*Динамические системы, вып. 28 (2010), 141–152*

УДК 517.9

# Достатні умови біфуркації розв'язку імпульсної крайової задачі зі збуренням

**Т. В. Шовкопляс**

Київський національний університет ім. Тараса Шевченко
Київ 03022. *E-mail: from_ Tatyana@ukr.net*

**Анотація.** Розглядається лінійна неоднорідна імпульсна крайова задача зі збуренням для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка не завжди є розв'язною. Розглядувана крайова задача має породжуючу імпульсну крайову задачу, яка не має розв'язків при довільних неоднорідностях, а це означає, що для неї виконується критичний випадок. Встановлено достатні умови, при виконанні яких розглядувана лінійна неоднорідна імпульсна крайова задача зі збуренням є розв'язною, а, також, знайдено умови, при яких відбувається біфуркація її розв'язку. Знайдено розв'язок розглядуваної задачі.

**Ключові слова:** лінійна неоднорідна імпульсна крайова задача зі збуренням, породжуюча імпульсна крайова задача, критерій розв'язності, критичний випадок, збурення, біфуркація.

## 1. Вступ. Постановка задачі

Зустрічаються випадки, коли лінійна імпульсна крайова задача зі збуренням не завжди є розв'язною на деякому числовому проміжку. Така ситуація вимагає знаходження умов, при виконанні яких дана задача буде розв'язною. Проблемі вивчення умов розв'язності крайових задач зі збуренням для систем лінійних диференціальних рівнянь I-го порядку присвячені праці [1, 2, 8, 12]. Умови біфуркації та розгалудження розв'язків крайових задач для вироджених систем наведені в [3]. Питання встановлення умов розв'язності слабкозбурених крайових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь другого порядку досліджено в [10].

У цій роботі шукаються умови розв'язності лінійної неоднорідної імпульсної крайової задачі зі збуренням для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Розглядається лінійна неоднорідна імпульсна крайова задача зі збуренням

$$(P(t)x')' - Q(t)x - \varepsilon\, Q_1(t)x = f(t), \quad t \in U_0, \tag{1.1}$$

$$\triangle(P(t)x')\big|_{t=t_i} = -\beta_i x'(t_i - 0) - \alpha_i x(t_i - 0) + \varepsilon\alpha_{1i}x(t_i - 0) + \gamma_i, i = 1, 2, \ldots, p, \tag{1.2}$$

$$lx(\cdot\,, \varepsilon\,) = \alpha + \varepsilon\, l_1 x(\cdot\,, \varepsilon\,). \tag{1.3}$$

Тут $[a,\ b]$ – відрізок, на якому розглядається лінійна імпульсна крайова задача зі збуренням (1.1)-(1.3), $t_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, — точки імпульсної дії, що належать відрізку $[a,\ b]$: $t_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, p$; вважається, що $a \equiv t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < t_{p+1} \equiv b$. $U_0$ — числова множина вигляду: $U_0 := [a, b] \backslash \{t_i\}_{i=1}^{p}$.

$x = x(t, \varepsilon)$–$n$-вимірна двічі неперервно диференційовна з розривами в точках імпульсної дії шукана векторна функція: $x(\cdot, \varepsilon) \in C^2(U_0 \times (0, \varepsilon_0])$, $x'(\cdot, \varepsilon)$, $x''(\cdot, \varepsilon) \in C^2(U_0 \times (0, \varepsilon_0])$.

$P(t)$, $Q(t)$, $Q_1(t)$–квадратні $(n \times n)$– вимірні дійсні матриці-функції. Елементи матриці $P(t)$ є дійсні, кусково-неперервно диференційовні на множині $U_0$, з розривами першого роду в точках імпульсної дії: $P(t) \in C^1(U_0)$; елементи матриць $Q(t)$ та $Q_1(t)$ є неперервними на відрізку $[a,\ b]$: $Q(t), \quad Q_1(t) \in C([a,\ b])$. Матриця $P(t)$ є невиродженою: $\det P(t) \neq 0$. $f(t)$–$n$-вимірна кусково-неперервна з розривами в точках імпульсної дії вектор-функція: $f(t) \in C(U_0)$. $\alpha_i, \alpha_{1i}, \beta_i, i = 1, 2, \ldots, p,$– квадратні $(n{\times}n)$–вимірні матриці, елементами яких є дійсні числа, $det[P(t_i{-}0){-}\beta_i] \neq 0$. $\gamma_i,\ i = 1, 2, \ldots, p,$–сталі $n$-вимірні вектори, елементами яких є дійсні числа. $l,\ l_1$– лінійні обмежені $m$-вимірні векторні функціонали, визначені на просторі $n-$ вимірних кусково-неперервних векторних функцій: $l,\ l_1{:}C([a, b]) \to R^m$. $\alpha$–$m$-вимірний дійсний вектор:$\alpha \in R^m$; $\varepsilon$–малий невід'ємний параметр.

Імпульсна крайова задача зі збуренням (1.1)-(1.3) має породжуючу імпульсну крайову задачу:

$$(P(t)x')' - Q(t)x = f(t), \quad t \in U_0, \tag{1.4}$$

$$\triangle(P(t)x')\Big|_{t=t_i} = -\beta_i x'(t_i - 0) - \alpha_i x(t_i - 0) + \gamma_i,\ i = 1, 2, \ldots, p, \tag{1.5}$$

$$lx(\cdot, \varepsilon) = \alpha. \tag{1.6}$$

Імпульсна система диференціальних рівнянь другого порядку (1.4), (1.5) має загальний розв'язок вигляду: $x(t) = X(t)c + \bar{x}(t), \ \ c \in R^{2n}$, де $X(t)$–$(n \times 2n)$-вимірна фундаментальна матриця однорідної імпульсної системи другого порядку (1.5), (1.6) яка складається з $2n$-лінійно незалежних розв'язків однорідної ($f(t) = 0,\ \gamma_i,\ i = 1, 2, \ldots, p$) системи (1.4), (1.5); вектор-функція

$$\bar{x}(t) = \int_a^b K(t, s)P^{-1}(s)f(s)ds + \sum_{i=1}^{p} K(t, t_i + 0)\gamma_i$$

є частинним розв'язком системи імпульсних диференціальних рівнянь (1.4), (1.5); $K(t,\ s)$-$(n \times n)$-вимірна матриця Коші [9, 11]. У результаті дії лінійного $m$-вимірного функціоналу $l$ на фундаментальну матрицю $X(t)$ утворюється $(m{\times}2n)$-вимірна прямокутна матриця $D$, $\mathrm{rank\,D}= n_1, n_1 < \min(2n, m)$. Матриця $D^*$ є транспонованою до матриці $D$. $(2n \times m)-$ вимірна матриця $D^+$ є псевдооберненою за Муром-Пенроузом до матриці $D$ [2, 5, 7].

Через $P_D$ і $P_{D^*}$ позначимо $(2n{\times}2n)$- і $(m{\times}m)$- вимірні матриці-ортопроектори, які проектують простори $R^{2\,n}$ і $R^m$ на нуль-простори $N(D)$ та $N(D^*)$ відповідно: $P_D : R^{2n} \to N(D)$, $N(D) = P_D R^{2n}$; $P_D : R^{2n} \to N(D)$, $N(D^*) = P_{D^*} R^m$. Матриця $N(D)$ має розмірність $r$: $\dim N(D) = 2n$-$\mathrm{rank}\, D = 2n - n_1 = r$, а матриця $N(D^*)$ має розмірність $d$: $\dim N(D^*) = m{-}\mathrm{rank}\, D = m - n_1 = d$. Звідки $\mathrm{rank}\, P_D = r$, а $\mathrm{rank}\, P_{D^*} = d$. Тобто, матриця $P_D$ складається з $r$ лінійно незалежних стовпчиків, а матриця $P_{D^*}$ складається з $d$ лінійно незалежних рядків. Отже, $(2n \times 2n)$-вимірну матрицю $P_D$ можна замінити $(2n\times r)$-вимірною матрицею $P_{D_r}$, що складається з $r$ лінійно незалежних стовпчиків матриці $P_D$; $(m\times m)$-вимірну матрицю $P_{D^*}$ можна замінити $(d\times m)$-вимірною матрицею $P_{D_d^*}$, яка складається з повної системи $d$ лінійно незалежних рядків матриці $P_{D^*}$ [2].

Для породжуючої імпульсної крайової задачі (1.4)-(1.6) має місце твердження [9].

**Теорема 1 (Критичний випадок).** *Нехай виконується умова* $\operatorname{rank} D = n_1 < \min\{2n,\ m\}$. *Тоді однорідна* ($f(t) = 0,\ \gamma_i = 0,\ i = 1,2,\dots,p,\ \alpha = 0$) *імпульсна крайова задача* (1.4)-(1.6) *має* $r$, ($r = 2n - n_1$) *і лише* $r$ *лінійно незалежних розв'язків.*

*Неоднорідна імпульсна крайова задача* (1.4)-(1.6) *розв'язна тоді і тільки тоді, коли вектор-функція* $f(t) \in C(U_0)$ *і сталий вектор* $\alpha \in R^m$ *задовольняють умову розв'язності*

$$P_{D_d^*}[\alpha - l\bar{x}(\cdot)] = 0, \quad (d = m - n_1). \tag{1.7}$$

*При виконанні цих умов імпульсна крайова задача* (1.4)-(1.6) *має* $r$*-параметрич-ну сім'ю лінійно незалежних розв'язків* $x(t,c_r) = X_r(t)c_r + (G[f,\ \gamma_i])(t) + X(t)D^+\alpha,\ t \in [a,b],\quad \forall\ c_r \in R^r$, *де* $X_r(t)$–$(n\times r)$*-вимірна матриця, стовпчики якої утворюють повну систему* $r$ *лінійно незалежних розв'язків однорідної імпульсної системи другого порядку* (1.4), (1.5): $X_r(t) = X(t)P_{D_r}$;

$P_{D_r}$–$(2n\times r)$*-вимірна матриця-ортопроектор, яка складається з* $r$ *лінійно незалежних стовпчиків матриці* $P_D$; $c_r$*–довільний вектор-стовпчик з простору* $R^r$;

$(G[f,\gamma_i])(t)$, $i = 1,2,\dots,n$, $t \in [a,\ b]$, *– узагальнений оператор Гріна, який діє на довільну вектор-функцію* $f(t) \in C(U_0)$ *та вектори* $\gamma_i \in R^n$, $i = 1,2,\dots,n$:

$$(G[f,\gamma_i])(t) \overset{def}{=} \int_a^b K(t,s)P^{-1}(s)f(s)ds - X(t)D^+l\int_a^b K(\,\cdot\,,s)P^{-1}(s)f(s)ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{p} K(t,t_i+0)\gamma_i - X(t)D^+l\sum_{i=1}^{p} K(\cdot,t_i+0)\gamma_i, i = 1,2,\dots,p.$$

## 2. Умови розв'язності імпульсної крайової задачі зі збуренням

Припустимо, що породжуюча імпульсна крайова задача (1.4)-(1.6) не має розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t) \in C(U_0)$, $\gamma_i \in R^n$, $i = 1,2,\dots,p$, та $\alpha \in R^m$ , тобто, має місце критичний випадок ($\operatorname{rank} D = n_1 < n$) і в силу довільного вибору неоднорідностей $f(t) \in C(U_0)$ та $\alpha \in R^m$ критерій розв'язності (1.5) для породжуючої імпульсної крайової задачі (1.4)-(1.6), взагалі кажучи, не виконується.

Тому, потрібно всатановити, чи є такі умови, при виконанні яких імпульсна крайова задача зі збуренням (1.1)-(1.3) буде розв'язною, при умові, що її породжуюча імпульсна крайова задача (1.4)-(1.6) розв'язків не має. Покажемо, що відповідь на це питання можна отримати, побудувавши за допомогою коефіцієнтів імпульсної системи матриці $B_0$ та $B_1$:

Покладемо

$$B_0 := P_{D_d^*}\{l_1 X_r(\,\cdot\,) - l\int_a^b K(\,\cdot\,, s)P^{-1}(s)Q_1(s)X_r(s)ds - l\sum_{i=1}^{p} K(\cdot, t_i + 0)\alpha_{1i}X_r(t_i - 0)\}, \tag{2.1}$$

$B_0$–$(d \times r)$-вимірна матриця, $P_{B_0}$–$(r \times r)$ вимірна матриця-ортопроектор, $P_{B_0}$:$R^r \to N(B_0)$; $B_0^*$–$(r \times d)$-вимірна матриця, спряжена до матриці $B_0$, $P_{B_0^*}$–$(d \times d)$-вимірна матриця-ортопроектор, $P_{B_0^*}$:$R^d \to N(B_0^*)$; $(r \times d)$-вимірна матриця $B_0^+$ є псевдооберненою за Муром-Пенроузом до матриці $B_0$. Щоб отримати нові умови існування розв'язку імпульсної крайової задачі зі збуренням (1.1)-(1.3) , введемо $(d \times r)$-вимірну матрицю $B_1$:

$$B_1 := P_{B_0^*}P_{D_d^*}\{l_1 G_1(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot, s)P^{-1}(s)Q_1(s)G_1(s)ds - \\ - l\sum_{i=1}^{p} K(\cdot, t_i + 0)\alpha_{1i}G_1(t_i - 0)\}P_{B_0}, \tag{2.2}$$

де

$$G_1(t) = (G[Q_1(s)X_r(s)])(t) + X(t)D^+ l_1 X_r(\cdot). \tag{2.3}$$

$B_1^*$–$(r \times d)$-вимірна матриця, транспонована до матриці $B_1$; $P_{B_1}$–$(r \times r)$-вимірна матриця-ортопроектор, яка проектує $r$-вимірний евклідів простір $R^r$ на нуль-простір $N(B_1)$ матриці $B_1$; $P_{B_1^*}$–$(d \times d)$-вимірна матриця-ортопроектор, яка проектує $d$-вимірний евклідів простір $R^d$ на нуль-простір $N(B_1^*)$ матриці $B_1^*$.

Має місце теорема.

**Теорема 2.** *Нехай для імпульсної крайової задачі зі збуренням* (1.1)-(1.3) *має місце критичний випадок* ($\operatorname{rank} D = n_1 < n$)*, тобто, її породжуюча імпульсна крайова задача* (1.4)-(1.6) *не має розв'язків при довільних неоднорідностях* $f(t) \in C(U_0)$, $\gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, *та* $\alpha \in R^m$, *і* $P_{B_0} \neq 0$ *і критерій розв'язності не виконується.*

*Якщо умова*

$$P_{B_1^*}P_{B_0^*} = 0, \tag{2.4}$$

*виконується, то лінійна імпульсна крайова задача зі збуренням* (1.1)-(1.3) *розв'язна і її розв'язок можна подати у вигляді частини збіжного (при достатньо малому фіксованому* $\varepsilon \in (0\,, \varepsilon_0]$*) ряду Лорана:*

$$x(\cdot, \varepsilon) = \sum_{k=-2}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t). \tag{2.5}$$

*Доведення.* Підставимо ряд (2.5) в задачу (1.1)-(1.3), і тоді при кожному степені $\varepsilon$ отримаємо відповідну імпульсну крайову задачу.

При $\varepsilon^{-2}$ маємо однорідну імпульсну крайову задачу:

$$(P(t)x'_{-2})' - Q(t)x_{-2} = 0, \quad t \in U_0,$$

$$\triangle(P(t)x'_{-2})\big|_{t=t_i} = -\beta_i x'_{-2}(t_i - 0) - \alpha_i x_{-2}(t_i - 0), i = 1, 2, \ldots, p, \tag{2.6}$$

$$l\, x_{-2}(\,\cdot\,, \varepsilon) = 0.$$

За теоремою 1 задача (2.6) має $r$-параметричну сім'ю розв'язків:

$$x_{-2}(t) = X_r(t)c_{-1}, \quad c_{-1} \in R^r, \tag{2.7}$$

$c_{-1}$-довільний $r$-вимірний вектор, який буде знайдено з умови розв'язності крайової задачі при $\varepsilon^{-1}$.

При $\varepsilon^{-1}$ маємо неоднорідну імпульсну крайову задачу:

$$(P(t)x'_{-1})' - Q(t)x_{-1} = Q_1(t)x_{-2}, \quad t \in U_0,$$

$$\triangle(P(t)x'_{-1})\big|_{t=t_i} = -\beta_i x'_{-1}(t_i-0) - \alpha_i x_{-1}(t_i-0) + \alpha_{1i}x_{-1}(t_i-0), \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{2.8}$$

$$l\, x_{-1}(\cdot, \varepsilon) = l_1 x_{-2}(\cdot, \varepsilon).$$

Застосуємо теорему 1 до імпульсної неоднорідної крайової задачі (2.8). Згідно неї умова розв'язності задачі (2.8) є такою:

$$P_{D_d^*}\left\{ l_1 x_{-2}(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot, s)P^{-1}(s)Q_1(s)x_{-2}(s)ds - l\sum_{i=1}^{p} K(\cdot, t_i + 0)\alpha_{1i}x_{-2}(t_i - 0)\right\} = 0, \tag{2.9}$$

$$d = m - n_1.$$

Підставивши в (2.9) значення вектора $x_{-2}(t, c_{-1})$, виражене рівністю (2.7) та зробивши відповідні перетворення, враховуючи позначення (2.1), отримаємо алгебраїчну систему:

$$B_0 c_{-1} = 0. \tag{2.10}$$

Алгебраїчна система (2.10) завжди розв'язна відносно $r$-вимірного вектора $c_{-1} \in R^r$ [2, 5]:

$$c_{-1} = P_{B_0}c_{-1r}, \ c_{-1r} \in R^r. \tag{2.11}$$

Маємо значення вектора $c_{-1}$ вигляду (2.11), тому можна вказати $r$-параметричну сім'ю розв'язків імпульсної крайової задачі (2.6):

$$x_{-2}(t) = X_r(t)P_{B_0}c_{-1r}, \quad c_{-1r} \in R^r. \tag{2.12}$$

Підставивши (2.11) в (2.7), отримаємо $r$-параметричну множину розв'язків імпульсної крайової задачі (2.8):

$$x_{-1}(t,\ c_{-1}) = X_r(t)c_0 + \bar{x}_{-1}(t), \qquad c_{-1} \in R^r, \tag{2.13}$$

тут $\bar{x}_{-1}(t)$-частинний розв'язок крайової задачі (2.8). За теоремою 1, враховуючи рівності (2.11), (2.12) і позначення (2.3), вектор $\bar{x}_{-1}(t)$-матиме вигляд:

$$\bar{x}_{-1}(t) = G_1(t)P_{B_0}c_{-1r}, \quad c_{-1r} \in R^r,$$

де матриця-функція $G_1(t)$ визначена таким чином:

$$G_1(t) := \int_a^b K(t,\ s)Q_1(s)X_r(s)ds - X(t)D^+l\int_a^b K(\cdot, s)Q_1(s)X_r(s)ds +$$
$$+\sum_{i=1}^p K(t, t_i - 0)\alpha_{1i}X_r(t_i-0) -$$
$$- X(t)D^+l\sum_{i=1}^p K(\cdot,\ t_i - 0)\alpha_{1i}X_r(t_i - 0) + X(t)D^+l_1X_r(\cdot). \tag{2.14}$$

Вектор $c_0$-невідомий, його буде знайдено з крайової задачі при $\varepsilon^0$.

При $\varepsilon^0$ маємо імпульсну крайову задачу відносно вектора $x_0(t)$:

$$(P(t)x_0')' - Q(t)x_0 = Q_1(t)x_{-1} + f(t),\ t \in U_0,$$
$$\triangle(P(t)x_0')\big|_{t=t_i} = -\beta_i x_0'(t_i-0) - \alpha_i x_0(t_i-0) + \alpha_{1i}x_{-1}(t_i-0) + \gamma_i, i = 1, 2, \dots, p, \tag{2.15}$$
$$l\,x_0(\cdot, \varepsilon) = l_1 x_{-1}(\,\cdot\,, \varepsilon) + \alpha.$$

Запишемо умову розв'язності імпульсної крайової задачі (2.15):

$$\begin{aligned} &P_{D_d^*}\{l_1\,x_{-1}(\cdot) + \alpha - l\int\limits_a^b K(\,\cdot, s)P^{-1}(s)(Q_1(s)\,x_{-1}(s) + f(s))ds - \\ &-l\textstyle\sum_{i=1}^p K(\cdot, t_i-0)[\alpha_{1i}x_{-1}(t_i-0)+\gamma_i]\} = 0,\ d = m - n_1. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Зробивши відповідні перетворення в (2.16), та враховуючи позначення (2.2), умова розв'язності імпульсної крайової задачі (2.15) зведеться до алгебраїчної системи відносно невідомого вектора $c_0 \in R^r$:

$$B_0c_0 = \varphi_0 - B_1P_{B_0}c_{-1}, \tag{2.17}$$

де $\varphi_0$ визначена таким чином:

$$\varphi_0 = -P_{D_d^*}\{\alpha - l\int_a^b K(\cdot, s)P^{-1}(s)f(s)ds - l\sum_{i=1}^p K(\cdot, t_i - 0)\gamma_i\}.$$

Умова розв'язності алгебраїчної системи (2.17) є такою:

$$P_{B_0^*}\{\varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{-1}\} = 0, \tag{2.18}$$

звідки, алгебраїчна система відносно вектора $c_{-1} \in R^r$ має вигляд:

$$B_1 c_{-1} = P_{B_0^*} \varphi_0. \tag{2.19}$$

Умова розв'язності алгебраїчної системи (2.19), є такою:

$$P_{B_1^*} \cdot P_{B_0^*} \varphi_0 = 0. \tag{2.20}$$

Якщо виконана умова

$$P_{B_1^*} \cdot P_{B_0^*} = 0, \tag{2.21}$$

то умова (2.20) завжди виконується. Виконання умови (2.21) означає, що алгебраїчна система (2.18) розв'язна, а її розв'язок є $r$-вимірний вектор:

$$c_0 = P_{B_0} c_{0_r} + B_0^+[\varphi_0 - B_1 \cdot P_{B_0} c_{-1r}]. \tag{2.22}$$

Значення вектора $c_0$ вигляду (2.22) підставимо в (2.13), у результаті отримаємо $r$-параметричну сім'ю розв'язків імпульсної крайової задачі (2.8):

$$x_{-1}(t,\ c_0) = X_r(t) P_{B_0} c_{0r} + \bar{x}_{-1}(t),$$

тут $\bar{x}_{-1}(t)$-частинний розв'язок імпульсної крайової задачі (2.8) вигляду: $\bar{x}_{-1}(t) = X_r(t) B_0^+[\varphi_0 - X_r(t) B_0^+ B_1 P_{B_0} c_{-1r}] + G_1(t) P_{B_0} c_{-1r}$.

$r$-параметрична сім'я розв'язків імпульсної крайової задачі (2.15) є такою:

$$x_0(t,\ c_1) = X_r(t) c_1 + \bar{x}_0(t), \quad c_1 \in R,$$

де $\bar{x}_0(t)$-частинний розв'язок:

$$\bar{x}_0(t) = G_1(t)[P_{B_0} c_{0r} + B_0^+\,[\varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{-1r}]] + G_2(t) P_{B_0} c_{-1r} + +(G\,f)(t) + X(t) D^+ \alpha,$$

тут матриця-функція $G_1(t)$ має вигляд (2.14), а $G_2(t)$ визначена таким чином: $G_2(t) := \int_a^b K(t\ ,\ s) Q_1(s) G_1(s) ds - X(t) D^+ l \int_a^b K(\ \cdot\ , s) Q_1(s) G_1(s) ds +$
$+ \sum_{i=1}^{p} K(t,\ t_i - 0) \alpha_{1i} G_1(t_i - 0) - X(t) D^+ l \sum_{i=1}^{p} K(\cdot,\ t_i - 0) \alpha_{1i} G_1(t_i - 0) +$
$+ X(t) D^+ l_1 G_1(\ \cdot)$.

Вектор $c_1$ буде знайдено з умови розв'язності імпульсної крайової задачі відносно вектор-функції $x_1(t)$, яка утворюється при $\varepsilon^1$.

Продовжуючи цей процес, при $\varepsilon^k$ маємо таку імпульсну крайову задачу:

$$(P(t) x_k')' - Q(t) x_k = Q_1(t) x_{k-1},\ t\ \in U_0,$$

$$\triangle(P(t)x'_k)\big|_{t=t_i} = -\beta_i x'_k(t_i-0) - \alpha_i x_k(t_i-0) + \alpha_{1i}x_k(t_i-0), i=1,2,\dots,p, \quad (2.23)$$
$$l\, x_k(\cdot,\varepsilon) = l_1 x_{k-1}(\cdot,\varepsilon).$$

Умова розв'язності імпульсної крайової задачі (2.23) є такою:

$$P_{D_d^*}\{l_1\, x_{k-1}(\cdot) - l\int\limits_a^b K(\cdot,s)P^{-1}(s)Q_1(s)x_{k-1}(s)ds - l\sum_{i=1}^p K(\cdot,t_i+0)x_{k-1}(t_i-0)\gamma_i\} = 0,$$
$$d = m - n_1.$$

При виконанні умови (2.21), імпульсна крайова задача (2.23) матиме $r$-параметричну сім'ю розв'язків: $x_k(t,c_{k+1}) = X_r(t)c_{k+1} + \bar{x}_k(t), \quad c_{k+1}\in R$, де $\bar{x}_k(t)$ — частинний розв'язок імпульсної крайової задачі (2.23):

$$\bar{x}_k(t) = G_1(t)c_k + G_2(t)c_{k-1} + \ldots + G_{k+1}(t)c_0 + G_k(t)P_{B_0}c_{-1r} + (Gf)(t) + X(t)D^+\alpha,$$
$$c_k = P_{B_0}c_{kr} + B_0^+\{\varphi_k - B_1c_{k-1} + B_2c_{k-2} + \ldots + B_{k+1}c_{-1}\}, \quad k\ge 0.$$

$$G_k(t) := \int_a^b K(t,s)Q_1(s)G_{k-1}(s)ds - X(t)D^+l\int_a^b K(\cdot,s)Q_1(s)G_{k-1}(s)ds +$$
$$+ X(t)D^+l_1G_{k-1}(\cdot) - \sum_{i=1}^p K(t,t_i-0)\alpha_{1i}G_{k-1}(t_i-0) -$$
$$- X(t)D^+l\sum_{i=1}^p K(\cdot,t_i-0)\alpha_{1i}G_{k-1}(t_i-0), \quad k\ge 2.$$

$$B_k := -P_{D_d^*}[l_1G_{k-1}(\cdot)B_{k-1} - l_1G_k(\,\cdot\,) - l\int_a^b [K(\cdot,s)Q_1(s)G_{k-1}(s)B_{k-1} - G_k(s)]ds -$$
$$- l\sum_{i=1}^p [K(\cdot,t_i+0)\alpha_{1i}G_{k-1}(t_i-0)B_{k-1} - G_k(t_i-0)]\}P_{B_0}]P_{B_0}, \quad k\ge 2.$$

Якщо умова (2.4) виконується, то всі коефіцієнти розкладу (2.5) знаходяться в явному вигляді, що доводиться за методом математичної індукції.

Таким чином, якщо умова (2.4) виконується, то імпульсна крайова задача зі збуренням (1.1)-(1.3) є розв'язною.

Збіжність ряду Лорана доводиться за допомогою традиційних методів мажорування [4, 6]. □

Зауважимо, що при доведенні теореми використовувався метод Вішика-Люстерніка [4].

У публікації [8] розглядається нетерова крайова задача для системи диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язок якої шукається при застосуванні методу простих ітерацій.

Отримані в роботі результати є узагальненням результатів, наведених в [10] та узгоджуються з раніше отриманими в теорії крайових задач результатами [1, 2, 8, 9, 11, 12].

## 3. Приклад

На відрізку $[0,1]$ задана крайова задача зі збуренням

$$x''(t) = f(t), \quad x \in R^2, f(t) : [0,1] \to R^2, t \in [0,\ 1], \tag{3.1}$$

$$lx(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon l_1 x(\cdot,\varepsilon), \alpha \in R^2, lx(\cdot) = Mx(1), M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

В (3.1), (3.2) $f(t)$ та $x(t)$—двовимірні векторні функції: $f(t) : [0,1] \to R^2$, $x \in R^2$.

Встановимо умови, при яких крайова задача зі збуренням (3.1), (3.2) розв'язна при збурюючому доданку $l_1 x(\cdot) = Nx(\frac{1}{2})$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

При $\varepsilon = 0$ з крайової задачі зі збуренням (3.1), (3.2) отримаємо породжуючу крайову задачу:

$$x''(t) = f(t),\ x \in R^2, t \in [0,\ 1], \tag{3.3}$$

$$lx(\cdot,\varepsilon) = \alpha, \alpha \in R^2. \tag{3.4}$$

Згідно теореми 1.1, породжуюча крайова задача (3.3), (3.4) при довільних неоднорідностях $f(t) \in C[0,\ 1]$ та $\alpha \in R^2$ не має розв'язків.

Використовуючи теорему 2.1, встановимо умови, при яких розглядувана крайова задача зі збуренням (3.1), (3.2) буде розв'язною.

Фундаментальна матриця однорідної ($f(t) = 0$) системи диференціальних рівнянь (3.3) є такою: $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \end{pmatrix}$. Побудуємо $(2 \times 4)$-вимірна матрицю $D$ [2]: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$. Відповідна до матриці $D$, $(4 \times 2)$-вимірну спряжена матриця $D^*$ є такою: $D^* = D^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, оскільки задача розглядається на дійсній площині.

Знайдемо базис нуль-простору матриці $D^*$. За означенням нуль-простору [2], $N(D^*) = \{b \in R^2 : D^*b = 0\}$, тобто, це означає, що треба знайти такі вектори $b \in R^2$, для яких виконується рівність: $D^*b = 0$. Для побудованої матриці $D^*$ розв'яжемо рівняння $D^*b = 0$: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0$. Звідки, $b_2 = -b_1$, отже, маємо базисний вектор $\psi_1 = b^{(1)} = [b_1] = [1]$ простору $N(D^*)$.

Оскільки простір $N(D^*)$ не є порожнім, то згідно означення [2] матриціортопроектора $P_{D^*}$ вона відмінна від нульової матриці: $P_{D^*} \neq 0$.

Знайдемо матрицю $P_{D^*}$ за формулою [2]: $P_{D^*} = \sum_{s,k=1} \beta^{-1}_{s,k=1}\psi_s\psi_k^T$.

Тут $s = k = 1$, тому матриця $P_{D^*}$ шукається за формулою: $P_{D^*} = \beta^{(-1)}_{sk}\psi_1\psi_1^T$, $\beta_{11} = (\psi_1^T, \psi_1)$ $(\psi_1^T, \psi_1)$-скалярний добуток в відповідному евклідовому просторі,

$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\psi_1^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$. Обчислимо $\beta_{11}$: $\beta_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 2$. Отже, $\beta_{11} = 2$, звідки $\beta_{11}^{-1} = \frac{1}{2}$.

$\psi_1 \cdot \psi_1^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Отже, $P_{D^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Оскільки $d = 1$, то матриця $P_{D^*}$ складається з одного лінійно незалежного рядка, тому, надалі, замість неї, можна розглядати матрицю $P_{D_1^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Зауважимо, що матрицю $P_{D^*}$ можна знайти іншим чином, використовуючи формули: $P_{D^*} = I_m - DD^+$, $D^+ = \lim_{\varepsilon\to 0} D^*(DD^* + \varepsilon I_m)^{-1}$.

В цьому прикладі $m = 2$.

Обчислимо $D^+$:

$$D^+ = \lim_{\varepsilon\to 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon + 4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідки $P_{D^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Оскільки $d = 1$, то це дозволяє матрицю $P_{D^*}$ замінити на матрицю $P_{D_1^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$. За формулою $P_D = I_{2n} - D^+D$ знайдемо матрицю $P_D$. В даній задачі $n = 2$:

$$P_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

З побудови матриці $P_D$ зрозуміло, що $\operatorname{rank} P_D = 3$, тому $r = 3$, а матриця $P_{D_3}$ є такою: $P_{D_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Обчислимо $(d \times r)$-вимірну матрицю $B_0$: $d = 1$, $r = 3$, тобто, $B_0$-$(1 \times 3)$-вимірна. За формулою $B_0 := P_{D_d^*} l_1 X_r(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s) Q_1(s) X_r(s) ds$, але, за умовою задачі матриця $Q_1(s)$ є нульовою, тому $B_0 := P_{D_d^*} l_1 X_r(\cdot)$.

За формулою $X_r(t) = X(t)P_{D_r}$, $r = 3$, знайдемо матрицю $X_3(t)$:

$$X_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2t \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $(2 \times 3)$-вимірна матриця $X_3(t)$ має вигляд: $X_3(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2t \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix}$. Обчислимо $l_1 X_3(\cdot)$:

$$l_1 X_3(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \cdot \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси, $B_0 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Для розглядуваної задачі перевіримо виконання умови $P_{B_0} \neq 0$ теореми. Спочатку обчислимо матрицю $P_{B_0}$ за формулою: $P_{B_0} = I_3 - B_0^+ B_0$. Обчислимо матрицю ${B_0}^+$, вона обчислюється за формулою:

$${B_0}^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} B_0^* (B_0 B_0^* + \varepsilon I_1)^{-1}, \quad \text{коли } {B_0}^* = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$${B_0}^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{8} \left[ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot 1 \right]^{-1} = 1.$$

Обчислимо тепер матрицю $P_{B_0}$.

$$P_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 4 & 20 & 2 \\ -8 & 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

В результаті обчислень зрозуміло, що матриця $P_{B_0}$ відмінна від нульової. Отже, умова $P_{B_0} \neq 0$ для крайової задачі (3.1), (3.2) виконується. Перевіримо виконання умови $P_{B_1^*} P_{B_0^*} = 0$.

Обчислимо матрицю $P_{B_0^*}$ за формулою:$P_{B_0^*} = I_3 - B_0^+ B_0$.

$P_{B_0^*} = 1 - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{8}{21} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 - \frac{21}{21} = 0$. Оскільки, в результаті обчислень отримано, що $P_{B_0^*} = 0$, то можна стверджувати, що умова $P_{B_1^*} P_{B_0^*} = 0$ теореми 2 для крайової задачі (3.1), (3.2) виконується.

Зауважимо, що матриця $P_{B_1^*}$ обчислюється за формулою: $P_{B_1^*} = I_1 - B_1^+ B_1$, коли $B_1^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} B_1^* (B_1 B_1^* + \varepsilon I_1)^{-1}$, $B_1 = P_{B_0^*} P_{D_d^*} l_1 G_1(\cdot)$. Отже, $P_{B_1^*} = 1 - 0 = 1$.

Крайова задача без збурення (3.3), (3.4) не має розв'язків. Вводячи збурення $l_1 x(\cdot) = Nx(\frac{1}{2})$, показано, що з нерозв'язної задачі (3.3), (3.4) можна зробити розв'язну задачу (3.1), (3.2), і розв'язок матиме вигляд:

$$x(t,\varepsilon) = \frac{x^{-2}}{\varepsilon^2} + \frac{x^{-1}}{\varepsilon^1} + \frac{x^0}{\varepsilon^0} + \frac{x^1}{\varepsilon^1} + \dots.$$

## Перелік цитованих джерел


1. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — К.: Наук. думка, 1990. — 96 с.
2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Київ: Труди Інституту математики НАН України, 1995. — 318 с.
3. *Бойчук О. А., Шегда Л. М.* Бифуркация решений вырожденных краевых задач. — Киев: Препринт ИМ НАН Украины, 2009. — 21 с.
4. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмкщениях в случае матриц и самоспряженных и несамоспряженных диффференциальных уравнений // УМН. — 1960. — Т. 15, № 3. — С. 3–80.
5. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с.
6. *Гребенников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
7. *Кублановская В. И.* О вычислении обобщенной обратной матрицы и проекторов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1966. — Т. 6, № 2. — С. 326–332.
8. *Чуйко С. М.* Возникновение решений линейной нетеровой краевой задачи // Укр. мат. журнал. — 2007. — Т. 59, № 8. — С. 1148–1152.
9. *Шовкопляс Т. В.* Критерій розв'язності лінійної крайової задачі для системи другого порядку // УМЖ. — 2000. — Т. 52, № 6. — С. 861–864.
10. *Шовкопляс Т. В.* Достатні умови виникнення розв'язку слабкозбуреної крайової задачі // Динамические системы. — 2009. — № 27. — С. 143–149.
11. *Шовкопляс Т. В.* Слабкозбурені лінійні крайові задачі для системи диференціальних рівнянь другого порядку // Доповіді НАН України. — 2002. — № 4. — С. 31–36.
12. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. // Utrecht, Boston: VPS. — 2004. — 317 p.


*Получена 21.05.2010*