Динамические системы, вып. 20 (2006), 141–147

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 519.6

Применение SVD разложения для решения задачи межскважинной томографии

Е. Ю. Карпенко

Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины,
Киев 03164. *E-mail: kozerog@crimea.com*

Аннотация. В работе рассмотрен подход к решению задачи межскважинной томографии основанный на использовании SVD разложения.

1. Введение

Изучение верхней части геологического разреза является достаточно сложной задачей. Она имеет сложное геологическое строение, с резкой вертикальной и горизонтальной изменчивостью физико-механических свойств пород и их анизотропией, с невыдержанными геологическими границами, с переменным фазовым составом порозаполнителей и др. Интенсивное застраивание территорий и эксплуатация недр вызывает изменение геодинамического равновесия горных пород (оползни, обвалы и пр.) и, как следствие, ухудшение экологической обстановки.

Методы построения изображений объектов по «проекциям» рентгеновских лучей, ультразвуковых и электромагнитных волн нашли широкое применение в электронной микроскопии, медицинской диагностике, радиоастрономии, сейсмической томографии. Для воспроизведения объекта обычно используются методы свертки или итеративные алгоритмы решения больших систем линейных уравнений [1-3]. Сейсмическая томография базируется на измерении скоростей объемных и поверхностных сейсмических волн, направленных таким образом, чтобы «просветить» интересующее геофизиков непрозрачное тело, например массив горных пород, который исследователь не может непосредственно наблюдать. При этом массив неподвижен, так же как источники и приемники сейсмических волн. Метод межскважинной томографии успешно применяют для разведки месторождений нефти и газа, изучения тонкой геологической структуры между скважинами, рудных залежей и других относительно небольших объектов по сравнению с неоднородностями в мантии Земли. Томографическое изучение детальной структуры между несколькими скважинами в нефтегазоносных районах позволяет воссоздать реальную объемную картину распределения нефтенасыщенных пластов, флюидоупоров, воды и газа. При этом резко возрастает точность попадания скважиной в зону, где скопились нефть или газ.

Для задач большой размерности в памяти персональных компьютеров не удается разместить простым способом гигантские матрицы, возникающие при такой параметризации, и само алгебраическое решение должно быть найдено приближенно с применением итеративных процедур. Ошибки в алгебраическом решении возникают из-за недостаточной сходимости и суммируются с ошибками, обусловленными накоплением в системе ошибок, содержащихся в данных.

2. Математическая модель

Математической основой мотомографии является закон, сформулированный Радоном в 1917 году, который гласит, что любая непрерывная двумерная функция может быть восстановлена по ее одномерным проекциям, если число этих проекций бесконечно [4]. Проекции представляют собой некоторые функционалы физических характеристик среды исследований. В сейсмической томографии характеристиками обычно являются скорости сейсмических волн, а проекции — времена пробега, получаемые из наблюдений.

Общий подход к построению решения — это представление искомой функции в виде разложения по некоторой системе базисных функций b_i. Примером могут служить результаты разбиения исследуемой области на клетки, когда i-я базисная функция b_i равна J только в i-й клетке и 0 — во всех остальных случаях.

Одна из задач общей томографии состоит в следующем. Имеется n источников сигнала и m приемников, расположенных в некоторой плоскости. Расположение источников и приемников сигнала может быть как равномерным, так и нет (рис. 1).

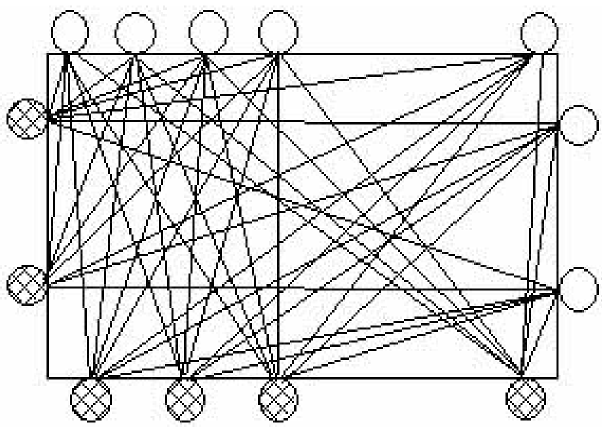

Рис. 1. Расположение системы источники–приемники.

Очевидно, что сигнал, попадая в интересующий нас объект, будет менять свою скорость, в зависимости от природы данной среды. Замеряется τ_k^l — время прохождения сигнала от k–го источника к l–му приемнику ($k = \overline{1,n}$; $l = \overline{1,m}$).

Введем в исследуемой плоскости прямоугольную декартовую систему координат и разобьем ее сеткой по осям OX и OY на N и M частей соответственно. Таким образом, исследуемая плоскость будет разбита на NM прямоугольных участков. Для каждого из данных участков вводится неизвестная V_{ij} — скорость сигнала на участке (i,j) и определяются числа S_{ij}^{kl} — расстояние, которое проходит сигнал на участке (i,j), идущий от источника k к приемнику l.

Необходимо также установить «путь» каждого из сигналов, т.е. те участки, через которые он будет проходить при данном разбиении. Пусть Tr_k^l — двумерный массив, содержащий координаты участков, через которые проходит сигнал $k \longrightarrow l$.

Обозначим через $t_{ij}^{kl} = \frac{S_{ij}^{kl}}{V_{ij}}$ время прохождения сигнала от k–го источника к l–му приемнику на участке (i,j). Теперь зная величины τ_k^l и участки, через которые проходит каждый сигнал, можно составить систему линейных алгебраических уравнений.

Количество неизвестных системы будет зависеть от разбиения плоскости, т.е. будет равно NM. Каждый из выпущенных сигналов будет порождать уравнение системы:

$$\sum_{(i,j)\in Tr_k^l} t_{ij}^{kl} = \tau_k^l \qquad (k=\overline{1,n};\ l=\overline{1,m}). \tag{2.1}$$

Таким образом, полученная система будет содержать nm уравнений. Последуюшая задача заключается в выборе приемлемого метода для решения полученной системы. В данной статье рассматривается метод SVD (сингулярного) разложения.

3. Сингулярное разложение

Для любой $m\times n$-матрицы A существует ортогональная $m\times m$-матрица U, ортогональная $n\times n$-матрица V и $m\times n$-диагональная матрица Σ с диагональными элементами $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$, такие что

$$A = U\Sigma V^T. \tag{3.1}$$

Это матричное произведение называется сингулярным разложением матрицы A. Столбцы U (или V соответственно) называются левыми (правыми) сингулярными векторами A, а σ_j – сингулярными числами A. Столбцы U (или V соответственно) являются собственными векторами матрицы AA^T (или A^TA) и σ_j^2 – собственные числа обеих матриц.

Сингулярное разложение — очень важный метод, используемый во многих видах матричных задач как теоретических, так и практических. Мы получаем большую информацию о структуре матрицы. Если SVD матрицы A задано формулой (3.1), то определяя r соотношениями

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_p = 0, \tag{3.2}$$

мы имеем

$$rank(A) = r, \tag{3.3}$$

$$null(A) = span(V_{r+1}, \ldots, V_n), \tag{3.4}$$

$$range(A) = span(U_1, \ldots, V_r), \tag{3.5}$$

где $rank(A)$, $null(A)$, $range(A)$ – ранг, ядро (нуль пространство) и область значений матрицы A соответственно. Более того, обозначив $U_r = U(:, 1 : r)$, $\Sigma_r = \Sigma(1 : r, 1 : r)$, $V_r = V(1 : r, :)$, мы получим следующее разложение:

$$A = U_r \Sigma_r V_r^T. \tag{3.6}$$

Если $\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_n$ очень малы по сравнению с $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, то для вычислительных целей A практически является матрицей ранга r и говорят, что A имеет эффективный ранг r.

Пусть теперь необходимо решить систему

$$Ax = B. \tag{3.7}$$

Если мы положим $B = Ug$ (т.е. представим b в виде линейной комбинации столбцов U; очевидно, $g = U^T B$), то $x = Vz$, где $z_i = \frac{g_i}{\sigma_i}$ $(i \leq r)$. Однако мы не получаем соотношений для $z_{r+1}, \ldots z_n$. И действительно эти величины представляют собой компоненты x в нулевом пространстве A и поэтому не вносят вклад в B, следовательно, они не могут быть восстановлены из B. Следовательно можно пренебрегать (возможными) компонентами x в $null(A)$ и искать решение системы (3.7) в виде:

$$x = V_r \Sigma_r^T U_r^T B. \tag{3.8}$$

4. Программная реализация

Для численной реализации поставленной задачи в среде Matlab были разработаны программы **Tomo** и **singular**.

В настоящее время Matlab является мощным и универсальным средством решения задач, возникающих в различных областях человеческой деятельности. Спектр проблем, исследование которых может быть осуществлено при помощи, охватывает: матричный анализ, обработку сигналов и изображений, задачи математической физики, оптимизационные задачи, обработку и визуализацию данных, работу с картографическими изображениями, нейронные сети, нечеткую логику и многое другое. Специализированные средства собраны в пакеты, называемые Toolbox, и могут быть выборочно установлены вместе с Matlab по желанию пользователя. В состав многих Toolbox входят приложения с графическим интерфейсом пользователя, которые обеспечивают быстрый и наглядный доступ к основным функциям. Огромным преимуществом Matlab является открытость кода, что дает возможность опытным пользователям разбираться в запрограммированных алгоритмах и, при необходимости, изменять их. В Matlab реализованы классические численные алгоритмы решения уравнений, задач линейной алгебры, нахождения значений определенных интегралов, интерполяции, решения дифференциальных уравнений и систем. Простой встроенный язык программирования позволяет легко создавать собственные алгоритмы.

Программа **Tomo** позволяет составить левую и правую часть системы (3.7), причем есть возможность быстро менять, как сетку разбиения исследуемой плоскости, так и расположение источников и приемников сигнала, а также их число. Программа **singular** используется для решения полученной системы методом SVD разложения, графического вывода решения и указания ошибки при решении тестовой задачи. Визуальная среда GUIDE предназначена для написания приложений с графическим интерфейсом пользователя.

Алгоритм работы программ можно представить в следующем виде:

1. В программе **Tomo** задается длинна и высота исследуемой плоскости, сетка разбиения, расположение и число источников и приемников сигнала.

2. Осуществляется вычисление «путей» каждого из сигналов и расстояний по участкам следования сигнала.

3. С помощью данных, полученных в пункте 2, формируется левая часть системы.

4. С помощью экспериментально полученных данных, или же при рассмотрении задачи, конечный результат которой заранее известен, формируем правую часть системы.

5. Полученная система передается в программу **singular** и находится ее решение используя метод сингулярного разложения.

6. Находим среднеарифметическую, среднеквадратическую и максимальную погрешность задачи.

5. Решение тестовой задачи

Пусть дана прямоугольная область размером 1000×500 м, равномерно разбитая на 16 участков по оси OX и на 8 участков по оси OY. Скорость прохождения сигнала в области составляет 3000 м/с. Имеются два «специфических» участка со скоростями 3100 м/с и 3300 м/с соответственно. Исходные данные и полученный результат можно наблюдать на рис 2 и рис. 3 соответственно.

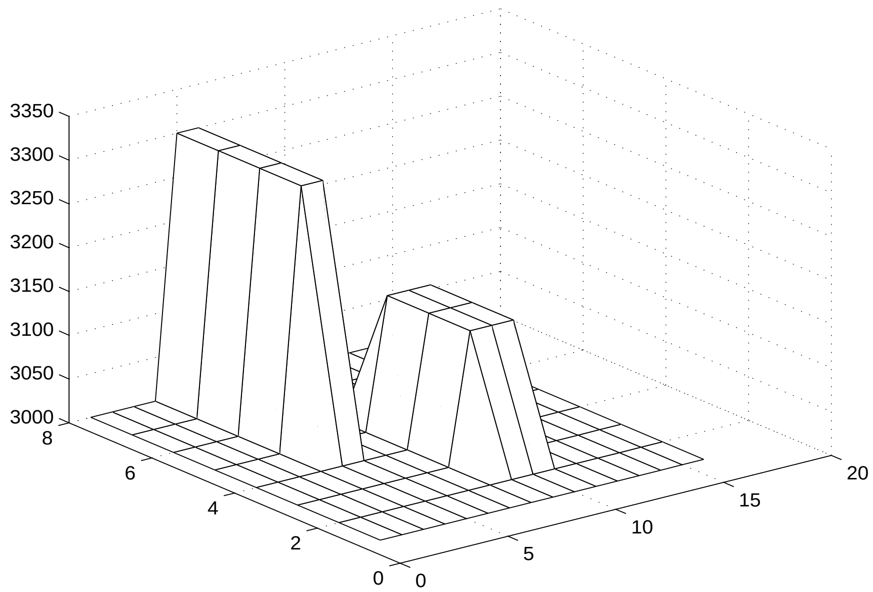

Рис. 2. Исходные данные тестовой задачи.

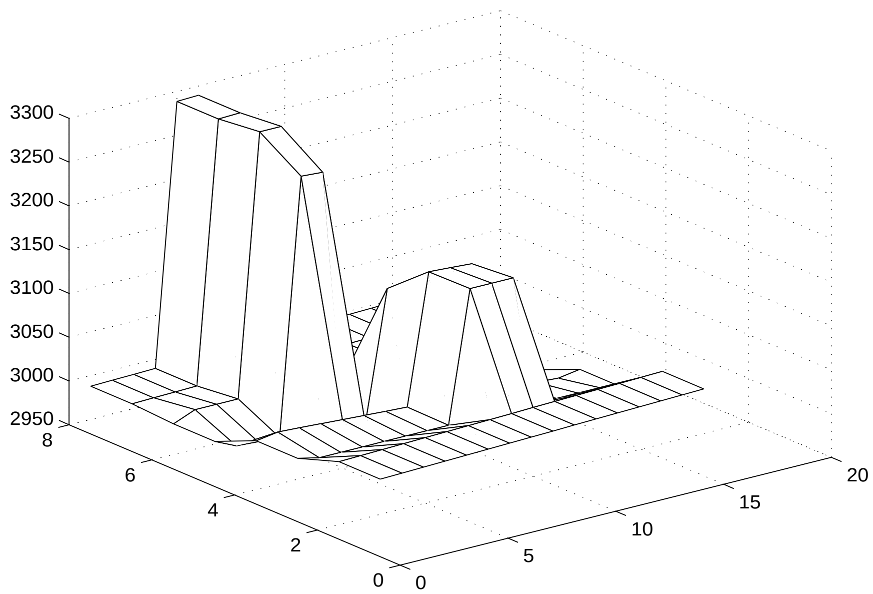

Рис. 3. Результат, полученный в ходе выполнение программы.

Среднеарифметическая ошибка составила 7.142 при 16 исочниках и 16 приемниках сигнала. Установлено, что увелечение числа источников и приемников сигнала в существенной мере не влияет на полученный результат.

В перспективе будет интересно выяснить, как изменится точность решения задачи, при установке источников и приемников сигнала слева и справа от исследуемой области (а может и внутри ее), а также при использовании других методов решения систем алгебраических уравнений.

Список цитируемых источников

1. *Левин Г.Г, Вишняков Г.Н.* Оптическая томография. — Москва: Радио и связь, 1989. — 224 с.
2. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. — Москва: Мир, 1990. — 288 с.
3. *Нолет Г.* Сейсмическая томография. — Москва: Мир, 1990. — 416 с.
4. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии. — Москва: Мир, 1983. — 352 с.

Получено 15.11.2006