{1n}b} - \right. \\
 & \left. - \frac{p_{2n}(p_{1n}^2\nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)} \frac{\text{ch } p_{2n}y}{\text{sh } p_{2n}b} \right) \sin \alpha_n x + \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_1 \beta_m Y_m (-1)^m}{\Omega_{12}^2 - \beta_m^2 \frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_2}} \times \\
 & \times \left(\frac{q_{1m}(q_{2m}^2\nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2)}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)} \text{Coff}(\beta_m, q_{1m}, E_2) \frac{\text{sh } q_{1m}x}{\text{sh } q_{1m}a} - \right. \\
 & \left. - \frac{q_{2m}(q_{1m}^2\nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2)}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)} \text{Coff}(\beta_m, q_{2m}, E_2) \frac{\text{sh } q_{2m}x}{\text{sh } q_{2m}a} \right) \cos \beta_m y,
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 v = & -\frac{N_2}{a} \frac{X_0}{\Omega_{11}^2} \frac{\sin \Omega_{12} y}{\sin \Omega_{12} b} + \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_1 \beta_m Y_m (-1)^m}{\Omega_{12}^2 - \beta_m^2 \frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_2}} \left(\frac{q_{1m}(q_{2m}^2\nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2)}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)} \frac{\text{ch } q_{1m}x}{\text{sh } q_{1m}a} - \right. \\
 & \left. - \frac{q_{2m}(q_{1m}^2\nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2)}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)} \frac{\text{ch } q_{2m}x}{\text{sh } q_{2m}a} \right) \sin \beta_m y - \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_2 \alpha_n X_n (-1)^n}{\Omega_{11}^2 - \alpha_n^2 \frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_1}} \times \\
 & \times \left(\frac{p_{1n}(p_{2n}^2\nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)} \text{Coff}(\alpha_n, p_{1n}, E_1) \frac{\text{sh } p_{1n}y}{\text{sh } p_{1n}b} - \right. \\
 & \left. - \frac{p_{2n}(p_{1n}^2\nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)} \text{Coff}(\alpha_n, p_{2n}, E_1) \frac{\text{sh } p_{2n}y}{\text{sh } p_{2n}b} \right) \cos \alpha_n y,
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь

$$N_1 = \sqrt{\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}}, N_2 = \sqrt{\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}}.$$

4. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений

Напряжения получим, подставляя (3.6), (3.7) в (1.2):

$$\begin{aligned}
 \frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1} \sigma_{xx} = & \frac{N_1}{b} \frac{Y_0 \Omega_{11}}{\Omega_{12}^2} \frac{\cos \Omega_{11} x}{\sin \Omega_{11} a} - \frac{N_2}{a} \frac{X_0 \Omega_{12} \nu_2}{\Omega_{11}^2} \frac{\cos \Omega_{12} y}{\sin \Omega_{12} b} - \\
 & - \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_2 \alpha_n X_n (-1)^n}{\Omega_{11}^2 - \alpha_n^2 \frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_1}} \left((\alpha_n + p_{1n} \nu_2 \text{Coff}(\alpha_n, p_{1n}, E_1)) \frac{p_{1n}(p_{2n}^2\nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)} \times \right. \\
 & \times \frac{\text{ch } p_{1n}y}{\text{sh } p_{1n}b} - (\alpha_n + p_{2n} \nu_2 \text{Coff}(\alpha_n, p_{2n}, E_1)) \frac{p_{2n}(p_{1n}^2\nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)} \frac{\text{ch } p_{2n}y}{\text{sh } p_{2n}b} \Big) \cos \alpha_n x + \\
 & + \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_1 \beta_m Y_m (-1)^m}{\Omega_{12}^2 - \beta_m^2 \frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_2}} \left((\beta_m \nu_2 + q_{1m} \text{Coff}(\beta_m, q_{1m}, E_2)) \frac{q_{1m}(q_{2m}^2\nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2)}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)} \times \right. \\
 & \times \frac{\text{ch } q_{1m}x}{\text{sh } q_{1m}a} - (\beta_m \nu_2 + q_{2m} \text{Coff}(\beta_m, q_{2m}, E_2)) \frac{q_{2m}(q_{1m}^2\nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2)}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)} \frac{\text{ch } q_{2m}x}{\text{sh } q_{2m}a} \Big) \cos \beta_m y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_2} \sigma_{yy} &= \frac{N_1}{b} \frac{Y_0 \Omega_{11} \nu_1 \cos \Omega_{11} x}{\Omega_{12}^2 \sin \Omega_{11} a} - \frac{N_2}{a} \frac{X_0 \Omega_{12} \cos \Omega_{12} y}{\Omega_{11}^2 \sin \Omega_{12} b} - \\
&- \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_2 \alpha_n X_n (-1)^n}{\Omega_{11}^2 - \alpha_n^2 \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{1 + \nu_1}} \left((\alpha_n \nu_1 + p_{1n} \text{Coff}(\alpha_n, p_{1n}, E_1)) \frac{p_{1n} (p_{2n}^2 \nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2) \text{ch } p_{1n} y}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2) (\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2) \text{sh } p_{1n} b} - \right. \\
&- (\alpha_n \nu_1 + p_{2n} \text{Coff}(\alpha_n, p_{2n}, E_1)) \frac{p_{2n} (p_{1n}^2 \nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2) \text{ch } p_{2n} y}{(p_{1n}^2 - p_{2n}^2) (\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2) \text{sh } p_{2n} b} \left. \right) \cos \alpha_n x + \\
&+ \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_1 \beta_m Y_m (-1)^m}{\Omega_{12}^2 - \beta_m^2 \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{1 + \nu_2}} \left((\beta_m + q_{1m} \nu_1 \text{Coff}(\beta_m, q_{1m}, E_2)) \frac{q_{1m} (q_{2m}^2 \nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2) \text{ch } q_{1m} x}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2) (\beta_m^2 - \Omega_{12}^2) \text{sh } q_{1m} a} - \right. \\
&- (\beta_m + q_{2m} \nu_1 \text{Coff}(\beta_m, q_{2m}, E_2)) \frac{q_{2m} (q_{1m}^2 \nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2) \text{ch } q_{2m} x}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2) (\beta_m^2 - \Omega_{12}^2) \text{sh } q_{2m} a} \left. \right) \cos \beta_m y \\
\frac{\tau_{xy}}{G} &= -\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_2 \alpha_n X_n (-1)^n (p_{1n}^2 \nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2) (p_{2n}^2 \nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{(\Omega_{11}^2 - \alpha_n^2 \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{1 + \nu_1}) (p_{1n}^2 - p_{2n}^2) (\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2) ((1 - \nu_1 \nu_2) G / E_1 + \nu_2)} \times \\
&\times \left(\frac{\text{sh } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} b} - \frac{\text{sh } p_{2n} y}{\text{sh } p_{2n} b} \right) \sin \alpha_n x - \\
&- \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_1 \beta_m Y_m (-1)^m (q_{1m}^2 \nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2) (q_{2m}^2 \nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2)}{(\Omega_{12}^2 - \beta_m^2 \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{1 + \nu_2}) (q_{1m}^2 - q_{2m}^2) (\beta_m^2 - \Omega_{12}^2) ((1 - \nu_1 \nu_2) G / E_1 + \nu_2)} \times \\
&\times \left(\frac{\text{sh } q_{1m} x}{\text{sh } q_{1m} a} - \frac{\text{sh } q_{2m} x}{\text{sh } q_{2m} a} \right) \sin \beta_m y,
\end{aligned}$$

Касательные напряжения тождественно обращаются в нуль на гранях призмы благодаря выбору представления решения. А подстановка в граничные условия (1.3) выражений для нормальных напряжений после известной процедуры [1] метода суперпозиции приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов X_k, Y_k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Свободные члены в бесконечной системе пропорциональны коэффициентам в рядах Фурье для граничных значений нормальных напряжений в (1.3):

$$f(y) = f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m f_m \cos \beta_m y; \quad g(x) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n g_n \cos \alpha_n x \quad (4.1)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
X_0 \cot(\Omega_{12} b) N_2^2 &= \frac{\nu_2}{\Omega_{12} b} Y_0 + \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \frac{\Omega_{12}^3 \nu_2}{(\beta_m^2 \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{1 + \nu_2} - \Omega_{12}^2) (\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)} - a \Omega_{11} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} N_2 g_0 \\
Y_0 \cot(\Omega_{11} a) N_1^2 &= \frac{\nu_1}{\Omega_{11} a} X_0 + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{\Omega_{11}^3 \nu_1}{(\alpha_n^2 \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{1 + \nu_1} - \Omega_{11}^2) (\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)} + b \Omega_{12} \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}} N_1 f_0 \\
X_n \delta_n N_2^2 &= \frac{1}{b} Y_0 \frac{\nu_2}{\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2} + \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \frac{A_{n,m}}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2) (\alpha_n^2 + q_{2m}^2) (\beta_m^2 \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{1 + \nu_2} - \Omega_{12}^2)} + \frac{a}{2} N_2 g_n \\
Y_m \delta_m^* N_1^2 &= \frac{1}{a} X_0 \frac{\nu_1}{\beta_m^2 - \Omega_{12}^2} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{A_{n,m}}{(\beta_m^2 + p_{1n}^2) (\beta_m^2 + p_{2n}^2) (\alpha_n^2 \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{1 + \nu_1} - \Omega_{11}^2)} - \frac{b}{2} N_1 f_m
\end{aligned} \right. \quad (4.2)$$

Здесь

$$A_{n,m} = \beta_m^2 (\alpha_n^2 (1 - \nu_1 \nu_2) - \nu_1 \Omega_{11}^2) - \nu_1 \Omega_{11}^2 (\alpha_n^2 - \Omega_{12}^2),$$

$$\begin{aligned} \delta_n &= \frac{\alpha_n}{(p_{2n}^2 - p_{1n}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)(\alpha_n^2 \frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_1} - \Omega_{11}^2)} \times \\ &\quad \times (-p_{1n}(p_{2n}^2\nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)(p_{1n} \text{Coff}(\alpha_n, p_{1n}, E_1) + \nu_1\alpha_n) \text{cth } p_{1n}b + \\ &\quad + p_{2n}(p_{1n}^2\nu_2 + \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)(p_{2n} \text{Coff}(\alpha_n, p_{2n}, E_1) + \nu_1\alpha_n) \text{cth } p_{2n}b), \\ \delta_m^* &= \frac{\beta_m}{(q_{2m}^2 - q_{1m}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)(\beta_m^2 \frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_2} - \Omega_{12}^2)} \times \\ &\quad \times (-q_{1m}(q_{2m}^2\nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2)(q_{1m} \text{Coff}(\beta_m, q_{1m}, E_2) + \nu_2\beta_m) \text{cth } q_{1m}a + \\ &\quad + q_{2m}(q_{1m}^2\nu_1 + \beta_m^2 - \Omega_{12}^2)(q_{2m} \text{Coff}(\beta_m, q_{2m}, E_2) + \nu_2\beta_m) \text{cth } q_{2m}a). \end{aligned}$$

В случае амплитуд элементарного напряженного состояния (2.5) граничные значения напряжения на краях $x = \pm a$ и $y = \pm b$ приводят к следующим коэффициентам рядов Фурье.

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{\Omega_2 b} \sqrt{\frac{\nu_2 E_2}{G(1+\nu_2)\nu_1}} \cot \left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}} a \right) \\ f_m &= \frac{2}{b} \frac{\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_1}}}{\Omega_2^2 \frac{G(1+\nu_2)}{E_2} - \beta_m^2} \cot \left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}} a \right) \quad m = 1, 2, 3, \dots \\ g_0 &= -\frac{1}{\Omega_2 a} \sqrt{\frac{\nu_1 E_1}{G(1+\nu_1)\nu_2}} \cot \left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}} b \right) \\ g_n &= -\frac{2}{a} \frac{\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_2}}}{\Omega_2^2 \frac{G(1+\nu_1)}{E_1} - \alpha_n^2} \cot \left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}} b \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

5. Формулы для оценки регулярности бесконечной системы

Для исследования регулярности бесконечной системы необходимо найти сумму абсолютных величин элементов матрицы для каждого уравнения системы, предварительно разделив каждое из уравнений на коэффициент при неизвестной в левой части. Для нахождения сумм коэффициентов уравнений воспользуемся методом, предложенным в [4]. Специальному выбору представления решения суммы коэффициентов в строках получаются почти автоматически. Оно было построено так, чтобы краевая задача (4.3) имела точное решение – $X_k = Y_k = 1$ ($k=0,1,2,\dots$). Поэтому при подстановке в (4.2) X_k, Y_k ($k=0,1,2,\dots$) и коэффициентов (4.3), каждое уравнение системы обращается в тождество. Из этих тождеств и находятся суммы бесконечных рядов относительно коэффициентов при неизвестных. Для уравнений с неизвестными X_0 и Y_0 слева обозначаем суммы справа через S_{x0} и S_{y0} . Например

$$\begin{aligned} S_{x0} &= \text{tg}(\Omega_{12}b) \frac{1+\nu_1}{1+\nu_2} \left(\frac{\nu_2}{\Omega_{12}b} + \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Omega_{12}^3 \nu_2}{(\beta_m^2 \frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_2} - \Omega_{12}^2)(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)} \right). \\ S_{y0} &= \text{tg}(\Omega_{11}a) \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1} \left(\frac{\nu_1}{\Omega_{11}a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_{11}^3 \nu_1}{(\alpha_n^2 \frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_1} - \Omega_{11}^2)(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем точные аналитические суммы бесконечных рядов

$$S_{x0} = 1 - \frac{\operatorname{tg} \Omega_{12} b}{\operatorname{tg} \left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}} b \right)} \sqrt{\frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_2}}, S_{y0} = 1 - \frac{\operatorname{tg} \Omega_{11} a}{\operatorname{tg} \left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}} a \right)} \sqrt{\frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_1}}. \quad (5.1)$$

Аналогичным образом, обозначаемые через S_{xn} и S_{ym} суммы рядов для уравнений с неизвестными X_n и Y_m слева получаем их точные аналитические значения:

$$S_{xn} = 1 - \frac{1}{\delta_n} \cot \left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_2)}{E_2}} b \right) \sqrt{\frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_2}} \frac{\Omega_{12}}{\alpha_n^2 \frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_1} - \Omega_{11}^2} \quad (5.2)$$

$$S_{ym} = 1 - \frac{1}{\delta_m^*} \cot \left(\Omega_2 \sqrt{\frac{G(1+\nu_1)}{E_1}} a \right) \sqrt{\frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_2}} \frac{\Omega_{11}}{\beta_m^2 \frac{1-\nu_1\nu_2}{1+\nu_2} - \Omega_{12}^2} \quad (5.3)$$

6. Численное исследование регулярности системы

Был рассмотрен случай $\nu_1 = 0.072$, $\nu_2 = 0.036$, $E_1 = 1.2$, $E_2 = 0.6$, $G = 0.07$, $a = 1$, $b = \sqrt{\frac{(1+\nu_1)\nu_2}{(1+\nu_2)\nu_1}} \approx 0.719$. Выбор соотношения сторон обусловлен тем, что при данном b/a существует ряд элементарных собственных частот (2.4). Первой такой частотой является $\Omega^* = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{E_1}{G(1+\nu_1)}} \approx 4$.

Для того, чтобы оценить регулярность системы (4.2), фиксируем частоту Ω и вычисляем коэффициенты при неизвестных x_n , y_m . Оказывается, что в интервале $0 < \Omega < \sqrt{\frac{E_1}{G(1+\nu_1)}}$ все коэффициенты оказываются положительными и суммы абсолютных величин коэффициентов при неизвестных совпадают с выражениями для сумм. Для наглядности оценок регулярности бесконечной системы (4.2) на рис. 1 для уравнений для X_n и Y_m соответственно.

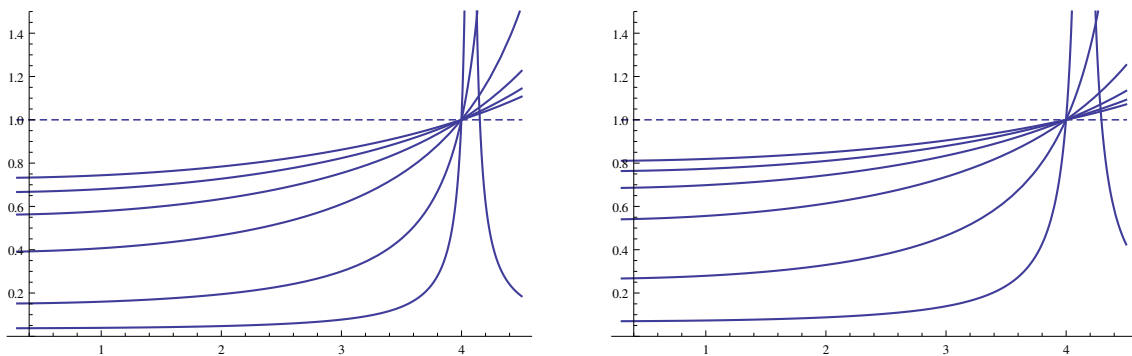


Рис. 1. Сумма коэффициентов в уравнениях для X_k и Y_k , $k = 0, 1, \dots, 5$

Из рисунка видно, что условие регулярности выполнено для всех уравнений на интервале $0 < \Omega < \Omega^*$.

Если $\Omega > \Omega^*$, то условия регулярности не выполняются ни для одного уравнения. Бесконечная система (4.2) в зависимости от частоты оказывается или регулярной или

не удовлетворяет условиям регулярности полностью. Но квазирегулярной бесконечная система не является ни при каком значении частоты колебаний.

Легко проверить, что при частоте $\Omega = \Omega^*$ выражения для сумм коэффициентов (5.1), (5.2), (5.3) становятся равными 1.

Частота $\Omega = \Omega^*$ является наименьшей собственной частотой для данного случая. Меньших, чем Ω^* собственных частот нет из-за существования ограниченного решения регулярной бесконечной системы.

В зависимости от количества исключенных неизвестных вычисляются интервалы, в которых все коэффициенты положительны (Ω^{poz}) и все уравнения регулярны (Ω^{reg}). Вычисленные границы этих интервалов представлены в таблицах 1 и 2. В клетке таблицы (i, j) указана верхняя граница соответствующего интервала после исключения уравнений относительно X_n ($n = 0, 1, 2, \dots, i - 1$) и Y_m ($m = 0, 1, 2, \dots, j - 1$)

Таблица 1. Границы интервалов положительности

	0	1	2	3	4	5	6
0	4.07556	4.07556	4.07556	4.07556	4.07556	4.07556	4.07556
1	4.14577	4.39596	4.39596	4.39596	4.39596	4.39596	4.39596
2	4.14577	4.80254	5.52168	5.52168	5.52168	5.52168	5.52168
3	4.14577	4.80254	6.71334	7.0409	7.0409	7.0409	7.0409
4	4.14577	4.80254	6.71334	8.75367	8.75367	8.75367	8.75367
5	4.14577	4.80254	6.71334	9.07559	10.5665	10.5665	10.5665
6	4.14577	4.80254	6.71334	9.07559	11.6213	12.4357	12.4357

Таблица 2. Границы интервалов регулярности

	0	1	2	3	4	5	6
0	3.99893	3.99893	3.99893	3.99893	3.99893	3.99893	3.99893
1	3.99893	4.05511	4.11204	4.11221	4.11226	4.11229	4.1123
2	3.99893	4.05617	5.22358	6.73153	8.43397	9.5908	9.99008
3	3.99893	4.05633	6.32894	8.19141	10.0594	10.2369	10.3349
4	3.99893	4.05638	7.43659	8.19141	10.0594	10.2369	10.3349
5	3.99893	4.0564	8.37792	8.85893	10.0594	10.2369	10.3349
6	3.99893	4.05641	8.92589	11.0616	13.2724	13.6647	13.8673

7. Обсуждение полученных результатов

Предлагается обобщение результатов работы [4] для установившихся колебаний изотропных прямоугольных призм на установившиеся колебания ортотропных прямоугольных призм. Построено новое аналитическое представление решения для установившихся гармонических колебаний ортотропной прямоугольной призмы в постановке плоской

деформации. Методом суперпозиции выведена бесконечная система линейных алгебраических уравнений, которая отличается от известных [5, 8] тем, что при специальных значениях свободных членов эта бесконечная система имеет точное единичное решение ($X_n = Y_n = 1$). Подстановка этих специальных свободных членов и отвечающего им единичного решения превращает все уравнения бесконечной системы в тождества, которые элементарно позволяют записать аналитические выражения для сумм коэффициентов каждой строки матрицы бесконечной системы. Соответственно упрощаются оценки регулярности бесконечной системы и появляется возможность проверить достаточные условия существования и единственности решения бесконечной системы при заданных граничных условиях.

При дополнительном условии неотрицательности всех коэффициентов бесконечной системы решение полученной здесь бесконечная системы имеет ненулевой конечный предел при возрастании номеров неизвестных. Это важное свойство бесконечной системы связано с тем, что матрица бесконечной системы допускает единичное решение при специальных свободных членах. С другой стороны это свойство позволяет воспользоваться эффективным методом «улучшенной редукции» [1] для численных оценок решения бесконечной системы.

Новое представление решения связано с множеством элементарных собственных форм колебаний для изотропных призм, которые называются [2] модами Ламе. Соответственно было найдено обобщение элементарных мод Ламе для установившихся колебаний ортотропных прямоугольных призм.

С помощью выведенных точных значений сумм коэффициентов для строк матрицы численно оценена регулярность бесконечной системы при фиксированном отношении сторон прямоугольной области и при выбранных значениях коэффициентов упругости ортотропной призмы. При этом наименьшая собственная частота призмы совпала с первой из частот элементарной моды Ламе. Интересно, что при частотах больших, чем наименьшая собственная частота, ни одно из уравнений бесконечной системы не удовлетворяет условию регулярности. Иными словами бесконечная система либо является регулярной (при частотах меньших, чем первая собственная частота), либо совсем не удовлетворяет условиям регулярности (при частотах больших, чем первая собственная частота). Квазирегулярной эта бесконечная система не является ни при каких частотах установившихся колебаний.

Если исключать из бесконечной системы несколько первых неизвестных по способу, предложенному в [3] при рассмотрении квазирегулярных бесконечных систем, то границы интервалов частот колебаний, в пределах которых все коэффициенты при оставленных неизвестных положительны, увеличиваются (Табл. 1). Увеличиваются и диапазоны частот колебаний, в пределах которых выполняются условия регулярности всех бесконечных уравнений (Табл. 2). Но вне интервала регулярности ни одно из уравнений системы относительно оставленных неизвестных не удовлетворяет условиям регулярности. Системы относительно оставленных неизвестных остаются либо регулярными, либо нерегулярными. Но квазирегулярными они не являются ни при каких частотах колебаний. При этом собственные частоты призмы встречаются среди нулей определителя конечной системы относительно исключенных первых неизвестных.

Список цитируемых источников

1. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. —

- К.: Наук. думка, 1978. — 264 с.
- V.T. Grinchenko* Equilibrium and steady-state oscillations of elastic bodies of finite dimensions (Russian). Киев: Naukova Dumka. 264 (1978).
2. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. — К.: Наук. думка, 1981. — 284 с.
V.T. Grinchenko, V.V. Meleshko Harmonic vibrations and waves in elastic bodies (Russian). Киев: Naukova Dumka. 284 (1981).
 3. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. — М. — Л.: Физматгиз, 1962. — 708 с.
L.V. Kantorovich, V.I. Krylov Approximate methods of higher analysis. Noordhoff, Groningen (1958).
 4. *Пан А.В., Чехов В.Н.* Некоторые тождества для волновых уравнений и приложения их в исследовании вынужденных колебаний прямоугольной призмы // Крымская международная математическая конференция. Судак, Украина — Сб. Тезисов. 2013.— С. 77.
A.V. Pan, Chekhov V.N. Some identities for the wave equations and their applications in the study of forced oscillations of a rectangular prism //In Book of Abstr. Crimea International Mathematical Conf. Sudak, Ukraine, 77 (2013).
 5. *Папков С.О.* Установившиеся вынужденные колебания прямоугольной ортотропной призмы // Мат. методы и физ.-мех. поля. 2012 — 55, № 2. — С. 177–185.
S.O. Papkov Steady-state forced vibrations of a rectangular orthotropic plate // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 173, No. 2, April, 1–12 (2012).
 6. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки — М.: Наука, 1966. — 636 с.
S. Timoshenko, S. Woynowsky-Krieger Theory of plates and shells. New York: McGraw-Hill. 580 (1959).
 7. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. — М.: Машиностроение, 1985. — 472 с.
S.P. Timoshenko, D.H. Young, W. Weaver Vibration problems in engineering. 4th ed. New York, Wiley, 521 (1974).
 8. *Gorman D.J.* Free vibration analysis of rectangular plates, Elsevier, North Holland, Inc., New York: 1982, — 324 p.
 9. *Gorman D.J.* Accurate in-plane free vibration analysis of rectangular orthotropic plates // Journal of Sounds and Vibration 323 (2009), — 426–443 pp.
 10. *Gorman D.J., Yu S.D.* A review of the superposition method for computing free vibration eigenvalues of elastic structures // Computers and Structures — 2012, — 104–105, — 27–37 pp.
 11. *Leissa A.W.* Vibration of plates. — NASA SP-160, — 353 pp. 1969, reprint by The Acoustical Society of America, 1993.
 12. *Timoshenko S.P.* Bending of rectangular plates with clamped edges // In: Proc. Fifth Intern. Congress for Applied Mechanics. Wiley, New York — 1939, — 40–43 pp.

Получена 10.06.2015