

**А. И. ДВИРНЫЙ, В. И. СЛЫНЬКО. Теория нормальных форм А. Пуанкаре и ее приложения к теории устойчивости положений равновесия импульсных систем в особенных случаях.**

УДК 517.36

А. И. ДВИРНЫЙ, В. И. СЛЫНЬКО. Теория нормальных форм А. Пуанкаре и ее приложения к теории устойчивости положений равновесия импульсных систем в особенных случаях (русский) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 3–24.

Рассматривается задача об устойчивости положений равновесия одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (импульсных систем) в особенных случаях. На основе идей теории нормальных форм задача сводится к проблеме существования функции Ляпунова для некоторой модельной системы, содержащей лишь критические переменные. При этом используется последовательность нелинейных преобразований с ограниченными переменными коэффициентами. В качестве приложения полученных результатов рассмотрены два особенных случая устойчивости импульсных систем, аналогичных классическим случаям А. М. Ляпунова.

Ключевые слова: системы с импульсным воздействием, устойчивость по Ляпунову, нормальная форма, критический случай.

УДК 517.36

А. І. ДВІРНИЙ, В. І. СЛИНЬКО. Теорія нормальних форм А. Пуанкаре і її застосування до теорії стійкості станів рівноваги імпульсних систем в особливих випадках (російська) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 3–24.

Розглядається задача про стійкість положень рівноваги нелінійних систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією (імпульсних систем) в особливих випадках. Застосовуючи ідеї теорії нормальних форм задача про стійкість стану рівноваги зводиться до проблеми існування допоміжної функції Ляпунова для деякої модельної системи, тобто системи містить лише критичні змінні. При цьому використовується послідовність нелінійних перетворень з змінними обмеженими коефіцієнтами. В якості додатку отриманих результатів розглянуто два частинних особливих випадка, аналогічні класичним випадкам А.М. Ляпунова.

Ключові слова: системи з імпульсною дією, стійкість по Ляпунову, нормальні форми, критичний випадок.

MSC 2010: 70E05, 70E50

A. I. DVIRNY, V. I. SLYN'KO. The theory of normal forms of A. Poincare and its applications to the theory of stability of equilibrium pulse systems in special cases (Russian). *Din. Sist., Simferopol'*, vol. 3(31), no.1-2, 3–24 (2013).

The problem of stability of equilibrium states of nonlinear systems of differential equations with pulses (pulse systems) in special cases is considered. The problem of stability of the equilibrium state is reduced to the problem of existence of an auxiliary Lyapunov function for some model systems by using the ideas of the theory of normal forms. This system contains the critical variables only. A sequence of nonlinear transformations with variable bounded coefficients is used. Two special cases of special cases which are similar to the classical A. M. Lyapunov cases is considered as an application of new results.

Keywords: systems with impulse actions, Lyapunov stability, normal forms, critical cases.

---

**А. Л. ЗУЕВ, Ю. И. КУЧЕР. Стабилизация модели упругой балки с распределенными и сосредоточенными управляющими воздействиями.**

УДК 517.977+531.39

А. Л. ЗУЕВ, Ю. И. КУЧЕР. Стабилизация модели упругой балки с распределенными и сосредоточенными управляющими воздействиями (русский) // *Динамические системы*, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 25–35.

В работе рассмотрена задача стабилизации колебаний упругой шарнирно опертой балки с присоединенными пьезоэлементами и точечным управляющим механизмом. Математическая модель колебаний представлена в виде абстрактной задачи Коши в гильбертовом пространстве. Из условия невозрастания полной энергии на траекториях механической системы получены функции управления в виде обратной связи, обеспечивающие устойчивость по Ляпунову положения равновесия.

Ключевые слова: балка Эйлера-Бернулли, управление с обратной связью, устойчивость по Ляпунову.

УДК 517.977+531.39

О. Л. ЗУЄВ, Ю. І. КУЧЕР. Стабілізація моделі пружної балки із розподіленими та зосередженими керуючими впливами (російська) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 25–35.

У роботі розглянуто задачу стабілізації коливань пружної шарнірно опертої балки з приєднаними п'єзоелементами і точковим керуючим механізмом. Поставлено абстрактну задачу Коші у гільбертовому просторі. З умови незростання повної енергії механічної системи на траєкторіях отримано функції керування у вигляді зворотнього зв'язку, які забезпечують стійкість за Ляпуновим стану рівноваги системи.

Ключові слова: балка Ейлера-Бернуллі, керування зі зворотнім зв'язком, стійкість за Ляпуновим.

MSC 2010: 93D15

A. L. ZUYEV, J. I. KUCHER. Stabilization of a flexible beam model with distributed and lumped controls (Russian). Din. Sist., Simferopol', vol. 3(31), no.1-2, 25–35 (2013).

The stabilization problem is solved for simply supported flexible beam with attached piezoactuators and a point force. An abstract Cauchy problem is formulated in an appropriately chosen Hilbert space. Control functions are obtained using the condition of nonincreasing of the total energy of the mechanical system. The strong Lyapunov stability of the equilibrium is proved.

Keywords: Euler-Bernoulli beam, feedback control, Lyapunov stability.

---

**И. В. КАЛИНЮК, В. А. ЛИСЮТИН, Ж. В. МАЛЕНКО. Пространственная структура акустического поля в мелком море от линейного источника, расположенного в упругом полупространстве.**

УДК 534.231

И. В. КАЛИНЮК, В. А. ЛИСЮТИН, Ж. В. МАЛЕНКО. Пространственная структура акустического поля в мелком море от линейного источника, расположенного в упругом полупространстве (русский) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 37–44.

В статье описывается решение задачи определения поля акустического давления в жидкости, созданного точечным источником, расположенным в упругом полупространстве. Полученное решение обобщается на случай, когда источник протяженный. Показано, что вблизи эпицентра угловая направленность источника зависит от угла падения звуковой волны на плоскую

границу. Рассчитаны области асимметрии акустического поля с максимальными амплитудами давления.

Ключевые слова: акустические волны, геоакустическая эмиссия, морские землетрясения.

УДК 534.231

I. В. КАЛІНЮК, В. О. ЛІСЮТИН, Ж. В. МАЛЕНКО. Просторова структура акустичного поля в мілкому морі від лінійного джерела розташованого в пружному півпросторі (російська) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 37–44.

У статті описується рішення задачі про визначення поля акустичного тиску в рідині, створеного точковим джерелом, розташованим в пружному півпросторі. Отримане рішення узагальнюється на випадок, коли джерело протяжне. Показано, що поблизу епіцентру діаграма спрямованості залежить від кута падіння звукової хвилі. Расчитани області асиметрії акустичного поля і максимальних амплітуд тиску, які розташовані вздовж протяжного джерела.

Ключові слова: акустичні хвилі, акустична емісія, морські землетруси.

MSC 2010: 34D12

I. V. KALINYUK, V. A. LISIUTIN, J. V. MALENKO. The spatial structure of the acoustic field in shallow water from a line source in elastic half-space. (Russian). Din. Sist., Simferopol', vol. 3(31), no.1-2, 37–44 (2013).

The paper describes the solution to the problem of determining the field of acoustic pressure in the fluid created by a point source in an elastic half-space. The resulting solution is generalized to the case when the source is extended. It is shown that near epicenter pattern depends on the angle of the sound wave. Calculated asymmetry of the acoustic field, and the maximum pressure amplitudes, which are located along the extended source.

Keywords: acoustic waves, acoustic emission, sea earthquake.

---

**Ю. Л. КУДРЯШОВ. Самосопряженная дилатация операторного узла диссипативного оператора.**

УДК 517.432

Ю. Л. КУДРЯШОВ. Самосопряженная дилатация операторного узла диссипативного оператора (русский) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 45–48.

В статье на основе понятия операторного узла для ограниченных операторов вводится понятие операторного узла для произвольных диссипативных операторов с непустым множеством регулярных точек. С помощью операторов такого узла строится спектральное представление самосопряженной дилатации для неограниченного диссипативного плотно заданного оператора. Полученные результаты могут быть использованы для построения дилатаций конкретных операторов, их функциональных моделей и обобщенных собственных функций.

Ключевые слова: дилатация, диссипативный неограниченный оператор, операторный узел.

УДК 517.432

Ю. Л. КУДРЯШОВ. Самоспряженна дилатація операторного вузла диссипативного оператора (російська) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 45–48.

У статті на основі поняття операторного вузла для обмежених операторів вводится поняття операторного вузла для довільних диссипативних операторів з непорожньою множиною регулярних точок. За допомогою операторів такого вузла будується спектральне представлення самосопряженої дилатації для необмеженого диссипативного щільно заданого оператора. Отримані результати можуть бути використані для побудови дилатацій конкретних операторів, їх функціональних моделей і узагальнених власних функцій.

Ключові слова: дилатація, диссипативний необмежений оператор, операторний вузол.

MSC 2010: 34D12

Yu. L. KUDRYASHOV. Selfadjoint dilation of operator knot of the dissipative operator (Russian). Din. Sist., Simferopol', vol. 3(31), no.1-2, 45–48 (2013).

In article on the basis of concept of operator knot for narrow operators the concept of operator knot is entered for any dissipative operators with a nonempty set regular points. By means of operators of such knot is under construction spectral representation of a selfadjoint dilation for the unbounded dissipative dense define operator. The received results can be used for construction dilation of specific operators, their functional models and generalized own functions.

Keywords: dilation, dissipative unbounded operator, operator knot.

---

**А. Н. КУЛИКОВ. Резонансная динамика как причина жесткого возбуждения колебаний в некоторых задачах теории упругой устойчивости.**

УДК 517.538

А. Н. КУЛИКОВ. Резонансная динамика как причина жесткого возбуждения колебаний в некоторых задачах теории упругой устойчивости (русский) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 49–67.

В работе рассмотрен класс абстрактных нелинейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, который включает в себя нелинейные краевые задачи, встречающиеся в теории упругой устойчивости. Например, при изучении флаттера пластины в сверхзвуковом потоке газа. Рассматривается вариант малого демпфирования. Показано, что в случаях близких к резонансу 1:1 собственных частот линеаризованной задачи могут бифурцировать неустойчивые периодические решения. Для обоснования результатов использован метод интегральных многообразий в сочетании с аппаратом нормальных форм для динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством.

Ключевые слова: нелинейные эволюционные уравнения, нелинейный панельный флаттер, жесткое возбуждение колебаний.

УДК 517.538

А. М. КУЛИКОВ. Резонансна динаміка як причина жорсткого порушення коливань в деяких задачах теорії пружної стійкості (російська) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 49–67.

У роботі розглянуто клас абстрактних нелінійних диференціальних рівнянь у гільбертовому просторі, який включає в себе нелінійні крайові задачі, що зустрічаються в теорії пружною стійкості. Наприклад, при вивченні флатера пластины в надзвуковому потоці газу. Розглядається варіант малого демпфірування. Показано, що у випадках близьких до резонансу 1:1 власних частот линеаризованной завдання можуть біфурціровать нестійкі періодичні рішення. Для обґрунтування результатів використано метод інтегральних многовидів у поєднанні з апаратом нормальних форм для динамічних систем з бесконечномірним фазовим простором.

Ключові слова: нелінійні еволюційні рівняння, нелінійний панельний флаттер, жорстке збудження коливань.

MSC 2010: 34D12

A. N. KULIKOV. Resonance dynamics as a reason for hard excitation of oscillation in the problems of elastic stability (Russian). *Din. Sist., Simferopol'*, vol. 3(31), no.1-2, 49–67 (2013).

The class of nonlinear evolutionary equations of the second order in the Hilbert space is considered. This class of equations includes the value boundary problems of the theory of elastic stability. For example, the value boundary problems describe the flutter of the plate in a supersonic gas flow. From the results of this article it follows that flutter may be caused by the strong excitation of oscillations with the nearness of frequencies to the 1:1 resonance. The method of the qualitative theory of differential equations with infinite-dimensional phase space have been used. The method of normal forms has been applied. The Krylov-Bogolubov-Mitropolsky-Samoilenko has been used in a modified form. The introduction contains an example of the boundary value problem simulating the flutter phenomenon.

Keywords: nonlinear evolutionary equations, nonlinear panel flutter, strong excitations of oscillations.

---

**I. V. ORLOV, E. V. BOZHONOK, E. M. KUZMENKO. Necessary conditions for K-extrema of variational functionals in Sobolev spaces on multi-dimensional domains.**

УДК 517.972

И. В. ОРЛОВ, Е. В. БОЖОНОК, Е. М. КУЗЬМЕНКО. Необходимые условия К-экстремума вариационного функционала в пространствах Соболева над многомерной областью (английский) // *Динамические системы*, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 69–84.

В работе получены аналоги классических необходимых условий локального экстремума - обобщенное уравнение Эйлера-Остроградского и обобщенное необходимое условие Лежандра для компактных экстремумов вариационных функционалов в пространствах Соболева над многомерной областью. Также исследован вопрос достаточной гладкости решений обобщенного уравнения Эйлера-Остроградского. Доказано, что решение обобщенного вариационного уравнения Эйлера-Остроградского в пространстве Соболева обладает дополнительными аналитическими свойствами. Рассмотрены соответствующие примеры.

Ключевые слова: вариационный функционал, пространство Соболева над областью, компактный экстремум, обобщенное уравнение Эйлера-Остроградского, обобщенное условие Лежандра.

УДК 517.972

I. В. ОРЛОВ, К. В. БОЖОНОК, К. М. КУЗЬМЕНКО. Необходимі умови К-екстремуму варіаційного функціонала в просторах Соболева над багатовимірною областю (англійська) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 69–84.

У роботі отримані аналоги класичних необхідних умов локального екстремума - узагальнене рівняння Ейлера-Остроградського й узагальнена необхідна умова Лежандра для компактних екстремумів варіаційних функціоналів у просторах Соболева над багатовимірною областю. Також досліджене питання достатньої гладкості розв'язків узагальненого рівняння Ейлера-Остроградського. Доведено, що розв'язки узагальненого варіаційного рівняння Ейлера-Остроградського в просторі Соболева має додаткові аналітичні властивості. Розглянуто відповідні приклади.

Ключові слова: варіаційний функціонал, простір Соболева над областю, компактний екстремум, узагальнене рівняння Ейлера-Остроградського, узагальнена умова Лежандра.

MSC 2010: 49K27

I. V. ORLOV, E. V. BOZHONOK, E. M. KUZMENKO. Necessary conditions for K-extrema of variational functionals in Sobolev spaces on multi-dimensional domains (English). Din. Sist., Simferopol', vol. 3(31), no.1-2, 69–84 (2013).

This paper deals with generalized Euler-Ostrogradsky equations and necessary conditions of Legendre-type in the case of compact extrema of variational functionals in Sobolev spaces on multi-dimensional domains. The inverse problem of smoothness refinement for solutions of generalized Euler-Ostrogradsky equations is considered. It is shown that a certain refinement of smoothness of solutions of generalized Euler-Ostrogradsky equations is achieved. Some related problems are considered.

Keywords: variational functional, Sobolev space on domains, compact extremum, generalized Euler-Ostrogradsky equation, generalized Legendre condition.

---

**Є. В. ПАНАСЕНКО. Умова існування розв'язку слабкозбуреної крайової задачі в банаховому просторі.**

УДК 517.9



Е. В. ПАНАСЕНКО. Условие существования решения слабовозмущённых краевых задач в банаховом пространстве (украинский) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 85–94.

Рассматриваются краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром  $\epsilon$  в уравнении и в краевом условии. Ищутся условия, при которых возникает хотя бы одно решение слабовозмущённой краевой задачи в банаховом пространстве. Задача была решена при помощи некоторых свойств оператора  $B_0$ , который строится с использованием возмущённых слагаемых в дифференциальной системе и в краевом условии.

Ключевые слова: слабовозмущённая краевая задача, порождающая задача, бифуркация решений, обобщённо-обратный оператор.

УДК 517.9

Є. В. ПАНАСЕНКО. Умова існування розв'язку слабкозбуреної крайової задачі в банаховому просторі (українська) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 85–94.

Розглядаються крайові задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь з малим параметром  $\epsilon$  у рівнянні та у крайовій умові. Шукається умова, коли виникає хоча б один розв'язок слабкозбуреної крайової задачі в банаховому просторі. Задача була розв'язана завдяки певним властивостям оператора  $B_0$ , який будується з використанням збурюючих доданків у диференціальній системі та у крайовій умові.

Ключові слова: слабкозбурена крайова задача, породжуюча задача, бифуркація розв'язків, узагальнено-оборотний оператор.

MSC 2010: 34B05, 34G10

Y. V. PANASENKO. The condition of existence of solutions weakly perturbed boundary-value problems in a Banach spaces (Ukrainian). *Din. Sist., Simferopol'*, vol. 3(31), no.1-2, 85–94 (2013).

The problem of the existence of solutions of linear inhomogeneous weakly perturbed boundary-value problems in Banach spaces, namely, boundary-value problem for a system of ordinary differential equations with small parameter  $\epsilon$  in equation and in boundary-value condition are considered in this article. We investigate conditions of existence of solution weakly perturbed boundary-value problem in a Banach space. The apparatus of research are the theory of generalized inverse operators and the method of Vishik-Lyustemik. We find solution in the form of Laurent series by

powers of the small parameter  $\epsilon$ , which contain the negative power of  $\epsilon$ . We use some properties of the operator  $B_0$ , which is built using the perturbed terms in the differential system and in the boundary-value condition to solve the problem. We construct a convergent iterative process of constructing a solution of this problem. The result is applied to investigate the existence of solutions of simple counting systems of ordinary differential equations. Linear perturbation can be chosen in such way that the perturbed boundary-value problem has a solution, in the case when the originating task has no solution.

Keywords: weakly perturbed linear boundary-value problem, originating task, bifurcation of solutions, generalized inverse operator.

---

**С. О. ПАПКОВ. Элемент в виде прямоугольной пластины в рамках Dynamic Stiffness Method.**

УДК 539.3

С. О. ПАПКОВ. Элемент в виде прямоугольной пластины в рамках Dynamic Stiffness Method (русский) // *Динамические системы*, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 95–101.

Построена динамическая матрица жесткости для прямоугольной пластины в случае общих граничных условий. Данная матрица описывает зависимость между смещениями и усилиями на контуре пластины. Точность построения обеспечивает использование известной асимптотики для элементов бесконечной матрицы, которая находится на основе обобщения достаточного признака существования ненулевого предела у решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: Dynamic Stiffness Method, динамическая матрица жесткости, прямоугольная пластина, бесконечные системы.

УДК 539.3

С. О. ПАПКОВ. Елемент у вигляді прямокутної поастини у рамках Dynamic stiffness method (російська) // *Динамические системы*, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 95–101.

Побудовано динамічну матрицю жорсткості для прямокутної пластины у випадку загальних граничних умов. Дана матриця дає зв'язок між зміщеннями та напруженнями на контурі пластины. Точність побудови забезпечується застосуванням відомої асимптотики елементів нескінченної матриці, яка знаходиться за допомогою узагальнення достатньої ознаки існування

ненульової границі у розв'язка нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Ключові слова: Dynamic stiffness method, динамічна матриця жорсткості, прямокутна пластина, нескінченні системи.

MSC 2010: 74H10, 74H45

S. O. PAPKOV. Element in form of the rectangular plate for Dynamic stiffness method (Russian). *Din. Sist., Simferopol'*, vol. 3(31), no.1-2, 95–101 (2013).

The dynamic stiffness matrix for rectangular plate in the case of the arbitrary boundary conditions is built. This matrix defines the dependence between values of the displacements and forces at the contour of the plate. The accuracy of results is provided by using of known asymptotic behavior of elements of the infinite matrix, which is constructed on the basis of generalization of the sufficient conditions of existence of non-zero limit of solution of infinite system linear algebraic equations.

Keywords: Dynamic stiffness method, dynamic stiffness matrix, rectangular plate, infinite systems.

---

**О. О. САМОЙЛЕНКО. Достатні умови існування оптимального керування з оберненим зв'язком для деяких класів систем стохастичних диференціальних рівнянь.**

УДК 517.977

Е. А. САМОЙЛЕНКО. Достаточные условия существования оптимального управления с обратной связью для некоторых классов систем стохастических дифференциальных уравнений (украинский) // *Динамические системы*, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 103–113.

Доказано существование оптимального управления с обратной связью для систем стохастических дифференциальных уравнений на неограниченном промежутке времени в терминах коэффициентов исходной системы. Результат был получен без использования метода динамического программирования Беллмана и принципа максимума Понтрягина. Для доказательства используются прямые методы решения экстремальных задач.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, существование оптимального управления, управление с обратной связью.

УДК 517.977

О. О. САМОЙЛЕНКО. Достатні умови існування оптимального керування з оберненим зв'язком для деяких класів систем стохастичних диференціальних рівнянь (українська) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 103–113.

Доведено існування оптимального керування з оберненим зв'язком для систем стохастичних диференціальних рівнянь на необмеженому проміжку часу в термінах коефіцієнтів вихідної системи. Результат був отриманий без використання методу динамічного програмування Беллмана та принципу максимуму Понтрягіна. Для доведення використовувались прямі методи розв'язання екстремальних задач.

Ключові слова: стохастичні диференціальні рівняння, існування оптимального керування, керування з оберненим зв'язком.

MSC 2010: 34H05, 34F05

O. O. SAMOILENKO. Sufficient conditions for the existence of optimal control with feedback control for some classes of stochastic differential equations (Ukrainian). Din. Sist., Simferopol', vol. 3(31), no.1-2, 103–113 (2013).

We prove an existence of an optimal control with feedback for stochastic differential equation systems over an unlimited period of time in terms of the coefficients of an original system. The result has been obtained without the use of Bellman's dynamic programming method and Pontryagin's maximum principle. In order to prove we used direct methods for solving extremal problems.

Keywords: stochastic differential equation, the existence of optimal control, control with feedback.

---

**З. И. ХАЛИЛОВА. Компактные субдифференциалы высших порядков и их применение к вариационным задачам.**

УДК 517.972: 517.982

З. И. ХАЛИЛОВА. Компактные субдифференциалы высших порядков и их применение к вариационным задачам (русский) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 115–133.

Приведен обзор теории  $K$ -субдифференциалов первого порядка. Построена теория  $K$ -субдифференциалов второго и высших порядков, вплоть до формулы Тейлора и теории экстремумов. Доказана обобщенная формула Юнга для

второго и высших порядков. Рассмотрены приложения к вариационным функционалам с негладким интегрантом. Получена оценка K-субдифференциала второго порядка вариационного функционала, найден компактный выпуклый аналог условия Лежандра. Рассмотрен конкретный пример - "анизотропный субгармонический осциллятор".

Ключевые слова: компактный субдифференциал, включение Эйлера-Лагранжа, формула Тейлора для субдифференциалов, условие Лежандра при негладком интегранте, субгармонический осциллятор.

УДК 517.972: 517.982

З. І. ХАЛІЛОВА. Компактні субдиференціали вищих порядків та їх застосування до варіаційних задач (російська) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 115–133.

Наведено огляд теорії K-субдиференціалів першого порядку. Побудована теорія K-субдиференціалів другого та вищих порядків, аж до формули Тейлора і теорії екстремумів. Доведена узагальнена формула Юнга для другого та вищих порядків. Розглянуті додатки до варіаційних функціоналів з нерівним інтегрантом. Отримано оцінку K-субдиференціала другого порядку варіаційного функціоналу, знайдено компактний опуклий аналог умови Лежандра. Розглянуто конкретний приклад - "анизотропний субгармонічний осцилятор".

Ключові слова: компактний субдиференціал, включення Ейлера-Лагранжа, формула Тейлора для субдиференціалів, умова Лежандра при негладкому інтегранті, субгармонічний осцилятор.

MSC 2010: 34D12

Z. I. KHALILOVA. Compact subdifferentials of higher orders and their applications to variational problems (Russian). Din. Sist., Simferopol', vol. 3(31), no.1-2, 115–133 (2013).

The theory of K-subdifferentials of the first order is reviewed. The theory of K-subdifferentials of the second and the highest orders is constructed, up to Taylor's formula and the theory of extremum. A generalized Young's formula of the second and higher orders is proved. Applications to variational functional with non-smooth integrand are considered. The estimate of the second-order K-subdifferential of variational functional is obtained, a compact convex analog of Legendre condition is found. A specific example - "the anisotropic subharmonic oscillator" is considered.

Keywords: compact subdifferential, Euler-Lagrange inclusion, Taylor's formula for subdifferentials, Legendre's condition for a non-smooth integrand, a subharmonic oscillator.

---

**В. И. ЧИЛИН, К. К. МУМИНОВ. Полная система дифференциальных инвариантов кривой в псевдоевклидовом пространстве.**

УДК 512.74

В. И. ЧИЛИН, К. К. МУМИНОВ. Полная система дифференциальных инвариантов кривой в псевдоевклидовом пространстве (русский) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 135–149.

Пусть  $X$  -  $n$ -мерное псевдоевклидово пространство над полем  $K$  действительных либо комплексных чисел с индефинитной метрикой  $[x, y]$ ,  $G$  - группа всех изометрий в  $X$ . Для ориентированной кривой, лежащей в  $X$  и порожденной сильно регулярным путем  $x(t)$ ,  $t \in (a, b)$ , дается специальная инвариантная параметризация  $u(s) = x(q_x(s))$ , с помощью которой устанавливается следующий критерий  $G$ -эквивалентности двух кривых из  $X$ : если  $\gamma$  и  $\beta$  - ориентированные кривые в  $X$ , порожденные соответственно невырожденными путями  $x$  и  $y$ ,  $u(s) = x(q_x(s))$ ,  $v(s) = y(q_y(s))$ , то кривые  $\gamma$  и  $\beta$  являются  $G$ -эквивалентными тогда и только тогда, когда  $\left[ u^{(m)}(s), u^{(m)}(s) \right] = \left[ v^{(m)}(s), v^{(m)}(s) \right]$  для всех  $m=1, \dots, n$ , где  $u^{(m)}(s)$  - производная порядка  $m$  для  $u(s)$ .

Ключевые слова: псевдоевклидово пространство, группа движений, дифференциальный инвариант кривой.

УДК 512.74

В. І. ЧІЛІН, К. К. МУМІНОВ. Повна система диференціальних інваріантів кривої у псевдоевклидовому просторі (російська) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 135–149.

Нехай  $X$  -  $n$ -вимірний псевдоевклідів простір над полем  $K$  дійсних або комплексних чисел з індефінітною метрикою  $[x, y]$ ,  $G$  - група всіх ізометрій у  $X$ . Для орієнтованої кривої, яка розташована у  $X$  та породжена сильно регулярним шляхом  $x(t)$ ,  $t \in (a, b)$ , надається спеціальна інваріантна параметризація  $u(s) = x(q_x(s))$ , за допомогою якої встановлюється наступний критерій  $G$ -еквівалентності двох кривих з  $X$ : якщо  $\gamma$  та  $\beta$  --- орієнтовані криві у  $X$ , породжені відповідно невырожденными шляхами  $x$  та  $y$ ,  $u(s) = x(q_x(s))$ ,  $v(s) = y(q_y(s))$ , тоді криві  $\gamma$  та  $\beta$  будуть  $G$ -еквівалентними тоді і тільки тоді, коли  $\left[ u^{(m)}(s), u^{(m)}(s) \right] = \left[ v^{(m)}(s), v^{(m)}(s) \right]$  для всіх  $m=1, \dots, n$ .

$\left[v^{\{m\}}(s), v^{\{m\}}(s)\right]$  для усіх  $m=1, \dots, n$ , де  $u^{\{m\}}(s)$  --- похідна порядку  $m$  для  $u(s)$ .

MSC 2010: 53A15, 53A55, 53B30

V. I. CHILIN, K. K. MUMINOV. The complete system of differential invariants of a curve in pseudo-euclidean space (Russian). *Din. Sist., Simferopol'*, vol. 3(31), no.1-2, 135–149 (2013).

Let  $X$  be  $n$ -dimensional pseudo-Euclidean space over field  $K$  of real or complex numbers, let  $[x, y]$  be the indefinite metric in  $X$ , let  $G$  be the group of all isometries in  $X$ . It is given the special invariant parametrization  $u(s) = x(q_x(s))$  for oriented curve in  $X$  generated by strongly regular path  $x(t)$ ,  $t \in (a, b)$ . Using this parametrization the next criterion of  $G$ -equivalent of pair curves in  $X$  is proved: If  $\gamma$  and  $\beta$  are oriented curves in  $X$ , generated by non-degenerate paths  $x$  and  $y$  respectively,  $u(s) = x(q_x(s))$ ,  $v(s) = y(q_y(s))$ , then curves  $\gamma$  and  $\beta$  are  $G$ -equivalent if and only if  $\left[u^{\{m\}}(s), u^{\{m\}}(s)\right] = \left[v^{\{m\}}(s), v^{\{m\}}(s)\right]$  for all  $m=1, \dots, n$ , where  $u^{\{m\}}(s)$  is a  $m$ -derivation of  $u(s)$ .

---

**С. М. ЧУЙКО, А. С. ЧУЙКО, П. В. КУЛИШ. Периодическая задача для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса.**

УДК 517.9

С. М. ЧУЙКО, А. С. ЧУЙКО, П. В. КУЛИШ. Периодическая задача для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса (русский) // *Динамические системы*, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 151–158.

Найдены необходимые и достаточные условия существования решений нелинейной неавтономной периодической задачи для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса. Характерной особенностью поставленной задачи является необходимость нахождения, как искомого решения, так и соответствующей собственной функции, обеспечивающей разрешимость периодической задачи для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса. Для построения решений периодической задачи для уравнения типа Хилла и соответствующей собственной функции в случае параметрического резонанса предложена итерационная схема, построенная по методу простых итераций.

Ключевые слова: периодическая краевая задача, параметрический резонанс, уравнение типа Хилла, метод простых итераций.

УДК 517.9

С. М. ЧУЙКО, А. С. ЧУЙКО, П. В. КУЛІШ. Періодична крайова задача для рівняння типу Хілла у випадку параметричного резонансу (російська) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 151–158.

Знайдено необхідні і достатні умови існування розв'язку нелінійної неавтономної періодичної задачі для рівняння типу Хілла у випадку параметричного резонансу. Характерною особливістю поставленого завдання є необхідність знаходження, як шуканого розв'язку, так і відповідної власної функції, що забезпечує розв'язність періодичної задачі для рівняння типу Хілла у випадку параметричного резонансу. Для побудови розв'язків періодичної задачі для рівняння типу Хілла і відповідної власної функції у випадку параметричного резонансу запропоновано ітераційний схема, побудована за методом простих ітерацій.

Ключові слова: періодична крайова задача, параметричний резонанс, рівняння типу Хілла, метод простих ітерацій.

MSC 2010: 34B15

S. M. CHUJKO, A. S. CHUJKO, P. V. KULISH. Periodic boundary-value problem for Hill's equation in the case of parametric resonance (Russian). Din. Sist., Simferopol', vol. 3(31), no.1-2, 151–158 (2013).

Necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of nonlinear nonautonomous periodic problem for Hill's equation in the case of parametric resonance. A characteristic feature of the task is the need of finding, as desired solution, and the corresponding eigenfunction, which ensures solvability of the periodic problem for Hill's equation in the case of parametric resonance. To construct solutions of the periodic problem for Hill's equation and the corresponding eigenfunction in the case of parametric resonance proposed iterative scheme, based on the method of simple iterations.

Keywords: periodic boundary-value problem, parametric resonance, Hill's equation, the method of simple iterations.

---

**Т. Н. АСТАХОВА, А. Л. ЗУЕВ. Задача планирования движения для класса нелинейных систем с тригонометрическими функциями управления.**

УДК 531.36+517.977



Т. Н. АСТАХОВА, А. Л. ЗУЕВ. Задача планирования движения для класса нелинейных систем с тригонометрическими функциями управления (русский) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 159–167.

Рассмотрена двухточечная задача управления для нелинейных систем с ненулевыми краевыми условиями. Предложен локальный подход к решению этой задачи в классе тригонометрических функций управления. Полученный результат применен для класса управляемых нильпотентных систем.

Ключевые слова: управляемость, скобки Ли, ряд Вольтерра, нильпотентные системы.

УДК 531.36+517.977

Т. М. АСТАХОВА, О. Л. ЗУЄВ. Задача планування руху для класу нелінійних систем з тригонометричними функціями керування (російська) // Динамические системы, 2013. — том 3(31), №1-2. — С. 159–167.

Розглянуто двухточкову задачу керування для нелінійних систем з ненульовими крайовими умовами. Запропоновано локальний підхід до розв'язання цієї проблеми у класі тригонометричних функцій керування. Одержаний результат застосовано до класу керованих нильпотентних систем.

Ключові слова: керованість, дужки Лі, ряд Вольтерра, нильпотентні системи.

MSC 2010: 93B51, 34H05

T. M. ASTAKHOVA, A. L. ZUYEV. Motion planning problem for a class of nonlinear systems with trigonometric control functions. (Russian). Din. Sist., Simferopol', vol. 3(31), no.1-2, 159–167 (2013).

A two-point control problem is considered for nonlinear systems with non-zero boundary conditions. A local approach for solving this problem is proposed in the class of trigonometric control functions. The result obtained is applied to a class of controllable nilpotent systems.

Keywords: controllability, Lie brackets, Volterra series, nilpotent systems.