Динамические системы, вып. 28 (2010), 153–161

УДК 519.8

Отыскание множеств альтернатив многокритериальной задачи теории расписаний при помощи эволюционного алгоритма

А. С. Бондаренко, И. В. Козин

Запорожский национальный университет,
Запорожье 69600. *E-mail: buenasdiaz@gmail.com, ainc@ukrpost.net*

Аннотация. Рассматривается $\mathcal{NP}$-трудная двухкритериальная задача о выполнении работ на параллельных идентичных машинах. В качестве критериев берутся критерий числа машин и критерий длины расписания. Предложен гибридный метод поиска оптимального решения для данной задачи. Получены теоретические оценки области применимости предложенного метода. Проведено сравнение характеристик этого метода с аналогичными характеристиками метода случайного поиска.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, теория расписаний, эволюционный алгоритм.

Введение

Постановка задачи многокритериальной оптимизации (ЗМО) может быть записана следующим образом [4]:

$$y \to \min, \qquad y = f(x), \qquad x \in X, \qquad f : X \to \mathbb{R}^n.$$

Под $f = (f_1, \ldots, f_m)$ будем понимать векторный критерий, состоящий из m частных критериев $f_i : X \to \mathbb{R}$. Множеством допустимых решений данной ЗМО является X. Критериальным пространством будет называть образ X под действием отображения $f : X \to \mathbb{R}^n$ и обозначать как Y.

Наличие векторного критерия влечет за собой необходимость сравнения между собой векторов, результат которого зависит от порядка заданного на критериальном пространстве Y. Будем, согласно [11, 5], различать покомпонентный порядок $y \le y' \Leftrightarrow y_i \le y'_i \wedge y \ne y' \ \forall i$ и строгий покомпонентный порядок $y < y' \Leftrightarrow y_i < y'_i \ \forall i$.

Трудность оптимизации в многокритериальном случае состоит в том, что улучшение значения одного критерия может привести к ухудшению по одному или нескольким другим критериям. В такой ситуации оба значения векторных критериев несравнимы. Несравнимость векторов и обуславливает то, что оптимальным является не одно решение, а некоторое множество решений.

© *А. С. БОНДАРЕНКО, И. В. КОЗИН*

Будем говорить, что решение x (вектор y) является оптимумом по Парето, эффективным решением (вектором), если не существует $x' \in X$ $(y' \in Y)$ такого, что $f(x') \le f(x)$ $(y \le y')$. Множеством Парето (границей Парето) $P_f(X)$ $(P(Y))$ данной ЗМО будем называть множество всех оптимальных по Парето решений (векторов).

Решение x (вектор y) является слабым оптимумом по Парето, слабо эффективным решением (вектором), оптимумом по Слейтеру, если не существует $x' \in X$ $(y' \in Y)$ такого, что $f(x') < f(x)$ $(y < y')$. Полным множеством альтернатив (ПМА) будем называть подмножество множества Парето $P_f(X)$ минимальной мощности, образом которого в критериальном пространстве является $P(Y)$. Согласно [2], множества $P_f(X)$ и ПМА будем называть множествами альтернатив (МА).

Если $x_1, x_2 \in X$ и $f(x_1) \le f(x_2)$, тогда будем считать, что x_1 доминирует x_2.

Поскольку в дальнейшем будут оцениваться приближения границы Парето, дадим соответствующее определение из классической работы [15]. Множество целевых векторов $A \subseteq Y$ называется приближением (аппроксимацией) $P(Y)$, если любые два вектора из этого множества взаимно не доминируют друг друга. На семействе аппроксимаций границы Парето может быть задан частичный порядок.

В настоящей статье исследуется задача отыскания приближения границы Парето для задачи об оптимальных расписаниях в модели идентичных параллельных машин с двумя целевыми критериями. Постановка задачи описывается следующим образом.

Предположим, что множество работ $\{J_1, \ldots, J_j, \ldots, J_n\} = \mathcal{J}$ требуется выполнить на множестве машин $\{M_1, \ldots, M_i, \ldots, M_m\} = \mathcal{M}$. Каждая работа J_j имеет время выполнения p_j, одинаковое для всех машин. В данном расписании σ при начале выполнения работы J_j в момент $S_j(\sigma)$, завершается выполнение в $C_j(\sigma) = S_j(\sigma) + p_j$. Работы выполняются без прерываний, т.е. в интервале $[S_j(\sigma), C_j(\sigma))$ на машине $M(J_j)$, занимаемой работой J_j, не может выполняться никакая другая работа и каждая работа выполняется только на одной машине. Под расписанием σ понимается пара, включающая множество $\{S_j(\sigma) | J_j \in \mathcal{J}\}$ и отображение $: \mathcal{J} \to \mathcal{M}$. Допустимым решением данной задачи называется расписание σ, удовлетворяющее всем ее условиям. Одним из двух критериев задачи является длина расписания или время завершения выполнения последней работы, которое обозначается как $C_{max}(\sigma) = max\{C_j(\sigma)\}$. Вторым критерием является число использованных в расписании σ машин $m(\sigma)$. Оптимальным расписанием для поставленной задачи является допустимое расписание с оптимальным по Парето значением векторного критерия. В данной работе будет рассматриваться задача отыскания ПМА или порождения приближения границы Парето.

Данная задача является обобщением двух классических задач: задачи $P/d_j = d/m$ о минимизации числа используемых машин, которая эквивалентна задаче упаковки контейнеров [20], и задаче $P//C_{max}$ о выполнении работ на параллельных идентичных машинах. Согласно классификации задач теории расписаний, введенной в [12], и расширенной в [22], обозначается она как $P//\epsilon(C_{max}/m)$. Для обеих задач установлена $\mathcal{NP}$-трудность в сильном смысле [8, 1]. В то же время при любом фиксированном числе машин m (m > 1) или контейнеров обе задачи $\mathcal{NP}$-трудны лишь в простом смысле, допускают псевдополиномиальное решение и имеют эквивалентные соответствующие им задачи распознавания, что влечет одинаковый уровень трудности этих задач.

Критерий $\epsilon(C_{max}/m)$ подразумевает, что рассматривается задача с двумя критериями C_{max} и m, при этом решается набор однокритериальных задач оптимизации по первому критерию при различных значениях второго. Символ ϵ показывает, что подходом решения поставленной задачи будет метод ϵ - ограничений (в дальнейшем метод ограничений).

Задача отыскания множества альтернатив в модели идентичных параллельных машин с двумя критериями $\mathcal{NP}$-трудна, поскольку $\mathcal{NP}$-труден частный случай этой задачи с одним критерием $P//C_{max}$.

Результаты работ [2, 3] о полноте некоторых многокритериальных задач комбинаторной оптимизации, и, как следствие, об экспоненциальной мощности МА, стали обоснованием их труднорешаемости в смысле явного представления всего МА. Таким образом, актуальной является задача разработки методов отыскания за приемлемое время аппроксимации границы Парето, удовлятворяющего некоторому критерию качества.

Одним из интенсивно развивающихся в настоящее время направлений исследований в области комбинаторной оптимизации является изучение гибридных методов (ГМ) [7], по крайней мере одна из компонент которых является метаэвристикой. ГМ понимаются как подходы, объединившие различные алгоритмы, которые применялись самостоятельно на начальных этапах своего существования. Целью гибридизации предполагается улучшение качества решений относительно решений, генерируемых входящими в состав ГМ алгоритмами по отдельности. Кроме того, часто алгоритмы, составляющие ГМ, по отдельности не применимы к решению рассматриваемой задачи. Улучшение качества решений может достигаться за счет включения знаний об особенностях задачи в метаэвристику. Предлагаемый в данной статье метод, представляющий собой комбинацию эволюционного алгоритма (ЭА) и подхода из теории математического программирования, метода ограничений, использует особенности структуры рассматриваемой задачи.

Многочисленные работы из области многокритериальных эволюционных вычислений можно найти в [10].

В дальнейшем будем называть ЭА, которые находят аппроксимацию МА, многокритериальными ЭА (МЭА).

Первое применение гибрида этих двух методов к задачам комбинаторной оптимизации встречается в [19], в которой было показано превосходство МЭА над гибридом метода ограничений и однокритериального генетического алгоритма. В работе [18] был предложен подобный гибрид для задачи о рюкзаке, который превзошел по показателям качества такие известные в литературе МЭА как: SPEA, NSGA, NPGA и VEGA. В работе [16] рассматривается подход к адаптивному изменению вектора верхних граней, который имеет сложность $O(k^{m-1})$, где k - число оптимумов Парето, а m - число частных критериев векторного критерия ЗМО.

Этот метод гарантированно находит $P_f(X)$, при условии оптимального решения однокритериальной задачи. Культуральный алгоритм на основе дифференциальной эволюции в сочетании с методом ограничений был предложен в [6] с демонстрацией превосходства над МЭА NSGA-II при решении задачи о рюкзаке.

До настоящего времени в литературе не рассматривалась задача о параллельных машинах с критериями длины расписания и числа машин с точки зрения порождения ПМА, не был решен статус о мощности ее ПМА и методов ее решения. В настоящей работе перечисленные вопросы получили свое решение.

Целью настоящей работы является оценка максимальной мощности ПМА и сравнение качества решений, полученных при помощи гибридного метода на основе ЭА и метода ограничений, по сравнению с алгоритмом случайного поиска (АСП).

1. Метод ограничений

Одним из способов поиска МА для ЗМО является метод ограничений [14], который заключается в сведении ее решения к решению последовательности однокритериальных задач вида:

$$f_j(x) \to \min, \quad x \in X, \quad f_i(x) \le \epsilon_i^j, \quad \text{где} \quad \forall i = [1; m], \quad j \neq i. \tag{1.1}$$

Оптимальное решение последней задачи является, по крайней мере, слабым оптимумом Парето соответствующей ЗМО. При единственности оптимального значения векторного критерия при поочередной оптимизации всех частных критериев ЗМО, соответствующее ему решение является также оптимумом Парето [11, 22, 23].

В [17] рассматривался также вариант этого метода с ограничениями-равенствами.

Для доказательства теоремы о достаточности данного метода для нахождения ПМА понадобится следующая лемма [23]

Лемма. *Если решение x^0 является оптимумом Парето, для любого f_j всегда существует ϵ^j, при котором x^0 является оптимумом задачи (1.1).*

Исходя из этой леммы правомерно утверждать следующее

Теорема. *МА, полученное решением серии задач вида (1.1) для одного произвольного фиксированного f_j и всех возможных значений ϵ^j из множеств значений всех критериев за исключением j-того, содержит ПМА.*

Доказательство. Докажем утверждение теоремы от противного. Предположим, что найденное МА не содержит ПМА. Это значит, что множество оптимумов, полученные решением серии задач вида (1.1), не содержит ни одного оптимума Парето или содержит подмножество множества Парето $P_f(X)$, не являющееся ПМА. Учитывая то, что были перебраны все возможные значения вектора верхних граней ϵ^j, это противоречит лемме. □

Из этой теоремы следует, что

Следствие. *Мощность ПМА не превышает мощности минимального множества из семейства множеств значений частных критериев ЗМО.*

2. Поиск приближений при помощи эволюционных алгоритмов

На создание предложенного алгоритма определяющее влияние оказало то, что множество значений критерия числа машин известно априори и составляет множество $\{1, \ldots, n\}$, где n - число работ в рассматриваемой индивидуальной задаче. Вторым фактором послужила $\mathcal{NP}$-трудность рассматриваемой массовой задачи. Первое предопределило критерий, по которому проводится оптимизация, а второе - выбор класса ЭА для однокритериальной оптимизации.

Множество значений критерия числа машин растет как $O(n)$ (следствие), т.е. с линейной скоростью, относительно размерности задачи, которая выражается в числе работ n. В связи с этим для решения задачи может быть использован классический однокритериальный ЭА, причем для задачи размерностью n алгоритм запускается n раз. Решается при этом однокритериальная задача о выполнении работ на идентичных параллельных машинах с критерием длины расписания $P//C_{max}$. Качество получаемого в результате выполнения серии задач (1.1) приближения всецело зависит от эффективности ЭА, поскольку, исходя из вышедоказанной теоремы, найденное приближение будет содержать ПМА, если, кроме выполнения прочих условий, решение однокритериальных задач будет оптимальным. Поскольку данная задача $\mathcal{NP}$-трудна, то результатом работы метода является некоторое множество решений, содержащее в большинстве случаев приближение и доминируемые решения.

ЭА, примененный к решению $P//C_{max}$, может быть описан следующим образом. Внутри алгоритма допустимые решения представлены при помощи перестановок. Были рассмотрены два варианта оценки целевой функции. Первый способ заключается в назначении работ на машину с минимальной текущей загрузкой в порядке их появления в перестановке. Во втором случае работы назначаются на машину с наименьшим номером при условии, что добавление работы на рассматриваемую машину не увеличит длину расписания. Если это условие не выполняется для машины M_i, то выполняется проверка для M_{i+1}. Если же не найдено ни одной машины, удовлетворяющей этому условию, работа назначается на машину M_i.

Работа ЭА начинается с генерации при помощи равномерного распределения начальной популяции решений размером N. Размер популяции остается постоянным на протяжении всего времени работы ЭА. После получения всей популяции проводится оценка значения целевой функции. Затем проводится отбор K пар родителей для получения решений-потомков. Проводится кроссовер и мутация, полученные решения оцениваются. Новая популяция получается отбором усечением из объединенной популяции родителей и потомков. Так цикл повторяется, начиная с отбора родителей и заканчивая отбором новой популяции, до момента выполнения наперед заданного условия. Для отбора родителей рассматривались схемы равномерного случайного (нейтрального) отбора и различные, зависящие от критерия, функции распределения вероятностей отбора. Основным кроссовером был кроссовер случайного отбора, при котором случайно порождается бинарная строка и гены в позициях, соответствующих нулям переходят в хромосому потомка из первого родителя, остальные из второго. Ген, вошедший в хромосому потомка, удаляется их хромосом обоих родителей. Условием остановки определено число поколений G.

3. Результаты тестирования и методы их оценки

Для оценки качества приближения были предложены раличные методы и способы их классификации. Одним из таких способов классификации является n-арность метода, т.е. если метод унарный (бинарный), то определенное отображение сопоставляет некоторое вещественное число данному приближению (данной упорядоченной паре (A, B)). Следующим критерием классификации является то, что им описывается: близость к оптимуму или равномерность распределения решений. Далее, в [24] дан обзор значительного набора подходов к оценке аппроксимаций и исследованы такие их свойства как совместимость и полнота, первое из которых было введено в [15]. При этом демонстрируется ограниченность унарных методов по сравнению бинарными, которая заключается в том, что, вообще говоря, наиболее сильный вывод при помощи первых может быть получен всего лишь о том, что одна аппроксимация не хуже другой. Этот недостаток унарных методов объясняется авторами обзора невозможностью одновременно удовлетворять двум вышеуказанным свойствам. Вследствие этого, авторы этой статьи избрали бинарный, одновременно полный и совместимый, показатель качества: бинарный ϵ - индикатор (БЭИ). Формула для вычисления этого показателя может быть найдена в [24].

Одним из методов оценки качества приближений $\mathcal{NP}$-трудных задач может быть как их сравнение между собой, так и сравнение с множеством нижних граней (НГ), полученного вычислением НГ для значений одного критерия при фиксированном значении второго. Для определения качества аппроксимации предлагается использовать оба способа как дополняющие друг друга.

Значение НГ вычисляется для критерия длины расписания, при этом используется следующая формула: $LB = max\{max_j p_j; \left\lceil (1/m) \sum_j p_j \right\rceil\}$[13], где символ $\lceil \ldots \rceil$ обозначает функцию округления числа до ближайшего целого в большую сторону. С множеством недоминируемых НГ сравнение проводится при помощи БЭИ. Этот показатель основывается на понятии ϵ - доминирования $\succ_\epsilon$, под которым понимается, что решение x ϵ - доминирует решение y, если $x_i \leq \epsilon \cdot y_i$ для всех i, и, по крайней мере, одно неравенство является строгим. Если перенести данное определение на множества, то $A \succ_\epsilon B$, если для $\forall b \in B \quad \exists a \in A$ такое, что a ϵ - доминирует b.

Для сравнения приближений между собой был применен еще один способ, при котором проводится их объединение, затем выделение решений с недоминируемыми значениями критерия и подсчет для каждого алгоритма числа полученных таким образом решений. Такой же метод сравнения использовался в [9].

Тестирование полученных алгоритмов проводилось на четырех классах индивидуальных задач размерностью 50, 100, 150 и 200 работ каждый. Длительности работ генерировались из интервала [1,n] с равномерным распределением, где n - число работ в данном классе задач. Для генерации длительностей работ был применен генератор случайных чисел с начальными условиями из [21]. Для каждого класса было сгенерировано 10 задач.

Алгоритмы были запрограммированы на языке Visual Basic for Applications для MS Access и выполнены на процессоре Intel Core 2 Duo с тактовой частотой ядра 2 ГГц и 2 ГБ оперативной памяти.

В таблице приводятся средние значения числа недоминируемых решений для каждого метода, средние значения БЭИ для пар множеств (A, B), где A - множество решений, полученное при мощи ЭА или АСП, а B - множество недоминируемых НГ, а также средние значения времени работы каждого алгоритма в формате `мм:сс`. Число раз оценивания критерия при решении одной однокритериальной задачи в каждом алгоритме было установлено равным 4040.

Таблица 1. Результаты применения различных подходов

Размерность задач	ЭА	АСП	БЭИ		Время работы	
			ЭА	АСП	ЭА	АСП
50	32	7	1,185285	1,316055	8:06	13:41
100	53	10	1,351569	1,486657	13:19	21:34
150	76	13	1,436136	1,588914	17:40	29:33
200	85	23	1,514788	1,664303	28:13	44:40

4. Выводы

В данной статье оценена максимальная мощность ПМА для многокритериальной задачи $P//\epsilon(C_{max}/m)$ и предложен новый подход к решению рассматриваемой задачи. Была продемонстрирована связь между структурой ПМА данной задачи и ГМ, позволяющая получать приближения, качество которых определяется эффективностью ЭА, компонента ГМ. Выполнено тестирование предложенных алгоритмов на случайно сгенерированном наборе задач.

Результаты тестирования (таблица 1) доказывают перспективность подхода на основе эволюционного подхода и метода ограничений для поиска аппроксимаций ЗМО теории расписаний.

Список цитируемых источников

1. *Гэри М.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. — М. : Мир, 1982. — 416 с.
2. *Емеличев В.А.* О мощности множества альтернатив в дискретных многокритериальных задачах / Владимир Алексеевич Емеличев, Виталий Афанасьевич Перепелица // Дискрет. матем. — Т. 3, № 3, 1991. — С. 3—12.
3. *Емеличев В.А.* Сложность дискретных многокритериальных задач / В. А. Емеличев, В. А. Перепелица // Дискрет. матем. — Т . 6, №1,1994. — С. 3—33.
4. *Лотов А.В.* Многокритериальные задачи принятия решений / А. В. Лотов, И. И. Поспелова. — М.: МАКС Пресс, 2008. — 197 с. http://www.ccas.ru/mmes/mmeda/L&P2008.pdf
5. *Ногин В.Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 176 с. — ISBN 5-9221-0517-5.
6. *Becerra R.L.* Solving Hard Multiobjective Optimization Problems Using epsilon-Constraint with Cultured Differential Evolution / R.L Becerra, C. A. Coello Coello // PPSN IX, LNCS 4193, 2006. — P. 543—552.
7. *Blum C.* Hybrid Metaheuristics: An Emerging Approach to Optimization / C. Blum, M. Blesa, A. Roli and M. Sampels. — Springer-Verlag, 2008.
8. *Bruno J.* Scheduling Independent Tasks To Reduce Mean Finishing Time / J. Bruno, E.G. Coffman Jr., R. Sethi // Communications of the ACM. — 1974. — Vol. 17, N. 7. — P. 382—387.
9. *Cochran J.K.* A multi-population genetic algorithm to solve multi-objective scheduling problems for parallel machines / Jeffery K. Cochran, Shwu-Min Horng, John W. Fowler // Computers & Operations Research. — 2003. — Vol. 30, N. 7. — P. 1087—1102.
10. *Coello Coello C.A.* List of References on Evolutionary Multiobjective Optimization. Available at: http://www.lania.mx/∼ccoello/EMOO/.
11. *Ehrgott M.* Multicriteria optimization / Matthis Ehrgott. — Berlin: Springer, 2005.
12. *Graham R.L.* Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: A survey / R. L Graham, E. L. Lawler, J. K. Lenstra, and A. H. G. Rinnooy Kan // Annals of Discrete Mathematics. — 1979. — Vol. 5. — P. 287—326.
13. *Gupta J.N.D.* A LISTFIT heuristic for minimizing makespan on identical parallel machines / J. N. D. Gupta, A. J. Ruiz-Torres // Production Planning & Control. — 2001. — Vol. 12, N. 1. — P. 28—36.
14. *Haimes Y.Y.* On a Bicriterion Formulation of the Problems of Integrated System Identification and System Optimization Systems / Yacov Y. Haimes, Leon S. Lasdon, David A. Wismer // IEEE Transactions on Man and Cybernetics. — 1971. — Vol. 1, Issue 3. — P. 296—297.
15. *Hansen M.P.* Evaluating the quality of approximations to the non-dominated set / M. P. Hansen, A. Jaszkiewicz // Technical Report IMM-REP-1998-7. — 1998.
16. *Laumanns M.* An efficient, adaptive parameter variation scheme for metaheuristics based on the epsilon-constraint method / M. Laumanns, L. Thiele, E. Zitzler // European Journal of Operational Research. — 2006. — Vol. 169, N. 3. — P. 932—942.

17. *Lin J.* Multiple-objective problems: Pareto-optimal solutions by method of proper equality constraints / Jiguan Lin // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1976. — Vol. 21, N. 5. — P. 641—650.
18. *Ranjithan S.R.* Constraint Method-Based Evolutionary Algorithm (CMEA) for Multiobjective Optimization / S.R. Ranjithan, S.K Chetan, H.K. Dakshina // Proceedings of the First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. — Springer Verlag, 2001. — P. 299—313.
19. *Schott J.R.* Fault Tolerant Design Using Single and Multicriteria Genetic Algorithm Optimization : master's thesis / Jason R. Schott; Massachusetts Institute of Technology. — Cambridge, 1995. — 200 p.
20. *Stawowy A.* Evolutionary based heuristic for bin packing problem / Adam Stawowy // Computers & Industrial Engineering. — 2008. — Vol. 55, N. 2. — P. 465—474.
21. *Taillard E.* Benchmarks for basic scheduling problems / Eric Taillard // European Journal of Operational Research. — 1993. — Vol. 64, N. 2. — P. 278—285.
22. *T'kindt V.* Multicriteria scheduling problems: a survey / Vincent T'kindt, Jean-Charles Billaut // RAIRO Oper. Res. — 2001. — Vol. 35, N. 2. — P. 143—163.
23. *T'kindt V.* Multicriteria Scheduling: Theory, Models and Algorithms / V. T'kindt, J.-C. Billaut. — Berlin: Springer, 2006.
24. *Zitzler E.* Performance Assessment of Multiobjective Optimizers: An Analysis and Review / E. Zitzler, L. Thiele, M. Laumanns, C.M. Fonseca, V.G. da Fonseca // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. — 2003. — Vol. 7, N. 2. — P. 117—132.

Получена 16.09.2009