Динамические системы, вып. 28 (2010), 162–170

УДК 532:631.362

Динамика неоднородного слоя зерна на плоском виброрешете

В. П. Ольшанский*, **С. В. Ольшанский****

*Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства,
Харьков, 61002.
**Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,
Харьков, 03057. *E-mail: stasolsh@mail.ru*

Аннотация. В функциях Кельвина получено решение краевой задачи о колебаниях скорости виброожиженного неоднородного слоя, когда его вязкость является степенной функцией координаты, перпендикулярной скорости потока смеси. Источником изменений скорости потока во времени служат продольные колебания наклонного виброрешета в его плоскости.

Ключевые слова: наклонное виброрешето, колебания скорости, коэффициент вибровязкости, специальные функции.

1. Постановка проблемы

Вибрации решета интенсифицируют процесс разделения зерновой смеси. В условиях вибраций движение зерновой смеси по плоскому решету аналогично движению вязкой жидкости по наклонному лотку. Поэтому в математических моделях вибросепарирования используют гидродинамическую аналогию. Описывая поток зерна уравнениями динамики однородной жидкости, обычно не учитывают изменение вибровязкости смеси по глубине движущегося слоя. Но эксперименты показывают, что вибровязкость зависит от распределения внутреннего давления в слое, а следовательно меняется (увеличивается) с глубиной. Поэтому желательно иметь математические модели потока зерновой смеси, учитывающие эту зависимость.

2. Обзор последних публикаций

Из работ, в которых движение зерновой смеси описывается уравнением динамики неоднородной жидкости, отметим [1]. Там использована нелинейная зависимость коэффициента вибровязкости смеси от координаты, перпендикулярной направлению потока. Определяя усреднённые за период колебаний кинематические характеристики, авторы работы [1] не рассматривают изменение скорости смеси во времени. Колебания скорости неоднородного слоя смеси исследованы в [2], где при решении краевой задачи динамики использована линейная зависимость коэффициента вибровязкости смеси от пространственной координаты. Здесь ставится задача обобщения результатов, полученных в [2], на степенной вид неоднородности.

Целью работы является получение формул для расчёта колебаний скорости потока зерновой смеси на плоском виброрешете, как вязкой жидкости, когда вязкость является степенной функцией координаты, перпендикулярной скорости движения.

3. Основная часть работы

Считаем, что плоское решето совершает продольные гармонические колебания в своей плоскости с амплитудой A^* и частотой ω. Оно наклонено к горизонту под углом θ, как показано на рис. 1. В стационарном режиме слой смеси толщиной

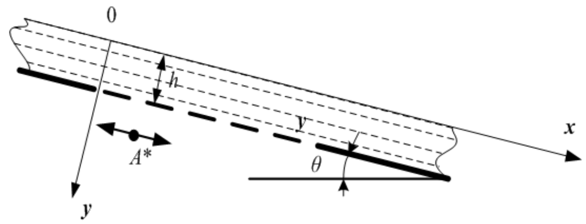

Рис. 1.

h движется в направлении координатной оси ox со скоростью $u(y,t)$, которую определим из решения краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left[\nu(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right] - \frac{\partial u}{\partial t} = -g\sin\theta; \tag{3.1}$$

$$\nu(y)\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0; u(h,t) = A^*\omega\sin(\omega t). \tag{3.2}$$

Здесь g – ускорение свободного падения; t – время; $\nu(y)$ – кинематический коэффициент вибровязкости смеси.

Первое из граничных условий выражает отсутствие касательных напряжений на свободной поверхности слоя, а второе – совпадение скоростей смеси и решета в плоскости их контакта, что аналогично "прилипанию"вязкой жидкости к твёрдой стенке [3].

В работе [2] для определения кинематического коэффициента предложена формула

$$\nu(y) = \frac{by}{12\omega\rho r_0\sqrt{(A^*)^2 - (bcy)^2}}, \tag{3.3}$$

в которой $b = 0,7f\rho(\pi r_0)^2 g\cos\theta$; $c = \pi(4M\omega^2)^{-1}$; f – коэффициент внутреннего трения в смеси плотности ρ; M, r_0 – эквивалентные масса и радиус частиц в смеси, сводимых к шару.

Аналитическое решение краевой задачи для зависимости (3.3) не представляется возможным. Поэтому с целью построения такого решения упростим выражение (3.3), аппроксимируя его степенной функцией

$$\nu(y) = a_* \cdot y^\alpha \tag{3.4}$$

В формуле (3.4) a_* и α неотрицательные постоянные, причём $0 \le \alpha < 2$. При $\alpha = 0$ имеем однородный слой.

Заметим, что аппроксимация изменения модуля упругости по одной из декартовых координат степенными функциями рассматривалась в теории упругости неоднородного тела [4,5,6], а также коэффициента теплопроводности - в задачах теплопроводности [7].

Используя равенство интегралов из (3.3) и (3.4) по y от нуля до h (по толщине слоя), находим, что

$$a_* = \frac{\alpha+1}{12\omega\rho bc^2 r_0 h^{\alpha+1}}\left[A^* - \sqrt{(A^*)^2 - (bch)^2}\right]. \tag{3.5}$$

Таким образом, множитель a_* в (3.4) зависит от механико-технологических характеристик смеси и параметров вибраций решета.

Подстановка (3.4) в (3.1) приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^\alpha \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{1}{a_*}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{g\sin\theta}{a_*}. \tag{3.6}$$

Его решение ищем в виде суммы

$$u(y,t) = u_1(y) + u_2(y,t), \tag{3.7}$$

где первое слагаемое не зависит от t.

Подставив (3.7) в (3.6), получаем уравнения:

$$\frac{d}{dy}\left(y^\alpha \frac{du_1}{dy}\right) = -\frac{g\sin\theta}{a_*}; \tag{3.8}$$

$$a_*\frac{\partial}{\partial y}\left(y^\alpha \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) - \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0. \tag{3.9}$$

Сумма (3.7) будет удовлетворять условиям (3.2), когда порядок степенных особенностей у производных $\frac{du_1}{dy}$ и $\frac{\partial u_2}{\partial y}$ в нуле будет меньше, чем у $y^{-\alpha}$ при $y \to 0$

$$u_1(h) = 0; u_2(h) = A^*\omega\sin(\omega t).$$

Кроме того, по физическому смыслу функции $u_1(y)$ и $u_2(y,t)$ должны быть ограничены при $y \to 0$.

Решение краевой задачи для уравнения (3.8) получаем двойным интегрированием в виде

$$u_1(y) = \frac{g\sin\theta}{a_*(2-\alpha)}(h^{2-\alpha} - y^{2-\alpha}). \tag{3.10}$$

Решение краевой задачи для уравнения (3.9) представляем выражением

$$u_2(y,t) = \Re w(y)\cdot\sin(\omega t) + \Im w(y)\cdot\cos(\omega t), \tag{3.11}$$

в котором $i = \sqrt{-1}$; $w(y)$ – комплексная функция вещественного аргумента, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d^2w}{dy^2} + \frac{\alpha}{y}\frac{dw}{dy} - \frac{i\omega}{a_* y^\alpha}w = 0 \tag{3.12}$$

и граничным условиям:

$$\Re w(h) = A^*\omega; \Im w(h) = 0. \tag{3.13}$$

Как и $u_2(0)$, функция $w(y)$ должна быть ограниченной при $y = 0$, а её производная возрастает медленнее, чем $y^{-\alpha}$ при $y \to 0$.

Общим решением уравнения (3.12) есть сумма

$$w(y) = (c_1 + ic_2)\xi^\beta I_\beta\left(\xi e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + (c_3 + ic_4)\xi^\beta K_\beta\left(\xi e^{i\frac{\pi}{4}}\right), \tag{3.14}$$

в которой $\beta = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}$; $\xi = \frac{\sqrt{\omega}}{q\sqrt{a_*}}y^q$; $q = 1 - \frac{\alpha}{2} > 0$; $I_\beta(z), K_\beta(z)$ – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда индексов β; c_1, c_2, c_3, c_4 – вещественные произвольные постоянные.

Далее будем различать два случая. Первый из них характеризуется тем, что:

$$0 \le \alpha \le 1; 0 \le \beta \le 1/2. \tag{3.15}$$

Поскольку индекс $\beta > 0$, то несмотря на сингулярность в нуле функции $K_\beta(z)$, решение (3.14) будет ограниченным. Потребуем, что оно имело в нуле и ограниченную производную, что согласуется с физическим смыслом конечного градиента скорости.

Учитывая формулы дифференцирования [8]

$$\frac{d}{dz}(z^\beta I_\beta(z)) = z^\beta I_{\beta-1}(z); \frac{d}{dz}(z^\beta K_\beta(z)) = -z^\beta K_{\beta-1}(z)$$

и асимптотику цилиндрических функций малого аргумента [8]

$$I_\beta(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\beta; K_\beta(z) \sim \frac{1}{2}\Gamma(|\beta|)\left(\frac{z}{2}\right)^{-|\beta|}; \tag{3.16}$$

приходим к выводу, что $w'_y(y)$ будет ограниченной в нуле, когда

$$\frac{c_j}{\Gamma(\beta)} - \frac{c_{j+2}}{2}\Gamma(1-\beta) = 0, j = \overline{1;2}. \tag{3.17}$$

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма функция.

Поскольку [8] $\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)=\frac{\pi}{\sin(\beta\pi)}$, то выражение (3.17) принимает вид

$$c_{j+2}=\frac{2\sin(\beta\pi)}{\pi}c_j. \tag{3.18}$$

Таким образом, в решении (3.14) остаётся только две произвольных постоянных c_1 и c_2.

Подставив (3.18) в (3.14), с учётом того, что [8]

$$K_\beta(z)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\beta}(z)-I_\beta(z)}{\sin(\beta\pi)},$$

получаем

$$w(y)=(a_1+ia_2)\xi^\beta e^{-i\frac{\beta\pi}{2}}I_{-\beta}\left(\xi e^{i\frac{\pi}{4}}\right). \tag{3.19}$$

Здесь $a_j=c_je^{i\frac{\beta\pi}{2}}$ – новые произвольные постоянные.

Поскольку [8]

$$I_{-\beta}\left(\xi e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=[ber_{-\beta}(\xi)+ibei_{-\beta}(\xi)]e^{i\frac{\beta\pi}{2}},$$

то согласно (3.19),

$$\begin{aligned}\Re w(y)&=\xi^\beta[a_1ber_{-\beta}(\xi)-a_2bei_{-\beta}(\xi)];\\ \Im w(y)&=\xi^\beta[a_1bei_{-\beta}(\xi)+a_2ber_{-\beta}(\xi)].\end{aligned} \tag{3.20}$$

Подставив (3.20) в (3.13), приходим к системе уравнений относительно неизвестных a_1 и a_2:

$$\begin{aligned}a_1ber_{-\beta}(\eta)-a_2bei_{-\beta}(\eta)&=\eta^{-\beta}A^*\omega;\\ a_1bei_{-\beta}(\eta)+a_2ber_{-\beta}(\eta)&=0,\end{aligned} \tag{3.21}$$

где $\eta=\frac{\sqrt{\omega}}{q\sqrt{a_*}}h^q$.

Из (3.21) находим, что

$$a_1=\frac{\eta^{-\beta}A^*\omega ber_{-\beta}(\eta)}{ber^2_{-\beta}(\eta)+bei^2_{-\beta}(\eta)};a_2=\frac{\eta^{-\beta}A^*\omega bei_{-\beta}(\eta)}{ber^2_{-\beta}(\eta)+bei^2_{-\beta}(\eta)}.$$

Учитывая (3.7), (3.10), (3.11), (3.20), получаем решение краевой задачи, при соблюдении неравенства (3.15):

$$\begin{aligned}u(y,t)=\frac{g\sin\theta}{a_*(2-\alpha)}(h^{2-\alpha}-y^{2-\alpha})+[a_1ber_{-\beta}(\xi)-a_2bei_{-\beta}(\xi)]\xi^\beta\times\\ \times\sin(\omega t)+[a_1bei_{-\beta}(\xi)+a_2ber_{-\beta}(\xi)]\xi^\beta\cos(\omega t).\end{aligned} \tag{3.22}$$

В частных случаях оно совпадает с известными результатами. Так при $\alpha = 1, \beta = 0$ (3.22) совпадает с решением, опубликованным в [2].

Если $\alpha = 0, \beta = 1/2$,

$$ber_{-1/2}(\xi) = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi\xi_1}}\left(\sinh\xi_1\sin\xi_1\sin\frac{3\pi}{8} + \cosh\xi_1\cos\xi_1\cos\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$bei_{-1/2}(\xi) = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi\xi_1}}\left(\sinh\xi_1\sin\xi_1\cos\frac{3\pi}{8} - \cosh\xi_1\cos\xi_1\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

$\xi_1 = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\omega_*}}y$ и выражение (3.22) принимает вид

$$u(y,t) = \frac{g\sin\theta}{2a_*}(h^2 - y^2) + \frac{A*\omega}{\sinh^2\eta_1 + \cos^2\eta_1}[(\sinh\eta_1\sinh\xi_1\sin\eta_1\sin\xi_1 +$$

$$+\cosh\eta_1\cosh\xi_1\cos\eta_1\cos\xi_1)\sin(\omega t) + (\cosh\eta_1\sinh\xi_1\cos\eta_1\sin\xi_1 - \sinh\eta_1\times$$

$$\times\cosh\xi_1\sin\eta_1\cos\xi_1)\cos(\omega t)], \eta_1 = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2a_*}}h. \tag{3.23}$$

Формула (3.23) описывает колебания скорости в однородном псевдоожиженом слое. Ранее она была получена в [9] и [2].

Далее рассмотрим второй случай неоднородности, когда

$$1 \le \alpha < 2; -\infty < \beta \le 0. \tag{3.24}$$

При произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4 и отрицательном индексе β решение (14) становится неограниченным на свободной поверхности слоя $\xi = 0$. Поэтому выберем константы так, чтобы (3.14) не противоречило физическому смыслу задачи.

Используя асимптотику (3.16), приходим к выводу, что при $\beta < 0$ и $\xi \to 0$ условием ограниченности суммы (3.14) является (3.18). Поэтому решение (3.22) остаётся в силе и для второго случая неоднородности, хотя его производная по y теперь бесконечна при $y = 0$, но соблюдается первое граничное условие в (3.2). Чтобы убедиться в этом, определим порядок степенных особенностей.

Используя формулу [8]

$$\frac{d}{dz}\left(z^\beta I_{-\beta}(z)\right) = z^\beta I_{1-\beta}(z)$$

и асимптотику (16), с точностью до постоянной λ, находим

$$w'(y) \sim \lambda\xi y^{q-1} = \lambda y^{1-\alpha}.$$

При $\alpha > 1$ показатель $1-\alpha < 0$, поэтому производная $w'(y)$ бесконечна в нуле. Но

$$\lim_{y\to 0} y^\alpha w'(y) = \lambda\lim_{y\to 0} y = 0,$$

т.е. на свободной поверхности слоя равно нулю касательное напряжение при неограниченном градиенте скорости.

В рассматриваемом втором случае неоднородности слоя существует бесконечное множество значений α, для которых решение (3.22) выражается в элементарных функциях. Такие значения показателя определяются соотношением

$$-\beta = \frac{\alpha-1}{2-\alpha} = n - \frac{1}{2}; n \in N,$$

из которого следует

$$\alpha = \frac{4n}{2n+1}.$$

Например, при $n=1$: $\alpha = 4/3$; $\xi_2 = \frac{3\sqrt{\omega}}{\sqrt{2a_*}} y^{1/3}$;

$$ber_{1/2}(\xi) = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi\xi_2}}\left(\sinh\xi_2\cos\xi_2\sin\frac{3\pi}{8} - \cosh\xi_2\sin\xi_2\cos\frac{3\pi}{8}\right);$$

$$bei_{1/2}(\xi) = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi\xi_2}}\left(\cosh\xi_2\sin\xi_2\sin\frac{3\pi}{8} + \sinh\xi_2\cos\xi_2\cos\frac{3\pi}{8}\right);$$

и (3.21) принимает вид

$$u(y,t) = \frac{3g\sin\theta}{2a_*}(h^{2/3} - y^{2/3}) + \frac{A^*\omega}{\sqrt{2}\xi_2(\sinh^2\eta_2 + \sin^2\eta_2)}\times$$

$$\times[(\sinh\eta_2\sinh\xi_2\cos\eta_2\cos\xi_2 + \cosh\eta_2\cosh\xi_2\sin\eta_2\sin\xi_2)\sin(\omega t)+$$

$$+(\sinh\eta_2\cosh\xi_2\cos\eta_2\sin\xi_2 - \cosh\eta_2\sinh\xi_2\sin\eta_2\cos\xi_2)\cos(\omega t)], \qquad (3.25)$$

причём $\eta_2 = \frac{3\sqrt{\omega}}{\sqrt{2a_*}} h^{1/3}$.

В (3.25) возникает неопределённость типа $|0/0|$ при $y \to 0$. Раскрыв её, находим

$$u(0,t) = \frac{3g\sin\theta}{2a_*}h^{2/3} + \frac{A*\omega}{\sqrt{2}(\sinh^2\eta_2 + \sin^2\eta_2)}[(\sinh\eta_2\cos\eta_2 +$$

$$+\cosh\eta_2\sin\eta_2)\sin(\omega t) + (\sinh\eta_2\cos\eta_2 - \cosh\eta_2\sin\eta_2)\cos(\omega t)],$$

что упрощает анализ колебаний скорости потока на поверхности слоя.

Таким образом, как для неравенств (2.15), так и для неравенств (3.24), решение краевой задачи выражается с помощью функций Кельвина, а в отдельных случаях неоднородности - в элементарных функциях.

С целью апробации полученных решений краевой задачи проведены вычисления изменений скорости потока при следующих исходных данных: $\rho = 750$кг/м^3; $f = 0,47$; $M = 0,00004$кг; $r_0 = 0,001825$м; $h = 0,008$м, которые соответствуют зерновой смеси пшеницы [2]. Работу решета характеризовали параметрами: $\theta = 5^0$; $A^* = 0,0075$м; $\omega = 41,86$с$^{-1}$. Для разных y и t по формуле (3.22) вычислили $u(y,t)$ при различных значениях α. Результаты расчётов представлены на рис. 2.

На рис.2 нанесены зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы по высоте слоя: 1,2,3,4 – $y/h = 0,25; 0,5; 0,75; 1$; a) – $\alpha = 0$; b) – $\alpha = 0,25$; c) – $\alpha = 0,5$; d) – $\alpha = 1$.

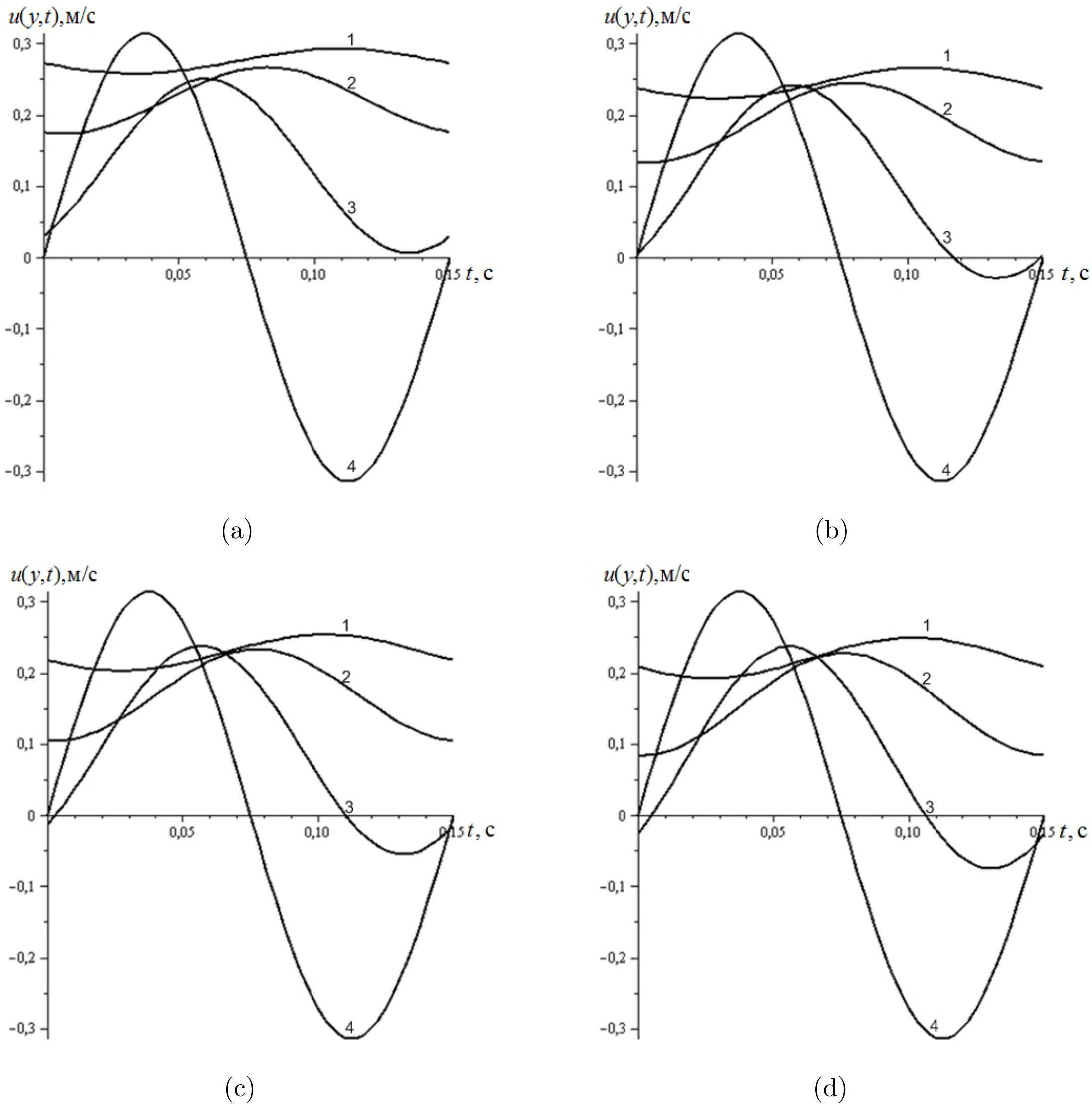

Рис. 2.

4. Заключение

С увеличением глубины частицы в слое уменьшается средняя скорость движения, но возрастает амплитуда её колебаний. Вследствие вычисления a_* по формуле (3.5), величина коэффициента α, при $\alpha < 1$, незначительно влияет на скорость движения. Таким образом, расчётная модель оказывается "устойчивой"к изменению показателя степенной неоднородности и вычисление скорости потока можно приближённо проводить по теории однородного слоя, соответствующей $\alpha = 0$, когда решение задачи динамики выражается в элементарных функциях.

Список цитируемых источников

1. *Ольшанский В.П., Кучеренко С.И., Бурлака В.В.* К расчёту движения зерновой смеси по плоскому вибрирующему решету // Технічний сервіс АПК, техніка та технології у сільськогосподарському машинобудуванні: Вісник ХНТУСГ. — 2009. — Вип.77 — С. 238–244.
2. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Гидродинамика сепарирования зерна. — Харьков: Міськдрук, 2010. — 174 с.
3. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973. — 847 с.
4. *Плевако В.П.* Общие решение в задачах теории упругости неоднородных сред. — Харьков: Основа, 1997. — 160 с.
5. *Попов Г.Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. — Киев-Одесса: Вища школа, 1982. — 168 с.
6. *Шевляков Ю.А.* Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред. — Киев-Одесса: Вища школа, 1977. — 216 с.
7. *Коренев Б.Г.* Задачи теории теплопроводности и термоупругости. — М.: Наука, 1980. — 400 с.
8. *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). — М.: Наука, 1979. — 832 с.
9. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* К расчёту движения зерновой смеси на вибрирующем плоском наклонном решете // Вібрації в техніці та технологіях. — 2009. — №1 — С. 109–113.

Получена 10.06.2010