Динамические системы, вып. 28 (2010), 171–176

УДК 531.36

Метод функций Ляпунова в теории устойчивости по действующей силе в критическом случае k нулевых и q пар чисто мнимых корней[1]

С. Р. Амбарцумян

Государственный аграрный университет Армении,
Ереванский государственный университет,
Ереван 0009, РЕСПУБЛИКА АРМЕНИЯ. *E-mail: samvelham@yahoo.com*

Аннотация. Исследуется задача устойчивости по действующей силе системы нелинейных дифференциальных уравнений в одном критическом случае, когда характеристическое уравнение соответствующего линейного приближения системы имеет k нулевых и q пар чисто мнимых корней. Получены достаточные условия, при которых тривиальное решение рассматриваемой системы будет устойчивым по действующей силе.

Ключевые слова: устойчивость, критический случай, функция Ляпунова.

Рассмотрим вещественную систему нелинейных дифференциальных n-го порядка и пусть характеристическое уравнение линейного приближения этой системы имеет k нулевых корней, q пар чисто мнимых и $n-k-2q$ корней с отрицательными вещественными частями. Известно, что в этом случае систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью неособого линейного преобразования можно привести к виду:

$$\begin{array}{ll}
\dot{u}_\theta = U_\theta\left(u_1,\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right) & (\theta=1,\ldots,k)\\
\dot{x}_j = \alpha_j y_j + X_j\left(u_1,\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right) & (j=1,\ldots,q)\\
\dot{y}_j = -\alpha_j x_j + Y_j\left(u_1,\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right) & \\
\dot{z}_s = a_{s1}z_1+\ldots+a_{sn-k-2q}z_{n-k-2q}+ & \\
+Z_s\left(u_1,\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right) & (s=1,\ldots,n-k-2q)
\end{array} \qquad (1)$$

где $\alpha_j \neq 0$ – действительные числа $(j=1,\ldots,q)$, $U_\theta, \mathrm{X_j}, Y_\mathrm{j}, \mathrm{Z_s}$ – аналитические функции в R^n и $\mathrm{U}_\theta(0,\ldots,0) = \mathrm{X_j}(0,\ldots,0) = \mathrm{Y_j}(0,\ldots,0) = \mathrm{Z_s}(0,\ldots,0) = 0$ $(\theta=1,\ldots,k;\ j=1,\ldots,q; s=1,\ldots,n-k-2q)$, разложение которых по степеням переменных $u_1,\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}$ начинается с членов не ниже второго порядка [1, с. 102].

[1]Работа выполнена в рамках научной темы под грифом 42, осуществляемой на кафедре механики ЕГУ, которая финансируется из государственных централизованных источников РА.

Понятие устойчивости систем нелинейных дифференциальных уравнений в критических случаях, когда на систему на конечном промежутке времени действуют интегрально-малые возмущающие силы (устойчивость по действующей силе) [2-3], имеет теоретическое и прикладное значение в разных областях современной науки и техники.

В работах [2-3] приведены необходимые и достаточные условия, при которых системы линейных дифференциальных уравнений неустойчивы по действующей силе. В работах [4-11] найдены достаточные условия, при которых системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, n-го порядка при паре чисто мнимых корней, а также при k нулевых и q пар чисто мнимых корней будут устойчивыми, асимптотически устойчивыми или неустойчивыми по действующей силе.

Попытаемся определить достаточные условия, накладываемые на нелинейные члены, при которых тривиальное решение системы (1) будет устойчивым по действующей силе.

Пусть правые части первых l уравнений $(1 \le l \le k)$ системы (1) тождественно равны нулю:

$$U_\delta\left(u_1,\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right)\equiv 0. \qquad (\delta=1,\ldots,l) \tag{2}$$

В этом случае система (1) примет следующий вид:

$$\begin{array}{ll}
\dot u_\delta = 0, & (\delta=1,\ldots,l)\\
\dot u_p = U_p\left(u_1,\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right), & (p=l+1,\ldots,k)\\
\dot x_j = \alpha_j y_j + X_j\left(u_1,\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right), & (j=1,\ldots,q)\\
\dot y_j = -\alpha_j x_j + Y_j\left(u_1,\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right), & \\
\dot z_s = a_{s1}z_1+\ldots+a_{sn-k-2q}z_{n-k-2q}+ & \\
+Z_s\left(u_1,\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right). & (s=1,\ldots,n-k-2q)
\end{array} \tag{3}$$

Интегрируя первые l уравнений системы (3), получим:

$$u_\delta = c_\delta \qquad\qquad (\delta=1,\ldots,l) \tag{4}$$

$(c_\delta = u_\delta^o = u_\delta(t_o)$ — постоянные интегрирования $\delta=1,\ldots,l)$.

Подставляя решения (4) в остальные $(n-l-k-2q)$ уравнения системы (3), получим

$$\begin{array}{l}
\dot u_p = U_p\left(c_1,\ldots,c_l,u_{l+1},\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right),\\
\dot x_j = \alpha_j y_j + X_j\left(c_1,\ldots,c_l,u_{l+1},\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right),\\
\dot y_j = -\alpha_j x_j + Y_j\left(c_1,\ldots,c_l,u_{l+1},\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right),\\
\dot z_s = a_{s1}z_1+\ldots+a_{sn-k-2q}z_{n-k-2q}+\\
\qquad\qquad + Z_s\left(c_1,\ldots,c_l,u_{l+1},\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right).\\
(p=l+1,\ldots,k),\ (j=1,\ldots,q),\ (s=1,\ldots,n-k-2q).
\end{array} \tag{5}$$

Пусть функции $U_p\left(c_1,\ldots,c_l,u_{l+1},\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&U_p\left(c_1,\ldots,c_l,u_{l+1},\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right)=\\
&=U_p\left(c_1,\ldots,c_l,u_{l+1},\ldots,u_k,0,\ldots,0\right)+\\
&+\bar{U}_p\left(c_1,\ldots,c_l,u_{l+1},\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right)\\
&(p=l+1,\ldots,k)
\end{aligned}\tag{6}$$

где первые слагаемые правых частей представляют собой члены, не содержащие переменные $x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}$, а вторые слагаемые удовлетворяют условиям:

$$\bar{U}_p^*=\bar{U}_p\left(c_1,\ldots,c_l,u_{l+1},\ldots,u_k,0,\ldots,0\right)\equiv 0\qquad (p=l+1,\ldots,k)$$

В этом случае систему (5) можем записать в виде

$$\begin{aligned}
&\dot{u}_p=U_p(c_1,\ldots,c_l,u_{l+1},\ldots,u_k,0,\ldots,0)+\bar{U}_p,\\
&\dot{x}_j=\alpha_j y_j+X_j\left(c_1,\ldots,c_l,u_{l+1},\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right),\\
&\dot{y}_j=-\alpha_j x_j+Y_j\left(c_1,\ldots,c_l,u_{l+1},\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right)\\
&\dot{z}_s=a_{s1}z_1+\ldots+a_{sn-k-2q}z_{n-k-2q}+\\
&\qquad\qquad+Z_s(c_1,\ldots,c_l,u_{l+1},\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}),\\
&\quad p=l+1,\ldots,k,\quad j=1,\ldots,q,\quad s=1,\ldots,n-k-2q.
\end{aligned}\tag{7}$$

Пусть тривиальное решение системы

$$\dot{u}_p=U_p\left(c_1,\ldots,c_l,u_{l+1},\ldots,u_k,0,\ldots,0\right)\qquad (p=l+1,\ldots,k)\tag{8}$$

асимптотически устойчиво в целом, равномерно по $c_\delta\,(\delta=1,\ldots,l)$. В этом случае для системы (8) существует определенно-положительная функция $V_1\left(u_{l+1},\ldots,u_k\right)$ [12, с. 37], производная которой в силу системы (8) является определенно-отрицательной функцией, и выполняется условие: $\lim\limits_{\|u\|_{k-l}\to\infty}V_1(u_{l+1},\ldots,u_k)=\infty$, равномерно по $c_\delta\,(\delta=1,\ldots,l)$.

Пусть для системы (7) существует определенно-положительная функция Ляпунова

$$V=V_1\left(u_{l+1},\ldots,u_k\right)+V_2\left(x_1,\ldots,x_q,y_1,\ldots,y_q\right)+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q}b_{sj}\,z_s z_j\tag{9}$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

$$1)\lim_{\|r\|\to\infty}V=\infty,\tag{10}$$

$$2)\sum_{j=1}^{q}\left[\alpha_j y_j\frac{\partial V_2}{\partial x_j}-\alpha_j x_j\frac{\partial V_2}{\partial y_j}\right]=0,\tag{11}$$

$$3) G = \sum_{p=l+1}^{k} \frac{\partial V_1}{\partial u_p} U_p + \sum_{p=l+1}^{k} \frac{\partial V_1}{\partial u_p} \bar{U}_p + \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial V_2}{\partial x_j} X_j + \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial V_2}{\partial y_j} Y_j + \sum_{s=1}^{n-k-2q} \sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_j Z_s \quad (12)$$

и G является знакопостоянной отрицательной функцией равномерно по $c_\delta\,(\delta = 1, \ldots, l)$, причем область $G = 0$ – многообразие точек, не содержащее целых полутраекторий системы (1) при $0 \leq t < \infty$, где $\|r\|$ — евклидова норма вектора r, а $r = (u_1, \ldots, u_k, x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots, y_q, z_1, \ldots, z_{n-k-2q})^T$ – n-мерный вектор-столбец. Здесь неизвестные постоянные коэффициенты b_{ij}, при любой определенно-отрицательной квадратичной форме $W\,(z_1, \ldots, z_{n-k-2q})$, можно определить из условия

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{s=1}^{n-k-2q} \sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_s z_j \right) \Bigg|_{(1.13)} = W\,(z_1, \ldots, z_{n-k-2q})$$

единственным образом, так как система

$$\dot{z}_s = a_{s1} z_1 + \ldots + a_{sn-k-2q} z_{n-k-2q} \qquad (s = 1, \ldots, n-k-2q) \qquad (13)$$

асимптотически устойчива [13, с. 107].

Производная функции $V(x_{l+1}, \ldots, x_n)$ в силу системы (7) будет иметь вид

$$\dot{V}\Big|_{(1.7)} = \sum_{p=l+1}^{k} \frac{\partial V_1}{\partial u_p} U_p + \sum_{p=l+1}^{k} \frac{\partial V_1}{\partial u_p} \bar{U}_p + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j y_j \frac{\partial V_2}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{q} \alpha_j x_j \frac{\partial V_2}{\partial y_j} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial V_2}{\partial x_j} X_j + \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial V_2}{\partial y_j} Y_j + \sum_{s=1}^{n-k-2q} \sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_j Z_s + W\,(z_1, \ldots, z_{n-k-2q}) =$$
$$= G + W\,(z_1, \ldots, z_{n-k-2q})\,. \quad (14)$$

Первое слагаемое правой части (14) является знакопостоянной отрицательной функцией, равномерно по $c_\delta\,(\delta = 1, \ldots, l)$, а второе слагаемое — определенно-отрицательной функцией. Следовательно, при условиях (10)–(12) производная $\dot{V}\Big|_{(7)}$ является знакопостоянной отрицательной функцией, равномерно по $c_\delta\,(\delta = 1, \ldots, l)$. Тогда при любых $c_\delta\,(\delta = 1, \ldots, l)$ для системы (7) будут выполняться все условия теоремы Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом [14, с. 463]. Следовательно, тривиальное решение системы (7) асимптотически устойчиво в целом, равномерно по $c_\delta\,(\delta = 1, \ldots, l)$.

Очевидно также, что система (7) допускает независимые первые интегралы вида

$$\sum_{\theta=1}^{k} d_{\delta\theta} u_\theta = c_\delta \quad (\delta = 1, \ldots, l)$$

причем $d_{\delta\delta} = 1$, $(\delta = 1, \ldots, l)$; $d_{\delta\theta} = 0$; $(\delta = 1, \ldots, l; \theta = 1, \ldots, k; \delta \neq \theta)$, где $D = (d_{ij})$ — постоянная $(l \times k)$-матрица $(\operatorname{rang} D = l)$. Следовательно, для системы (7) будут выполняться все условия теоремы 2.1 об устойчивости по действующей силе [15], откуда следует, что тривиальное решение системы (7) устойчиво по действующей силе, а значит и тривиальное решение системы (1), устойчиво и по действующей силе [3]. Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема. *Если система* (1) *имеет вид* (3), *а функции* $U_p\left(c_1,\ldots,c_l,u_{l+1},\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_{q,}y_1,\ldots,y_q,z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right)$ $(p = l+1,\ldots,k)$ *имеют вид* (6); *система* (8) *асимптотически устойчива в целом, равномерно по* $c_\delta\left(\delta=1,\ldots,l\right)$, *и для системы* (7) *существует определенно-положительная функция* V *в виде* (9) *такая, что имеют место условия* (10)–(12), *то тривиальное решение системы* (1) *устойчиво по действующей силе.*

Список цитируемых источников

1. *Каменков Г.В.* Избранные труды – М.:Наука, 1972 — Т. 1 - 272 с.
2. *Габриелян М.С., Шагинян С.Г.* О неустойчивости систем дифференциальных уравнений при интегрально-малых возмущениях// -Ер.: Ученые записки ЕГУ, 1989. – №1 – С. 27-32.
3. *Шагинян С.Г.* Об одной задаче теории устойчивости.// -Ер.: Ученые записки ЕГУ, 1986. – №2 – С. 39-45.
4. *Амбарцумян С.Р.* Об одной задаче устойчивости по действующей силе в критическом случае при паре чисто мнимых корней для системы второго порядка. / Депонирован в Арм. НИИНТИ. — Ер.:, 2002. – №1 — С. 6.
5. *Амбарцумян С.Р.* Об одной задаче устойчивости в критическом случае при паре чисто мнимых корней. // Механика твердого тела: Тр. Междунар. конф. —Донецк: 2002. № 32. — С. 117-120.
6. *Амбарцумян С.Р.* Об одном способе решения задачи устойчивости по действующей силе при паре чисто мнимых корней для системы второго порядка.// -М.: Естественные и технические науки, 2002, № 3 – С. 8-10.
7. *Амбарцумян С.Р.* Об устойчивости по действующей силе в критическом случае при паре чисто мнимых корней для системы второго порядка.// -Ер.: Ученые записки ЕГУ, 2003. – № 3. – С.50-56.
8. *Амбарцумян С.Р.* Об асимптотической устойчивости по действующей силе в критическом случае при $\boldsymbol{k}$ нулевых и $\boldsymbol{q}$ пар чисто мнимых корней. // «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: Сб. III Междунар. конф. – Минск: 2003.
9. *Амбарцумян С.Р.* О решении задачи устойчивости по действующей силе в критическом случае при одном нулевом и паре чисто мнимых корней.. // «Устойчивость, управление и динамика твердого тела»: Сб. IX Междунар. конф. – Донецк: 2005. – С. 20.
10. *Амбарцумян С.Р.* Достаточные условия устойчивости по действующей силе в критическом случае при $\boldsymbol{k}$ нулевых и $\boldsymbol{q}$ пар чисто мнимых корней. // «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: Сб. IV Междунар. конф. – Минск: 2006. – С. 16-17.

11. *Амбарцумян С.Р.* Устойчивость по действующей силе в критических случаях. // «Устойчивость, управление и динамика твердого тела»: Сб. X Междунар. конф. – Донецк: 2008. – С. 5-6.
12. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. - М.:Физматгиз, 1959. – 211 с.
13. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.-Л.:Гостехиздат, 1950. – 471 с.
14. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. - М.:Наука,1966. – 530 с.
15. *Габриелян М.С., Шагинян С.Г.* О построении функции Ляпунова // – Ер.: Ученые записки ЕГУ, 1987. – №1. – С. 39-45.

Получена 08.06.2010