*Динамические системы, вып. 28 (2010), 177–182*

УДК 517.91.1

# Первые интегралы — следствие однопараметрического семейства симметрий уравнений Лагранжа[1]

**Г. Н. Яковенко**

Московский физико-технический институт
РОССИЯ, Долгопрудный 141700. *E-mail yakovenko_g@mtu-net.ru*

**Аннотация.** Для вычисления первого интеграла по теореме Эмми Нётер требуется, чтобы уравнения Лагранжа допускали однопараметрическую группу вариационных симметрий. Первый интеграл порождается инфинитезималью: коэффициентами при первой степени в разложении уравнений группы по параметру. Изучается случай, когда уравнения Лагранжа допускают однопараметрическое семейство (не обязательно группу) вариационных симметрий. В этом случае порождается однопараметрическое семейство первых интегралов. В приведённом примере семейство содержит семь функционально независимых первых интегралов.

**Ключевые слова:** уравнения Лагранжа, вариационные симметрии, первый интеграл.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается семейство неособенных преобразований ($\tau$ - параметр семейства)

$$\begin{aligned} \widehat{t} &= \widehat{t}\,(t, q, \tau)\,, \\ \widehat{q}_i &= \widehat{q}_i\,(t, q, \tau)\,, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

которое есть решение системы дифференциальных уравнений (не обязательно автономных)

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{t}}{d\tau} &= \xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right), \\ \frac{d\widehat{q}_i}{d\tau} &= \eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

при начальных условиях

$$\widehat{t}\,(0) = t, \qquad \widehat{q}_i\,(0) = q, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1.3}$$

Преобразование, принадлежащее семейству (1.1), называется **преобразованием вариационной симметрии** [1–3] лагранжевой системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{1.4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00228) и АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)” (проект 2.1.1/3604).

определённой функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$, если оно связано с функцией Лагранжа соотношением

$$L\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \frac{d\widehat{q}}{d\widehat{t}}\right) d\widehat{t} = L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right) dt$$

или эквивалентным соотношением —

$$L\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \frac{d\widehat{q}}{d\widehat{t}}\right) \frac{d\widehat{t}}{dt} = L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right). \tag{1.5}$$

## 2. Результат

**Теорема.** *Пусть каждое преобразование семейства (1.1) есть преобразование вариационной симметрии для лагранжевой системы, определённой функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$, то есть для $L(t, q, \dot{q})$ и семейства (1.1) при каждом значении $\tau$ выполняется равенство (1.5). Тогда у лагранжевой системы есть семейство первых интегралов*

$$w(t, q, \dot{q}, \tau) = \sum_{i=1}^{n} p_i \eta_i(t, q, \tau) - \xi(t, q, \tau) H = C, \tag{2.1}$$

*где $\xi(t, q, \tau)$, $\eta_i(t, q, \tau)$ - функции, расположенные в правой части системы (1.2), а $p_i$ и $H$ — обозначения для обобщенного импульса и для функции Гамильтона [2]:*

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H(t, q, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(t, q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(t, q, \dot{q}) \tag{2.2}$$

*Доказательство.* Для доказательства утверждения (2.1) теоремы продифференцируем условие (1.5) по $\tau$, получим следующий результат (подробности вычислений опущены):

$$\frac{d}{d\widehat{t}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \widehat{p}_i \eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right) - \xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right) H \right\} \frac{d\widehat{t}}{dt} = 0.$$

Как следует из (1.3), при малых значениях $\tau$ выполняется $d\widehat{t}/dt \neq 0$, поэтому на решениях лагранжевой системы, соответствующей функции Лагранжа $L\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \dot{\widehat{q}}\right)$, сохраняется формула, находящаяся в фигурных скобках последнего выражения, что доказывает сохранение выражение (2.1) для лагранжевой системы с функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$. $\square$

## 3. Пример

*Пример.* Положение $N$ материальных точек замкнутой консервативной системы задаётся в ортонормированной декартовой системе координат

$$\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}, \qquad i = \overline{1,N}.$$

Предполагается, что потенциальная энергия $\Pi\left(r_{11},\, r_{12},\, \ldots,\, r_{N-1\,N}\right)$ зависит только от расстояний $r_{ik}$ между точками:

$$r_{ik}^2 = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2\,.$$

Системе соответствует функция Лагранжа

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) - \Pi\left(r_{11},\, r_{12},\, \ldots,\, r_{N-1\,N}\right), \tag{3.1}$$

обобщённые импульсы (2.2):

$$p_i^x = m_i\dot{x}_i, \quad p_i^y = m_i\dot{y}_i, \quad p_i^z = m_i\dot{z}_i \tag{3.2}$$

и функция Гамильтона (в лагранжевых переменных)

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) + \Pi\left(r_{11},\, r_{12},\, \ldots,\, r_{N-1\,N}\right). \tag{3.3}$$

Запишем также левую часть условия (1.5) для проверки конкретного преобразования на вариационную симметрию

$$\begin{gathered} L\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \frac{d\widehat{q}}{d\widehat{t}}\right)\frac{d\widehat{t}}{dt} = \\ = \left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left[\left(\frac{d\widehat{x}_i}{d\widehat{t}}\right)^2 + \left(\frac{d\widehat{y}_i}{d\widehat{t}}\right)^2 + \left(\frac{d\widehat{z}_i}{d\widehat{t}}\right)^2\right] - \right. \\ \left. -\Pi\left(\widehat{r}_{11},\, \widehat{r}_{12},\, \ldots,\, \widehat{r}_{N-1\,N}\right)\right\}\frac{d\widehat{t}}{dt}, \end{gathered} \tag{3.4}$$

где обозначено

$$\widehat{r}_{ik}^{\,2} = \left(\widehat{x}_i - \widehat{x}_k\right)^2 + \left(\widehat{y}_i - \widehat{y}_k\right)^2 + \left(\widehat{z}_i - \widehat{z}_k\right)^2. \tag{3.5}$$

Для введённой в примере материальной системы известны [2] семь однопараметрических групп вариационных симметрий (сдвиги по времени и координатам, вращения вокруг координатных осей):

$$\begin{array}{llll} \widehat{t} = t - \tau_1, & \widehat{x}_i = x_i, & \widehat{y}_i = y_i, & \widehat{z}_i = z_i; \\ \widehat{t} = t, & \widehat{x}_i = x_i + \tau_2, & \widehat{y}_i = y_i, & \widehat{z}_i = z_i; \\ \widehat{t} = t, & \widehat{x}_i = x_i, & \widehat{y}_i = y_i + \tau_3, & \widehat{z}_i = z_i; \\ \widehat{t} = t, & \widehat{x}_i = x_i, & \widehat{y}_i = y_i, & \widehat{z}_i = z_i + \tau_4; \\ \widehat{t} = t, & \widehat{x}_i = x_i, & \widehat{y}_i = y_i cos\tau_5 - z_i sin\tau_5, & \widehat{z}_i = y_i sin\tau_5 + z_i cos\tau_5; \\ \widehat{t} = t, & \widehat{x}_i = x_i cos\tau_6 - z_i sin\tau_6, & \widehat{y}_i = y_i, & \widehat{z}_i = x_i sin\tau_6 + z_i cos\tau_6; \\ \widehat{t} = t, & \widehat{x}_i = x_i cos\tau_7 - y_i sin\tau_7, & \widehat{y}_i = x_i sin\tau_7 + y_i cos\tau_7, & \widehat{z}_i = z_i. \end{array} \tag{3.6}$$

Группы (3.6) порождают семь первых интегралов: полную механическую энергия $E = H$, вектор импульса, вектор момента импульса.

Рассмотрим подгруппы сдвигов по времени $t$

$$\widehat{t} = t - \tau_1, \qquad \widehat{x}_i = x_i, \qquad \widehat{y}_i = y_i, \qquad \widehat{z}_i = z_i, \tag{3.7}$$

и по координате $z$

$$\widehat{t} = t, \qquad \widehat{x}_i = x_i, \qquad \widehat{y}_i = y_i, \qquad \widehat{z}_i = z_i + \tau_4, \tag{3.8}$$

а также подгруппы вращений вокруг оси $x$

$$\widehat{t} = t, \quad \widehat{x}_i = x_i, \qquad \widehat{y}_i = y_i cos\tau_5 - z_i sin\tau_5, \qquad \widehat{z}_i = y_i sin\tau_5 + z_i cos\tau_5 \tag{3.9}$$

и вокруг оси $y$

$$\widehat{t} = t, \qquad \widehat{x}_i = x_i cos\tau_6 - z_i sin\tau_6, \qquad \widehat{y}_i = y_i, \qquad \widehat{z}_i = x_i sin\tau_6 + z_i cos\tau_6. \tag{3.10}$$

Каждое преобразование подгрупп (3.7) — (3.10) является для системы с лагранжианом (3.1) преобразованием вариационной симметрии — удовлетворяет условию (1.5) (для проверки нужно использовать формулы (3.4), (3.5)). Преобразованием вариационной симметрии является и суперпозиция преобразований подгрупп (3.7) — (3.10): последовательное выполнение одного преобразования затем другого. Суперпозиция преобразований подгрупп (3.7) — (3.10) и специализация параметров

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\tau^2, \qquad \tau_4 = \frac{1}{2}\tau^2, \qquad \tau_5 = \tau, \qquad \tau_6 = \tau \tag{3.11}$$

приводит к однопараметрическому семейству ($\tau$ — параметр семейства) вариационных симметрий системы с лагранжианом (3.1):

$$\begin{aligned}
&\widehat{t} = t - \tfrac{1}{2}\tau^2,\\
&\widehat{x}_i = x_i \cos\tau - \left[y_i \sin\tau + \left(z_i + \tfrac{1}{2}\tau^2\right)\cos\tau\right]\sin\tau,\\
&\widehat{y}_i = y_i \cos\tau - \left(z_i + \tfrac{1}{2}\tau^2\right)\sin\tau,\\
&\widehat{z}_i = x_i \sin\tau + \left[y_i \sin\tau + \left(z_i + \tfrac{1}{2}\tau^2\right)\cos\tau\right]\cos\tau.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Семейство есть решение системы дифференциальных уравнений (1.2)

$$\begin{aligned}
\frac{d\widehat{t}}{d\tau} &= -\tau &&= \xi(\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}, \tau)\\
\frac{d\widehat{x}_i}{d\tau} &= -\widehat{z}_i - \widehat{y}_i \sin\tau - \tau\sin\tau\cos\tau &&= \eta_i^x(\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}, \tau)\\
\frac{d\widehat{y}_i}{d\tau} &= \widehat{x}_i \sin\tau - \widehat{z}_i \cos\tau - \tau\sin\tau &&= \eta_i^y(\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}, \tau)\\
\frac{d\widehat{z}_i}{d\tau} &= \widehat{x}_i + \widehat{y}_i \cos\tau + \tau\cos^2\tau &&= \eta_i^z(\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}, \tau)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

при начальных данных (3). Правые части системы (3.13) нельзя представить в виде $\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)=\tilde{\xi}\left(\widehat{t},\widehat{q}\right)f(\tau)$, $\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)=\tilde{\eta}_i\left(\widehat{t},\widehat{q}\right)f(\tau)$ с одной и той же функцией $f(\tau)$, поэтому семейство (3.12) не есть группа [1–3], в чём можно убедиться и непосредственно по уравнениям (3.12) семейства. Таким образом, условия теоремы Эмми Нётер (см. следствие) не выполнены. В соответствии с утверждением теоремы замкнутая консервативная системы с лагранжианом (3.1) имеет семейство первых интегралов (2.1) (учтены выражения (3.2) для обобщённых импульсов):

$$\begin{aligned} w(\tau) &= \sum_{i=1}^{N}\left[m_i\dot{x}_i\left(-z_i-y_i\sin\tau-\tau\sin\tau\cos\tau\right)+\right.\\ &+ m_i\dot{y}_i\left(x_i\sin\tau-z_i\cos\tau-\tau\sin\tau\right)+\\ &+ \left.m_i\dot{z}_i\left(x_i+y_i\cos\tau+\tau\cos^2\tau\right)\right]+\tau H=\\ &= K_x\cos\tau-K_y+K_z\sin\tau+\\ &+ P_x\tau\sin\tau\cos\tau-P_y\tau\sin\tau+P_z\tau\cos^2\tau+\tau H. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Введены обозначения

$$\begin{gathered} K_x=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\dot{z}_iy_i-\dot{y}_iz_i\right),\quad K_y=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\dot{x}_iz_i-\dot{z}_ix_i\right),\\ K_z=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\dot{y}_ix_i-\dot{x}_iy_i\right),\\ P_x=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{x}_i,\qquad P_y=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{y}_i,\qquad P_z=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{z}_i,\\ H=E=T+\Pi \end{gathered} \tag{3.15}$$

для проекций момента импульса $\mathbf{K}_O$, импульса $\mathbf{P}$ на координатные оси и для функции Гамильтона $H$ (полной механической энергии), определённой в (3.3).

Покажем, что из факта сохранения $w(\tau)$ при любых значениях $\tau$ следует сохранение семи функций, приведённых в (3.15). Представим (3.14) в виде

$$w(\tau)=w_1(\tau)+\tau w_2(\tau), \tag{3.16}$$

где обозначено

$$\begin{gathered} w_1(\tau)=K_x\cos\tau-K_y+K_z\sin\tau,\\ w_2(\tau)=P_x\sin\tau\cos\tau-P_y\sin\tau+P_z\cos^2\tau+H. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Справедливо включение

$$\left\{w(\tau)\overset{\forall\tau}{=}C\right\}\Rightarrow\left\{w_1(\tau)\overset{(3.16),(3.17)}{=}\frac{1}{2\pi}[(2\pi+\tau)w(\tau)-\tau w(2\pi+\tau)]\overset{\forall\tau}{=}C_1,\right.$$
$$\left.w_2(\tau)\overset{(3.16),(3.17)}{=}\frac{1}{2\pi}[(w(2\pi+\tau)-w(\tau)]\overset{\forall\tau}{=}C_2\right\},$$

из которого следует, что функции $w_1(\tau)$, $w_2(\tau)$ при любых значениях $\tau$ — первые интегралы. Формулы

$$K_x \overset{(3.17)}{=} \frac{1}{2}\Big(w_1(0) - w_1(\pi)\Big), \qquad K_y \overset{(3.17)}{=} -\frac{1}{2}\Big(w_1(0) + w_1(\pi)\Big),$$
$$K_z \overset{(3.17)}{=} w_1(\pi/2) - \frac{1}{2}\Big(w_1(0) + w_1(\pi)\Big),$$
$$P_y \overset{(3.17)}{=} \frac{1}{2}\Big(w_2(-\pi/2) - w_2(\pi/2)\Big), \quad H \overset{(3.17)}{=} \frac{1}{2}\Big(w_2(-\pi/2) + w_2(\pi/2)\Big),$$
$$P_z \overset{(3.17)}{=} w_2(0) - H,$$
$$P_x \overset{(3.17)}{=} 2w_2(\pi/4) + \sqrt{2}P_y - P_z - 2H$$

показывают, что семь функций (3.15) — первые интегралы замкнутой консервативной системы с функцией Лагранжа (3.1).

*Замечание.* Если бы в пространстве параметров семипараметрической группы (3.6) путь был бы проложен, “не мудрствуя лукаво”:

$$\tau_1 = \tau, \qquad \tau_4 = \tau, \qquad \tau_5 = \tau, \qquad \tau_6 = \tau$$

(ср. с (3.11)), то семейство первых интегралов в соответствии с теоремой имело бы вид

$$w\,(\tau) = K_x \cos\tau + \Big(H - K_y\Big) + \Big(K_z - P_y\Big)\sin\tau + P_x \sin\tau\cos\tau + P_z\cos^2\tau.$$

Придавая параметру $\tau$ различные значения, удалось бы выявить только пять (а не семь) первых интегралов: $K_x$, $H - K_y$, $K_z - P_y$, $P_x$ и $P_z$.

## Список цитируемых источников

1. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 639 с.
2. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс аналитической динамики — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. — 238 с.
3. *Яковенко Г.Н.* Теория управления регулярными системами — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 264 с.

*Получена 30.05.2010*