

УДК 539.3

Дифракция Фраунгофера от цилиндрического источника упругих волн

А. Р. Сницер

Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского,
НИИ Проблем геодинамики.

Симферополь 95007. E-mail: *snitser_arnold@yahoo.com*

Аннотация. В статье, на основе аналитического решения задачи излучения, приведены результаты расчетов дальнего поля радиальных перемещений, вызванных цилиндрическим источником упругих волн. Показано, что волновое поле в дальней зоне совпадает с дифракционной картиной источника плоских волн, определяемой теорией дифракции Фраунгофера.

Ключевые слова: цилиндрический излучатель, упругие волны, диаграмма направленности, дифракция Фраунгофера, дифракционная картина

1. Введение

Волновое поле цилиндрического излучателя в упругой среде представляет суперпозицию продольных и поперечных волн [1,2]. Если излучатель моделировать нормальными гармоническими колебаниями кольцевой области на поверхности бесконечной свободной от напряжений цилиндрической полости, то возникают также волны Био [1,3]. Мы здесь проведем анализ дальнего волнового поля для указанной модели источника с точки зрения общей теории волновых процессов.

В случае сосредоточенного по окружности воздействия на поверхность цилиндрической полости, возникает интегральная суперпозиция P - и S -волн, которые лишь в дальней зоне в ортогональной системе координат, подобной сферической, удастся разделить. При этом окружные перемещения U_θ соответствуют S -волнам, а радиальные U_R — P -волнам [1,4]. Как показывает аналитическое исследование поля перемещений при высоте кольцевой области нагружения отличной от нуля, к структуре поля сосредоточенного воздействия добавляется еще одна составляющая радиального перемещения. Эта добавочная составляющая представляет собой отдельную продольную волну P_{orig} , которая распространяется в полосе примыкающей по нормали к кольцевой области нагружения полости. При этом высота указанной полосы равна высоте поверхности цилиндрического источника. Таким образом, дальнее поле продольных упругих волн рассмотренного цилиндрического излучателя складывается из волны P_{orig} , существующей только в области $|z| \leq h$ или $0 < |\vartheta| \leq \arcsin(h/R)$ (область кольцевой полосы), и волны P_{sep} — волны¹ в области $|z| > h$ (вне области кольцевой полосы).

¹Продольная волна, аналитически выделенная в дальней зоне из интегральной суперпозиции неразделимых P - и S -волн.

2. Выражения для модулей радиальных перемещений в дальней зоне и численные результаты

Как следует из результатов полученных в работах [1,2], выражения для модулей радиальных перемещений в дальней зоне можно представить в виде:

$$|U_R(R_0, \vartheta)| \sim \begin{cases} \left| \frac{\sin \Phi}{\Phi} \frac{f(\Omega, \vartheta, k)}{F(\vartheta)} \right|_{\vartheta=\vartheta_m} \times F(\vartheta), & 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_m; \\ \left| \frac{\sin \Phi}{\Phi} f(\Omega, \vartheta, k) \right|, & \vartheta > \vartheta_m. \end{cases} \quad (1)$$

где

$$f(\Omega, \vartheta, k) = \frac{k^2 - 2 \sin^2 \vartheta}{|\Delta| \sin \vartheta \sqrt{R_0 \cos \vartheta (1 + R_0 \cos \vartheta)} \left| H_1^{(2)}(\Omega k^{-1} \cos \vartheta) \right|}, \quad (2)$$

$$F(\vartheta) = 2\sqrt{2/\pi} \cos \vartheta (1 + R_0 \cos \vartheta)^{-1/2} \left| 2H_1^{(2)}(\Omega k^{-1}) - k\Omega H_0^{(2)}(\Omega k^{-1}) \right|^{-1}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_1 + \Delta_2, \quad \Delta_1 = -4x k^{-1} \sin \vartheta \mathcal{H}(\Omega x) + 2k(\Omega \sin \vartheta)^{-1}, \\ \Delta_2 &= -(2 \sin^2 \vartheta - k^2)^2 \mathcal{H}(\Omega k^{-1} \cos \vartheta) / k^2 \sin \vartheta \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (4)$$

$$x = x(k, \vartheta) = \sqrt{1 - k^{-2} \sin^2 \vartheta}, \quad \mathcal{H}(z) = H_0^{(2)}(z) / H_1^{(2)}(z), \quad (5)$$

$$\Phi = \Omega H k^{-1} \sin \vartheta, \quad \vartheta_m = \arcsin(H/R_0). \quad (6)$$

Здесь $k = k_2/k_1 = \sqrt{(1-\nu)/(0.5-\nu)}$ — отношение волновых чисел поперечных и продольных упругих волн; ν — коэффициент Пуассона; $\Omega = k_2 a$ — безразмерная частота, характеризующая волновой размер полости; $2H = 2h/a$ — относительная высота кольца нагружения полости; $\varepsilon = a/R$ — параметр «дальности» точки наблюдения $M(R_0, \varphi, \vartheta)$ волнового поля; $R_0 = R/a$ — относительное расстояние от источника до точки наблюдения; a — радиус полости; R, ϑ — координаты ортогональной системы (R, φ, ϑ) , связанной с цилиндрическими координатами (r, φ, z) соотношениями: $r = a + R \cos \vartheta$, $z = R \sin \vartheta$.

Приближение дальнего поля источника для точек наблюдения $M(R, \vartheta)$ определяется в нашем случае соотношением $R\lambda_1 \geq (2h)^2$ [5]. Из данного соотношения находим предельный линейный размер источника, ниже которого наблюдается дифракция (расхождение) плоского пучка упругих волн в полосе $|z| \leq h$: $H \leq \sqrt{\pi k/2\varepsilon\Omega}$. Так, полагая $\nu = 0.25$, $\varepsilon = 0.005$, $\Omega = 3$, мы получим $H \leq 13.47$.

При указанных параметрах, на основе формул (1)–(6), были посчитаны зависимости модуля радиальных перемещений от угла ϑ для различных значений линейного размера источника (ϑ — угол между нормалью к цилиндрической поверхности и направлением от источника к точке наблюдения). Одни и те же результаты расчетов представлены в полярной системе координат (диаграммы направленности, рис.1) и в прямоугольной системе координат (рис.2). Линии 0 соответствуют сосредоточенной нагрузке, линии 1,2 — высоте кольца нагружения $H = 3.7$ и $H = 7$ соответственно. Отметим, что оценка главных членов асимптотики дальнего поля окружных волн показывает, что отдельной S -волны в области $|z| \leq h$,

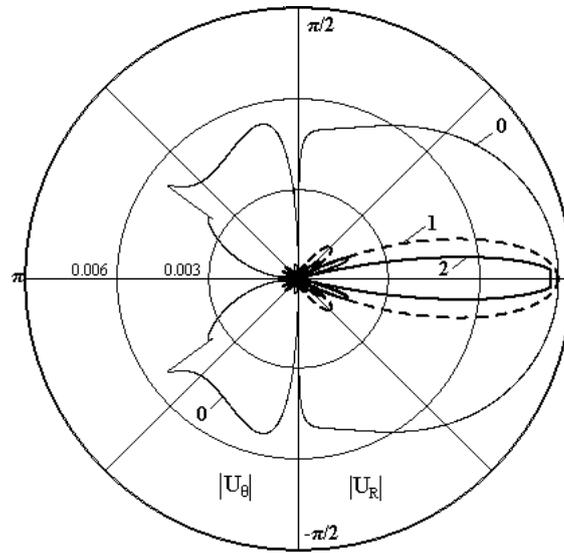


Рис. 1. Диаграммы направленности излучения цилиндрического источника упругих волн. Линиям 0,1,2 соответствуют линейные размеры источника: $H = 0; 3.7; 7.0$. Частота излучения $\Omega = 3$; коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$, параметр дальности $\varepsilon = 0.005$. Правая полуплоскость — радиальные компоненты перемещений (P -волны), левая полуплоскость — окружные компоненты (S -волны).

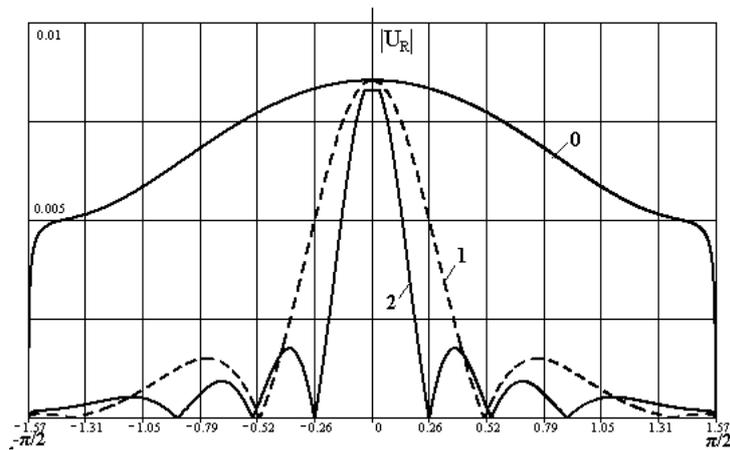


Рис. 2. Зависимости модуля радиальных перемещений от угла ϑ . Линиям 0,1,2 соответствуют линейные размеры источника: $H = 0; 3.7; 7.0$. Частота излучения $\Omega = 3$; коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$, параметр дальности $\varepsilon = 0.005$.

как в случае продольных волн, не возникает [1,2], поэтому интерес представляет анализ вклада продольных волн.

3. Объяснение результатов согласно теории дифракции Фраунгофера

Соотношение вкладов P_{orig} и P_{sep} , как показывают численные расчеты, зависит от волновых размеров радиуса полости и высоты кольца нагружения, т.е. от отношений a/λ_1 и h/λ_1 , где λ_1 — длина продольных волн в упругой среде. Из рис.1 и 2 видно, что несмотря на рост волновой высоты кольца нагружения, т.е. области распространения основного пучка P_{orig} , ширина центрального максимума величины $|U_R|$ уменьшается. Это связано с явлением дифракции, ограничивающим угловой разброс этого пучка, определяемый отношением длины излучаемой волны к линейному размеру источника [2,5]:

$$\Delta\vartheta = \lambda_1/2h = \pi k/\Omega H. \quad (7)$$

Представленные на рис.2 зависимости $|U_R|$ от ϑ в дальней зоне, рассчитанные на основе аналитического решения задачи о цилиндрическом излучателе, находят объяснение в теории дифракции. Действительно, полученные результаты совпадают с классическими расчетами дифракции Фраунгофера на щели или с дифракционной картиной углового разброса волнового пучка, ограниченного дифракцией. Распределение амплитуд в таких волновых процессах в терминах принятых здесь обозначений определяется выражением [5]:

$$|U_R| \sim \left| \frac{\sin(\Phi/2)}{\Phi/2} \right|, \quad \Phi = 4\pi \frac{h \sin \vartheta}{\lambda_1} = 2\Omega H k^{-1} \sin \vartheta. \quad (8)$$

Из (8) следует, условие максимума $|U_R|$, записанное в терминах принятых нами безразмерных величин:

$$\vartheta_n = \arcsin(\alpha_n k/H\Omega), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9)$$

где $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1.43\pi$, $\alpha_3 = 2.46\pi$, $\alpha_4 = 3.47\pi$, $\alpha_5 = 4.48\pi \dots$ — корни трансцендентного уравнения [6]: $tg(\Phi/2) = \Phi/2$, $\Phi_n/2 = \alpha_n$.

Из (8) также следует условие равенства нулю амплитуд перемещений:

$$\vartheta_{0n} = \arcsin(n\pi k/\Omega H), \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (10)$$

Для высоты $H = 3.7$ формула (9) дает максимумы амплитуд при углах: $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pm 0.777$, а нулевые амплитуды согласно (10) будут при углах: $\vartheta_{01} = \pm 0.512$, $\vartheta_{02} = \pm 1.373$. Для $H = 7$ имеем: $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pm 0.38$, $\vartheta_3 = \pm 0.691$, $\vartheta_4 = \pm 1.118$; $\vartheta_{01} = \pm 0.262$, $\vartheta_{02} = \pm 0.545$, $\vartheta_{03} = \pm 0.89$.

Выводы

Значения углов, определяющих максимумы и нулевые значения модуля амплитуд перемещений $|U_R|$, полученные на основе аналитического решения задачи

излучения (рис.2), хорошо согласуются с расчетами по классическим формулам (8), (9), (10) дифракции Фраунгофера. При этом величина (7) определяет ширину главного интерференционного максимума. Вторичные максимумы по амплитуде значительно меньше основного, и как следует из формулы (9), при фиксированных параметрах Ω и ν , с уменьшением линейного размера H излучателя их расстояние от основного максимума увеличивается, что означает расширение главного максимума. Этот факт хорошо согласуется с результатами, представленными на рис. 1 и рис. 2. Так при сосредоточенной нагрузке ($H = 0$) волна P_{orig} исчезает и остается один широкий максимум (линии 0 на рис. 1 и рис. 2).

Список цитируемых источников

1. *Сницер А.Р.* Волны при нормальном гармоническом нагружении скважины в упругой среде. I. Структура волнового поля на поверхности скважины и в дальней зоне. // А.Р. Сницер // Динамические системы. — 2006. — Вып. 20 — С.67–88.
2. *Сницер А.Р.* Волны при нормальном гармоническом нагружении скважины в упругой среде. II. Энергетические характеристики излучения // А.Р. Сницер // Динамические системы. — 2008. — Вып. 25 — С.103–123.
3. *Biot M.A.* Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Bore Containing a Fluid // M.A. Biot // J. Appl. Physics. 1952. Vol.23, No 9. P.997–1005.
4. *Snitser A.R.* Radiation problem of normal stress-loading of bore surface // A.R. Snitser // Proc. Appl. Math. Mech. — 2007. — Vol.7, Iss.1. — P.2040059–2040060.
5. *Крауфорд Ф.* Берклеевский курс физики. Волны // Ф. Крауфорд — М.: Наука, 1974. — Т.3. 528 с.
6. *Ландсберг Г.С.* Оптика // Г.С. Ландсберг — М.: Наука, 1976. — 928 с.

Получена 10.06.2010