

УДК 622.276

Закрученные потоки в задачах гидродинамики горизонтальных скважин

Е. Г. Стрюков¹, В. А. Лукьяненко²

¹Государственное акционерное общество "Черноморнефтегаз"
пгт. Черноморское, 96400. E-mail: st-e-g@i.ua

²Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
г. Симферополь, 95000. E-mail: art-inf@mail.ru

Аннотация. Задача моделирования закрученных потоков применяется для разработки алгоритмов оптимизации конструкций устройств, содержащих завихрители в кольцевых каналах и применяемых в нефтегазовой промышленности (например, гравийные фильтры в горизонтальных скважинах). Практическая необходимость изучения процессов гидродинамики для кольцевых каналов приводит к использованию численных расчетов набора базовых моделей с различной степенью упрощения. В работе представлены соответствующие модели и расчетные данные.

Ключевые слова: моделирование, закрученные потоки, гидродинамика кольцевых каналов и завихрителями.

Введение

Адекватность математического моделирования систем со сложной гидродинамикой закручивающихся потоков, как правило, определяется через максимальную детализацию модели. Чем подробнее представлены структура, конструктив и функциональное разнообразие исходной системы, тем достоверней результаты, получаемые с помощью такой модельной системы. Но высокий уровень детализации, большое число сложных нелинейных уравнений, параметров представляют определенные трудности: вычислительные, прогнозные, связанные с неопределенностью экспериментальных оценок, параметров, верификацией модели. Удачный набор моделей позволяет оценить параметры реальных процессов, их динамику, качественную картину течений. Обобщенные минимальные модели содержат небольшое число уравнений, полученных в результате упрощения, осреднения и позволяют эффективно оценивать необходимые характеристики процессов. Такого класса задачи возникают при моделировании гидродинамики в горизонтальном стволе скважины и являются актуальными как с теоретической, так и прикладной точек зрения. Их исследование является целью работы. Предполагается применение результатов в анализе конструкции внутрискважинного оборудования для намывки гравийного фильтра в горизонтальной скважине, позволяющего формировать устойчивый закрученный поток жидкотно-гравийной смеси. Постановка физического эксперимента для моделирования конкретных задач часто оказывается трудоемкой и дорогостоящей. В связи с этим математическое моделирование

закрученных потоков является важнейшим инструментом исследований. С его помощью во многих случаях удастся воспроизвести детальную картину исследуемых течений, рассчитать основные характеристики потока.

Использование свойств закрученных потоков широко распространено в различных областях промышленности, в том числе: в элементах энергетических и двигательных установок, в системах охлаждения, термостатирования и кондиционирования. Используется закрутка потока для комплексного решения задач повышения безопасности и эффективности работы ядерно-энергетических установок, конструктивного усовершенствования теплообменных и двигательных систем авиационной и ракетно-космической техники, МГД-генераторов, для повышения устойчивости течений в условиях невесомости, для ускорения протекания металлургических и химико-технологических процессов (таких, как обжиг, плавление, коксование, пиролиз), для интенсификации процессов тепло- и массообмена в условиях вынужденной и естественной конвекции.

В работах [1,2] указывается на актуальность таких задач в связи со значительным распространением скрученных цилиндрических тел, скрученных каналов в энергетике, химической, нефтяной, газовой отраслях промышленности и в теплотехническом оборудовании. Для упрощения задач используется симметрия и теория R-функций. При ламинарном течении получены двумерные краевые задачи для решения которых применяется метод Ритца. В работе М. А. Гольдштика [6] рассмотрены аналитические методы решения некоторых задач вихревого течения идеальной и вязкой жидкости. В работах А. А. Халатова [3,4] приводятся результаты исследований гидродинамических характеристик и тепло-, массообмена в осесимметрических каналах при локальной закрутке потока, систематизированы эмпирические расчетные зависимости, рассмотрены проблемы практического использования закрученных потоков в химической промышленности, машиностроении, энергетике. В монографии А. Гупты [5] исследуется практическое применение закрученных потоков, влияние закрутки на процессы горения и сепарации частиц в конкретных промышленных установках. В работе Ю. Г. Назмеева [7] рассматриваются вопросы интенсификации теплообмена с помощью закручивающих устройств в реологически сложных средах с высокими значениями вязкости при ламинарном течении жидкости. В работах А. С. Корсуна и О. В. Митрофановой [10-15] используется подход, в котором для описания физических параметров проводится пространственное осреднение, сложная область течения заменяется на простую, а осредненный континуум рассматривается как гомогенизированная среда с эффективными свойствами, обладающая анизотропией сопротивления и описываемая осредненными параметрами. В [10] с помощью интегральных методов было показано, что в кольцевых каналах произвольной длины с отношением диаметров, близким к единице, изменение переменной по длине канала интенсивности закрутки влияет на изменение коэффициента гидравлического сопротивления и среднemasсовой температуры теплоносителя. Как правило, конечный процесс в работах по закрученным потокам представляет энергетические, тепловые процессы.

1. Моделирование закручивающихся потоков

В работе разработана алгоритмы расчета гидродинамики закрученных потоков в каналах с закручивающимися устройствами выбранной геометрии, соответствующей гравийным фильтрам в горизонтальной скважине, основана на ряде дифференциальных и интегро-дифференциальных моделей, составляющих базу моделей для численных расчетов.

Гидродинамика в горизонтальном стволе скважины отличается тем, что вектор скорости потока перпендикулярен вектору скорости осаждения частиц. Отсутствие вертикальной составляющей вектора скорости потока обуславливает осаждение твердой фракции на нижнюю стенку скважины. Поскольку частица, оседая, будет перемещаться вдоль потока, то на путь этого перемещения, будет влиять только время ее осаждения, определенное положением частицы в начальный момент. Также на перемещение частицы по стволу влияет ее форма, размеры, плотность, эюра скорости горизонтального потока, вязкость и плотность жидкостеносителя. Закрутка потока может обеспечиваться не только специально предназначенными для этого закручивающимися устройствами (активные методы), но и оребрением, развитием и профилированием поверхностей, винтовыми вставками, накатками, навивками и т.п. Не вдаваясь в детали классификаций ограниченных закрученных потоков, выделим типы закрученных потоков в каналах, соответствующие основным типам завихрителей. Это:

а) затухающие закрученные потоки, которые имеют место в свободных каналах за расположенными на входе завихрителями;

б) закрученные потоки, в которых постоянный уровень интенсивности закрутки формируется и поддерживается с помощью завихрителей на всем протяжении канала.

Использование термина «закрученный поток» при рассмотрении процессов гидродинамики в каналах с завихрителями всех типов, указывает на две характерные особенности течения: движение жидкости в канале является *вихревым* и *циркуляционным* (*вращательно-поступательным*) одновременно, т.е. характеризуется локальной завихренностью $\vec{\omega}$ и крупномасштабной поперечной циркуляцией потока, обусловленной наличием тангенциальной компоненты скорости, соизмеримой с расходной скоростью в канале.

Таким образом, в нашем случае, термин «закрученный поток» используется по отношению к потоку, формирующемуся при вынужденном течении жидкости в каналах с завихрителями, и означает ограниченное поверхностью канала внутреннее вращательно-поступательное вихревое течение жидкости, характеризующееся отличной от нуля циркуляцией скорости в масштабе поперечного сечения канала.

Поля локальных скоростей, давлений при течении в канале любой сложной формы описываются дифференциальными уравнениями: динамики сплошной среды в напряжениях (1), уравнением неразрывности (2), выражающими соответ-

ственно законы сохранения импульса, массы:

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial \tau} + (\vec{u} \nabla) \rho \vec{u} = \vec{F} + Div \vec{\sigma}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + div(\rho \vec{u}) = 0, \quad (2)$$

где \vec{u} — вектор мгновенного значения скорости, ρ — плотность жидкости, τ — время.

Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение динамики сплошной среды в напряжениях (1), справедливое для сплошной среды (твердой, жидкой и газообразной). В этом уравнении \vec{F} — плотность распределения главного вектора объемных сил, $Div \vec{\sigma}$ — дивергенция тензора поверхностных напряжений $\vec{\sigma}$ или плотность распределения объемного действия поверхностных сил [8]. В цилиндрической системе координат $Div \vec{\sigma}$ имеет вид:

$$Div \vec{\sigma} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \vec{\sigma}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\sigma}_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z}, \quad (3)$$

где $\vec{\sigma}_r, \vec{\sigma}_\phi, \vec{\sigma}_z$ — результирующие векторы поверхностных напряжений, действующих на элементарные площадки, перпендикулярные координатам r, ϕ, z :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_r &= \sigma_{rr} \vec{e}_r + \sigma_{r\phi} \vec{e}_\phi + \sigma_{rz} \vec{e}_z, \\ \vec{\sigma}_\phi &= \sigma_{\phi r} \vec{e}_r + \sigma_{\phi\phi} \vec{e}_\phi + \sigma_{\phi z} \vec{e}_z, \\ \vec{\sigma}_z &= \sigma_{zr} \vec{e}_r + \sigma_{z\phi} \vec{e}_\phi + \sigma_{zz} \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (4)$$

σ_{ij} — компоненты тензора поверхностных напряжений, $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ — орты цилиндрической системы координат, для которых имеют место соотношения:

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} = \vec{e}_\phi, \quad \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} = -\vec{e}_r. \quad (5)$$

Проекция векторного уравнения динамики сплошной среды в напряжениях (1) на оси цилиндрической системы координат с учетом зависимостей (3) – (5) будут иметь вид:

$$\frac{\partial \rho u_r}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho u_r^2)}{\partial r} - \frac{\rho u_\phi^2}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_r u_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial(\rho u_z u_r)}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \sigma_{rr})}{\partial r} - \frac{\sigma_{\phi\phi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho u_\phi}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho u_\phi u_r)}{\partial r} + \frac{\rho u_\phi u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\phi^2)}{\partial \phi} + \frac{\partial(\rho u_\phi u_z)}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \sigma_{r\phi})}{\partial r} + \frac{\sigma_{r\phi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{z\phi}}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho u_z}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho u_z u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\phi u_z)}{\partial \phi} + \frac{\partial(\rho u_z^2)}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \sigma_{\phi z})}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \quad (8)$$

Получение адекватного описания для компонент тензора напряжений $\vec{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$ ($i, j = r, \phi, z$) в уравнениях движения (6) – (8) представляет собой наиболее сложную проблему в физико-математическом моделировании процессов движения деформируемых сред.

Определение компонент тензора поверхностных напряжений в гидродинамике связано с введением предположений о характере движения элементарного объема жидкости. Согласно теореме Гельмгольца (см. Лойцянский Л. Г. [8], с.62), любое движение элементарного объема жидкости можно в данное мгновение рассматривать как результат сложения двух движений: квазитвердого, состоящего из поступательного вместе с выбранным полюсом и вращательного вокруг полюса, и деформационного:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}_0) + [rot \vec{u}(\vec{r} - \vec{r}_0)] + \vec{D} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{u}_0 + \vec{u}_\omega + \vec{u}_d, \quad (9)$$

где \vec{r} , \vec{r}_0 — радиусы-векторы, направленные из начала координат выбранной системы отсчета в произвольную точку элементарного объема и его центр; $\vec{u}(\vec{r})$ — мгновенная скорость в точке с радиусом-вектором \vec{r} ; $\vec{u}_0 = \vec{u}(\vec{r}_0)$ — скорость поступательного движения центра элементарного объема (полюса); $\vec{u}_\omega = [rot \vec{u}(\vec{r} - \vec{r}_0)] = [\vec{\omega} \vec{r}^2]$ — скорость вращательного движения относительно полюса; составляющая скорости $\vec{u}_d = \vec{D} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$ характеризует скорость чистой деформации, где \vec{D} — тензор скоростей деформаций. При этом, вектор вихря скорости $rot \vec{u} = \vec{\omega}$ является мгновенной угловой скоростью вращения главных осей тензора скоростей деформаций.

Для описания деформационного движения необходимо использовать определенные предположения о реологических свойствах среды (свойствах текучести), т.е. ввести уравнения, связывающие компоненты тензоров напряжений, деформаций и их производных по времени [8]. Таким образом, для конкретизации вида компонент тензора поверхностных напряжений в уравнениях (6) – (8) необходимо принимать еще дополнительные физические гипотезы, основанные на опыте. Так, экспериментально установлено, что поведение многих газов и жидкостей с низкой молекулярной массой, а также расплавов солей и металлов подчиняются ньютоновской модели поведения жидкости, выражаемой обобщенным законом вязкости Ньютона, устанавливающим линейную связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций.

При анализе определяющих уравнений для тензора напряжений обычно используют разложение, в котором давление как термодинамическая характеристика выделяется из группы явлений, возникающих в результате деформации среды. При этом компоненты тензора поверхностных напряжений в уравнениях (6) – (8), можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = -P(r, \phi, z)\delta_{ij} + S_{ij}(r, \phi, z), \quad (10)$$

где P — гидростатическое давление, δ_{ij} — символ Кронекера, S_{ij} — компоненты

тензора дополнительных напряжений, которые обусловлены движением жидкости и определяются полем скорости потока.

Используя разложение (10) для компонент σ_{ij} и выделив в уравнениях (6) – (8) члены, характеризующие давление, получим следующую систему уравнений, отписывающих движение жидкости:

$$\frac{\partial \rho u_r}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho u_r^2)}{\partial r} - \frac{\rho u_\phi^2}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho u_r u_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial (\rho u_z u_r)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{rr})}{\partial r} - \frac{S_{\phi\phi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{\partial S_{zr}}{\partial z}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_\phi}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho u_\phi u_r)}{\partial r} + \frac{\rho u_\phi u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho u_\phi^2)}{\partial \phi} + \frac{\partial (\rho u_\phi u_z)}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{r\phi})}{\partial r} + \frac{S_{r\phi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial S_{z\phi}}{\partial z}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho u_z}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r u_z u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho u_\phi u_z)}{\partial \phi} + \frac{\partial (\rho u_z^2)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z}, \quad (13)$$

Уравнение неразрывности (2) для цилиндрической системы координат r, ϕ, z записывается в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho u_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} = 0. \quad (14)$$

Система уравнений (11) – (14) описывает в цилиндрической системе координат поле мгновенных локальных скоростей и давлений в движущейся жидкости для любого режима течения: ламинарного, переходного и турбулентного.

В уравнениях (6) – (8) и (11) – (14) компоненты скорости u_i ($i = r, \phi, z$), давление P , а также компоненты тензора поверхностных напряжений σ_{ij} и дополнительных напряжений S_{ij} ($i, j = r, \phi, z$) являются функциями всех трех координат r, ϕ, z и времени τ .

Трудности решения задачи о влиянии формы завихрителей на гидродинамику в цилиндрических каналах непосредственно в постановке (11) – (14) с использованием рейнольдсова осреднения по времени, связаны с отсутствием универсальных моделей для описания тензора турбулентных (рейнольдсовых) напряжений в каналах сложной конфигурации при наличии в них областей отрыва потока, закрученного движения с изменяющейся интенсивностью закрутки и других осложняющих факторов.

Пространственное осреднение является одним из способов упрощения постановки задачи и выявления влияния геометрических факторов на гидродинамику сложных турбулентных течений. И, хотя использование пространственного осреднения приводит к приближенному решению задачи на основе рассмотрения интегральных уравнений, такой подход дает возможность разработки методов расчетов, позволяющих учесть влияние завихрителей различной геометрии на гидродинамику в каналах.

Использование осреднения по объему, размеры которого определяются характерными масштабами пространственных неоднородностей течений, связанных с особенностями геометрии сложных каналов, позволяет перейти к рассмотрению осредненного континуума в качестве гомогенизированной среды с эффективными свойствами. В частности, применение процедуры локального осреднения по объему для турбулентных потоков и при течении в пористых структурах, может приводить к ненулевому значению осредненной скорости на стенке, т.е. к условию скольжения на границе. Поэтому процедура пространственного осреднения влечет за собой необходимость переопределения граничных условий с учетом сохранения интегральных балансов импульса, массы и введения соответствующего описания эффективных коэффициентов переноса импульса, связывающих трение с распределениями скорости осредненного течения. Постановка задачи математического моделирования гидродинамики закрученных потоков в каналах с завихрителями может быть упрощена по сравнению с постановкой в виде дифференциальных уравнений (11) – (14), если осреднить эти уравнения по пространству с учетом характерных особенностей геометрии каналов.

Учитывая специфику турбулентных потоков, обтекающих закручивающие устройства в каналах, а именно то, что основные особенности течений содержатся в объеме кольцевой области $r_1 \leq r \leq r_2$ (рис.1), где расположены спиральные завихрители, для проведения процедуры осреднения по объему выберем элементарный объем ΔV в виде кольцевого слоя бесконечно малой толщины Δr и ширины Δz : $\Delta V = 2\pi r \Delta r \Delta z$, где $\Delta r, \Delta z \rightarrow 0$ (см. рис.1). Область расположения завихрителей по радиусу ($r_1 \leq r \leq r_2$, $r_2 \leq R$) и форма их поперечного сечения могут быть произвольными.

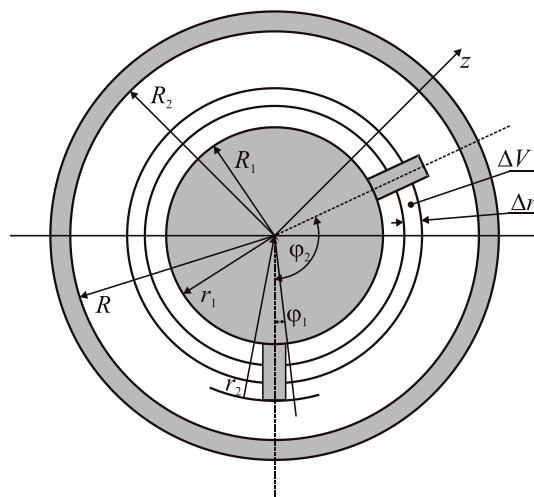


Рис. 1. Поперечное сечение канала с закручивающими элементами

Так как закручивающие элементы и вызванные ими неоднородности поля течения находятся в пределах локальных интервалов изменения угловой координаты

ϕ , то дифференциал от ΔV будем рассматривать как $d(\Delta V) = rd\phi\Delta r\Delta z$. Для любой физической величины ψ , связанной с жидкостью, в качестве которой может рассматриваться скаляр, вектор или тензор второго ранга, локальное среднее по объему ΔV значение $\langle\psi\rangle$ будем определять следующим образом:

$$\langle\psi\rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V_F} \psi d\Delta V = \frac{1}{2\pi r\Delta r\Delta z} \int_{\Delta V_F} \psi r d\phi\Delta r\Delta z = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\phi_F} \psi d\phi, \quad (15)$$

где ΔV_F , $\Delta\phi_F$ — объем, занятый жидкостью, и угол обхода по угловой координате, соответствующий этому объему.

Вводится понятие истинных средних значений параметров $\bar{\psi}$, которые определяются с учетом локальной пористости ς :

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\varsigma} \langle\psi\rangle, \quad (16)$$

где под локальной пористостью ς подразумевается отношение части объема осреднения ΔV_F , занятого жидкостью, ко всему объему ΔV , заключающему в себе жидкость и твердую компоненту (завихритель):

$$\varsigma = \frac{\Delta V_F}{\Delta V} = \frac{\Delta\phi_F}{2\pi}. \quad (17)$$

В соответствии с принятым определением (15), значения осредненных величин в зависимости от геометрии области течения будут вычисляться таким образом — если объем ΔV не содержит закручивающих элементов, то:

$$\bar{\psi} = \langle\psi\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi d\phi, \quad (18)$$

а, если интегрирование проводится в области расположения спирали, то

$$\langle\psi\rangle = \varsigma\bar{\psi} = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi_1(r,z)}^{\phi_2(r,z)} \psi d\phi \quad (19)$$

— для однозаходной спирали,

$$\langle\psi\rangle = \varsigma\bar{\psi} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\phi_1^k(r,z)}^{\phi_2^k(r,z)} \psi d\phi \quad (20)$$

— для многозаходной спирали (рис.1), где n — число заходов спирали,

$$\varsigma = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n (\phi_2^k - \phi_1^k), \quad \bar{\psi} = \frac{\sum_{k=1}^n \int_{\phi_1^k}^{\phi_2^k} \psi d\phi}{\sum_{k=1}^n (\phi_2^k - \phi_1^k)}.$$

Таким образом, процедура осреднения сводится к осреднению уравнений (11) – (14) по угловой координате ϕ .

Для вывода расчетных уравнений используем подход, предложенный в работе [10]. Рассматривая турбулентное течение в канале с закручивающими устройствами различной геометрии, частично перекрывающими проходное сечение канала, будем представлять мгновенное значение любой действительной величины U_i (компоненты скорости u_i , давления P) как сумму осредненного по угловой координате ϕ значения \overline{U}_i и его отклонения U_i^* от этой величины: $U_i = \overline{U}_i + U_i^*$, т.е.

$$u_r = \overline{u}_r + u_r^*, \quad u_\phi = \overline{u}_\phi + u_\phi^*, \quad u_z = \overline{u}_z + u_z^*. \quad (21)$$

При этом под отклонением от среднего U_i^* понимается отклонение от среднего по угловой координате значения физической величины за счет направленного движения жидкости, обтекающей закручивающие элементы.

Подставляя в уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho u_r}}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{\rho r u_r^2}}{\partial r} - \frac{\overline{\rho u_\phi^2}}{r} + \frac{\partial \overline{\rho u_z u_r}}{\partial z} = & -\frac{\partial \overline{P}}{\partial r} - \frac{1}{2\pi\zeta} P|_{\phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{1}{2\pi\zeta} P|_{\phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{r S_{rr}}}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{2\pi\zeta} S_{rr}|_{\phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - \frac{1}{2\pi\zeta} S_{rr}|_{\phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial r} - \frac{\overline{S_{\phi\phi}}}{r} + \frac{1}{2\pi\zeta r} S_{\phi r}|_{\phi_2} - \frac{1}{2\pi\zeta r} S_{\phi r}|_{\phi_1} + \frac{\partial \overline{S_{zr}}}{\partial z} + \\ & + \frac{1}{2\pi\zeta} S_{zr}|_{\phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - \frac{1}{2\pi\zeta} S_{zr}|_{\phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \end{aligned}$$

значения скоростей и давлений в виде (21), и, используя известные правила осреднения, согласно которым:

$$\overline{U_i U_j} = \overline{(\overline{U}_i + U_i^*)(\overline{U}_j + U_j^*)} = \overline{\overline{U}_i \overline{U}_j} + \overline{U_i^* \overline{U}_j} + \overline{\overline{U}_i U_j^*} + \overline{U_i^* U_j^*} = \overline{U}_i \overline{U}_j + \overline{U_i^* U_j^*}$$

и $\overline{U_i^* \overline{U}_j} = \overline{\overline{U}_j U_i^*} = 0$, $\overline{U_i^*} = \overline{U_j^*} = 0$; т.к. отклонения $\overline{U_j^*}$ от средних значений имеют при обходе по углу различные знаки и в сумме дают 0, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho u_r}}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{\rho r u_r^2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{\rho r u_r^{*2}}}{\partial r} - \frac{\overline{\rho u_\phi^2}}{r} - \frac{\overline{\rho u_\phi^{*2}}}{r} + \frac{\partial(\overline{\rho u_z u_r})}{\partial z} \frac{\partial \overline{\rho u_z^* u_r^*}}{\partial z} = \\ = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\overline{r S_{rr}})}{\partial r} - \frac{\overline{S_{\phi\phi}}}{r} + \frac{\partial \overline{S_{zr}}}{\partial z} + f_r, \quad (22) \end{aligned}$$

где обозначение f_r введено для суммы членов осредненного уравнения, характеризующих влияние твердых границ:

$$\begin{aligned} f_r = \frac{1}{2\pi\zeta} (-P|_{\phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + P|_{\phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial r} + S_{rr}|_{\phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - S_{rr}|_{\phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} S_{\phi r}|_{\phi_2} - \frac{1}{r} S_{\phi r}|_{\phi_1} + \\ + S_{zr}|_{\phi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - S_{zr}|_{\phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial r}. \quad (23) \end{aligned}$$

Проведя операцию осреднения по угловой координате уравнений (11) – (14), получим:

$$\frac{\partial \overline{\rho u_r}}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{\rho r u_r^2}}{\partial r} - \frac{\overline{\rho u_\phi^2}}{r} + \frac{\partial(\overline{\rho u_z u_r})}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \overline{S_{rr}} - \overline{\rho u_r^* u_r^*})}{\partial r} - \frac{(\overline{S_{\phi\phi}} - \overline{\rho u_\phi^{*2}})}{r} + \frac{\partial(\overline{S_{zr}} - \overline{\rho u_z^* u_r^*})}{\partial z} + f_r, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \overline{\rho u_\phi}}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \overline{\rho u_\phi u_r}) + \frac{\partial(\overline{\rho u_\phi u_z})}{\partial z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \overline{S_{r\phi}} - r^2 \overline{\rho u_r^* u_\phi^*})}{\partial r} + \frac{\partial(\overline{S_{z\phi}} - \overline{\rho u_z^* u_\phi^*})}{\partial z} + f_\phi, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \overline{\rho u_z}}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\overline{\rho r u_z u_r})}{\partial r} + \frac{\partial \overline{\rho u_z^2}}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \overline{S_{rz}} - \overline{\rho u_r^* u_z^*})}{\partial r} + \frac{\partial(\overline{S_{zz}} - \overline{\rho u_z^{*2}})}{\partial z} + f_z, \quad (26)$$

где f_r, f_ϕ, f_z – составляющие силы сопротивления в направлении радиальной, угловой и продольной координат, имеющие смысл объемной плотности поверхностных сил, действующих на поток жидкости со стороны завихрителя.

В уравнениях (24) – (26) рассматриваются уже не локальные компоненты скорости и давления, а осредненные по угловой координате. В дальнейшем изложении опустим знак осреднения и под u_z, u_ϕ, u_r, P будем подразумевать осредненные по углу ϕ величины, зависящие только от r, z и τ .

По виду полученных осредненных уравнений (24) – (26) можно заключить, что для осредненного континуума при наличии в каналах спиральных элементов результирующий диффузионный поток импульса складывается из потоков, обусловленных молекулярной и турбулентной диффузией, учитываемой членами, содержащими осредненные компоненты тензора дополнительных напряжений $\overline{S_{ij}}$, и потока, обусловленного существованием локальных отклонений скоростей от средних по углу значений (члены с $-\overline{\rho u_i^* u_j^*}$).

Введя понятие тензора эффективных поверхностных напряжений $\overline{\overline{S_{ij}}}$ с компонентами:

$$S_{ij}^{ef} = \overline{S_{ij}}(r, z) - \overline{\rho u_i^* u_j^*}, \quad (27)$$

перепишем систему уравнений (24) – (26) в более компактном виде:

$$\frac{\partial \rho u_r}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho r u_r^2}{\partial r} - \frac{\rho u_\phi^2}{r} + \frac{\partial(\rho u_z u_r)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r S_{rr}^{ef})}{\partial r} - \frac{S_{\phi\phi}^{ef}}{r} + \frac{\partial S_{zr}^{ef}}{\partial z} + f_r, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \rho u_\phi}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho u_\phi u_r) + \frac{\partial(\rho u_\phi u_z)}{\partial z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 S_{r\phi}^{ef})}{\partial r} + \frac{\partial S_{z\phi}^{ef}}{\partial z} + f_\phi, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \rho u_z}{\partial \tau} + \rho u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r S_{rz}^{ef})}{\partial r} + \frac{\partial S_{zz}^{ef}}{\partial z} + f_z, \quad (30)$$

Уравнение неразрывности (14) после осреднения по ϕ принимает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0, \quad (31)$$

и для стационарного движения дает прямую связь между изменением компонент скорости u_r и u_z .

В уравнениях (28) – (31) $u_i, P, \tau_{ij}, f_i, (i, j = r, \phi, z)$ являются функциями только r, z и τ ; u_i — компоненты осредненной скорости; f_i — компоненты силы сопротивления, отличные от нуля только в кольцевой области расположения завихрителей при $r_1 \leq r \leq r_2$ (см. рис.1); S_{ij}^{ef} — компоненты тензора эффективных поверхностных напряжений.

Таким образом, применение процедуры осреднения позволило привести систему исходных дифференциальных уравнений (14) – (15) относительно локальных величин к системе осесимметричных уравнений (28) – (31), относительно осредненных по угловой координате скоростей и давления. Вместе с тем полученное упрощение в постановке задачи требует введения дополнительных феноменологических соотношений для описания компонент силы сопротивления \vec{f} в уравнениях (28) – (31), а также эффективного переноса импульса и энергии в рассматриваемой среде. Вид этих соотношений может быть выявлен на основании анализа экспериментальных результатов по исследованию физических закономерностей течений в каналах с завихрителями различной геометрии. Следуя феноменологическому подходу, для замыкания математической постановки задачи, необходимо ввести физически обоснованную гипотезу, позволяющую установить взаимосвязь между силой сопротивления, действующей на поток со стороны завихрителей, и полем скорости потока. Определить значения компонент силы сопротивления $f_i, (i = r, \phi, z)$ в том виде, который был получен после осреднения исходных уравнений движения (11) – (13), не представляется возможным из-за отсутствия универсальных моделей для описания компонент тензора поверхностных напряжений на границе с завихрителем (см. вид выражения (23) для компоненты f_r). При формулировке замыкающих соотношений должно учитываться влияние геометрии завихрителей как на величину силы сопротивления, так и на формирование скоростного распределения в канале.

В работах А. С. Корсуна и О. В. Митрофановой показано, что характерной особенностью движения жидкости в каналах со спиральными вставками, частично перекрывающими (на просвет) проходное сечение каналов, является анизотропия сопротивления, а для связи векторов полной скорости потока \vec{u} и силы сопротивления \vec{f} , действующей на жидкость со стороны обтекаемых спиралей, может быть использован тензор. При этом силу сопротивления \vec{f} можно представить в виде:

$$\vec{f} = -\vec{k} \vec{u}, \quad (32)$$

где \vec{k} — тензор сопротивления, определяемый как симметричный тензор второго ранга.

Исследования по физико-математическому моделированию внешнего обтекания тел различного профиля скошенным стесненным потоком жидкости, предпринятые в работе [10], позволяют обосновать правомерность использования такого

подхода для описания сопротивления спиральных элементов различной геометрии при обтекании их в трубах и кольцевых каналах.

Таким образом, для моделирования компонент силы сопротивления f_i , ($i = r, \phi, z$), входящих в уравнения (28) – (31) и характеризующих силовое воздействие завихрителей на поток, может быть использована зависимость (32), где введение тензора \vec{k} позволяет описать анизотропный характер сопротивления, обусловленного наличием в канале завихрителей. Компоненты силы сопротивления \vec{f} в направлении осей ϕ, z, r , согласно соотношению (32), могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} f_\phi &= -(k_{\phi\phi}u_\phi + k_{\phi z}u_z + k_{\phi r}u_r), \\ f_z &= -(k_{z\phi}u_\phi + k_{zz}u_z + k_{zr}u_r), \\ f_r &= -(k_{r\phi}u_\phi + k_{rz}u_z + k_{rr}u_r), \end{aligned} \quad (33)$$

где k_{ij} — компоненты тензора сопротивления: $k_{ij} \neq 0$ в области расположения завихрителей при $r_1 \leq r \leq r_2$ (см. рис.1) и $k_{ij} = 0$ в остальной области.

При нелинейном законе сопротивления, что соответствует турбулентному режиму течения, компоненты тензора сопротивления являются функциями модуля полной скорости потока $|u|$ — величины, инвариантной относительно преобразования координат. При совпадении осей системы координат с главными осями анизотропии тензор сопротивления \vec{k} приводится к диагональному виду и сила сопротивления \vec{f} может быть выражена следующим образом:

$$\vec{f} = -k_{\eta\eta}u_\eta \vec{e}_\eta - k_{\xi\xi}u_\xi \vec{e}_\xi - k_{rr}u_r \vec{e}_r, \quad (34)$$

где $k_{\eta\eta}, k_{\xi\xi}, k_{rr}$ — диагональные компоненты тензора \vec{k} и u_η, u_ξ, u_r — компоненты полной скорости потока, соответствующие главным осям анизотропии η, ξ, r .

Учитывая, что при повороте осей системы координат компоненты симметричного тензора второго ранга k_{ij} преобразуются согласно соотношениям:

$$\begin{aligned} k_{ij} &= k_{lm}n_{il}n_{jm} \\ n_{il} &= \cos(\widehat{il}), \quad n_{jm} = \cos(\widehat{jm}) \end{aligned} \quad (35)$$

для входящих в выражения (33) компонент тензора сопротивления \vec{k} получим:

$$\begin{aligned} k_{\phi\phi} &= k_{\eta\eta} \sin^2 \theta + k_{\xi\xi} \cos^2 \theta & k_{\phi r} &= k_{r\phi} = 0, \\ k_{\phi z} &= k_{z\phi} = (k_{\eta\eta} - k_{\xi\xi}) \sin \theta \cos \theta & k_{zr} &= k_{rz} = 0, \\ k_{zz} &= k_{\eta\eta} \cos^2 \theta + k_{\xi\xi} \sin^2 \theta & k_{rr} &= A_{r\xi} k_{\xi\xi}, \end{aligned} \quad (36)$$

где θ — угол между продольной осью канала z и направлением закручивающих элементов η , $A_{r\xi}$ — коэффициент формы закручивающего элемента.

Из (36) следует, что независимыми величинами в описании компонент тензора сопротивления \vec{k} и силы сопротивления \vec{f} (32) – (33) являются две диагональные

компоненты тензора сопротивления $k_{\xi\xi}$ и $k_{\eta\eta}$, определяемые из рассмотрения чисто поперечного и чисто продольного обтекания завихрителей.

Вид зависимостей для компонент тензора сопротивления $k_{\xi\xi}$ и $k_{\eta\eta}$, используемых для расчетных оценок компонент силы сопротивления \vec{f} в уравнениях (28) – (31), указывает на то, что задача определения полей скорости и давления в каналах с завихрителями ставится в неявном виде и требует для своего решения использования методов итерационного приближения. Имеется в виду то обстоятельство, что в описание замыкающих феноменологических соотношений входят такие величины, как полная осредненная скорость закрученного течения и коэффициент гидравлического сопротивления канала, которые являются искомыми параметрами задачи. Математически это отражает внутреннюю взаимосвязь между интегральными и локальными параметрами, определяющими процессы движения жидкости в каналах с завихрителями, и, в то же время, соответствует реальной физической картине, т.к. поля скорости и давления в рассматриваемых каналах формируются в зависимости от формы и расположения завихрителей, наличие которых приводит к определенным потерям давления и закрутке потока.

Этот факт учитывается и при описании «эффективного» переноса импульса в рассматриваемых системах. Замыкание постановочных уравнений (28) – (31) с помощью использования интегральных параметров в части силового воздействия завихрителей на поток, делают нецелесообразным введение более «тонких» дифференциальных моделей для описания тензора эффективных поверхностных напряжений \vec{S}^{ef} (27). Из анализа различных подходов теоретического моделирования переносных свойств сложных закрученных течений, с учетом методов расчета таких течений следует, что наиболее применимым для описания процессов переноса в каналах с завихрителями является полуэмпирический подход [10].

Прием представления эффективных коэффициентов переноса в виде псевдотензора второго ранга весьма распространен при моделировании сложных турбулентных течений.

Следуя такому подходу, компоненты тензора эффективных поверхностных напряжений \vec{S}^{ef} могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} S_{rr}^{ef} &= 2\mu_{rr}^{ef} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r}, & S_{\phi\phi}^{ef} &= 2\mu_{\phi\phi}^{ef} \frac{\bar{u}_r}{r}, & S_{zz}^{ef} &= 2\mu_{zz}^{ef} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}, & S_{rr}^{ef} &= \mu_{r\phi}^{ef} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\phi}{r} \right), & S_{\phi r}^{ef} &= S_{r\phi}^{ef}, \\ S_{\phi z}^{ef} &= \mu_{\phi z}^{ef} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}, & S_{z\phi}^{ef} &= S_{\phi z}^{ef}, & S_{zr}^{ef} &= \mu_{zr}^{ef} \left(\frac{\partial \bar{u}_\phi}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} \right), & S_{rz}^{ef} &= S_{zr}^{ef}, \end{aligned} \tag{37}$$

где $\bar{u}_{i,i-(r,\phi,z)}$ — компоненты осредненной по угловой координате скорости потока, μ_{ij}^{ef} — коэффициенты эффективной вязкости.

Сопоставляя представления компонент тензора эффективных поверхностных напряжений (37) и определением (27) тензора \vec{S}^{ef} , для коэффициентов эффектив-

ной вязкости получим:

$$\begin{aligned} \mu_{rr}^{ef} &= \mu + \mu_{t,rr} - \frac{\overline{\rho u_r^* u_r^*}}{2 \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r}}, & \mu_{\phi\phi}^{ef} &= \mu + \mu_{t,\phi\phi} - \frac{\overline{\rho u_\phi^* u_\phi^*}}{2 \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r}}, & \mu_{zz}^{ef} &= \mu + \mu_{t,zz} - \frac{\overline{\rho u_z^* u_z^*}}{2 \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}}, \\ \mu_{r\phi}^{ef} &= \mu_{\phi r}^{ef} = \mu + \mu_{t,r\phi} - \frac{\overline{\rho u_\phi^* u_r^*}}{r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{u}_\phi}{r} \right)}, & & & & & (38) \\ \mu_{\phi z}^{ef} &= \mu_{z\phi}^{ef} = \mu + \mu_{t,\phi z} - \frac{\overline{\rho u_\phi^* u_z^*}}{\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}}, & \mu_{zr}^{ef} &= \mu_{rz}^{ef} = \mu + \mu_{t,zr} - \frac{\overline{\rho u_z^* u_r^*}}{\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z}}. \end{aligned}$$

Вид полученных выражений показывает, что под эффективным переносом импульса подразумевается действие трех механизмов: молекулярной диффузии (первые слагаемые в правых частях выражений (38)), турбулентного движения (вторые слагаемые) и конвективного переноса за счет движения жидкости, обусловленного наличием завихрителей (третьи слагаемые).

Компоненты $\mu_{t,ij}$ ($i, j = r, \phi, z$) учитывают вклад турбулентного переноса и имеют смысл осредненных по угловой координате компонент рейнольдсовых напряжений, отнесенных к соответствующим компонентам тензора скоростей деформаций осредненного течения:

$$\begin{aligned} \mu_{t,rr} &= -\frac{\overline{\rho(u'_r u'_r)}^{(F)}}{2 \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r}}, & \mu_{t,\phi\phi} &= -\frac{\overline{\rho(u'_\phi u'_\phi)}^{(F)}}{2 \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r}}, & \mu_{t,zz} &= -\frac{\overline{\rho(u'_z u'_z)}^{(F)}}{2 \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}}, \\ \mu_{t,r\phi} &= \mu_{t,\phi r} = -\frac{\overline{\rho(u'_r u'_\phi)}^{(F)}}{r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \bar{u}_\phi}{\partial r} \right)}, & & & & & (39) \\ \mu_{t,\phi z} &= \mu_{t,z\phi} = -\frac{\overline{\rho(u'_\phi u'_z)}^{(F)}}{\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}}, & \mu_{t,zr} &= \mu_{t,rz} = -\frac{\overline{\rho(u'_z u'_r)}^{(F)}}{\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z}}. \end{aligned}$$

Отсутствие универсальных моделей для вычисления членов, входящих в правые части всех выражений (38), (39), указывает на необходимость применения полуэмпирического подхода, который дает возможность упростить описание коэффициентов эффективного переноса импульса, опираясь на выявленные опытным путем физические закономерности.

В соответствии с [10], при турбулентном течении в каналах с интенсифицирующими закручивающими устройствами можно выделить вихревые структуры трех масштабных уровней: в пристенном слое с поперечным размером вихрей $y = 30\nu/V^*$ (ν — кинематическая вязкость, V^* — динамическая скорость), в зонах отрывного течения с масштабом вихрей, равным высоте обтекаемых элементов, и крупномасштабный вихрь в размере диаметра всего канала. Энергия этого сформировавшегося в канале продольного крупномасштабного вихря в среднем почти на два порядка превосходит энергию крупных вихрей, возникающих в зонах отрыва потока при использовании завихрителей и на три-четыре порядка выше

энергии, аккумулируемой пристеночными вихревыми структурами. Наличие установившейся вихревой структуры потока в масштабе всего канала подтверждается экспериментальными данными различных авторов по измерению профиля окружной компоненты скорости в закрученных потоках.

Основываясь на этих сведениях, для описания эффективного переноса можно использовать предположение, что эффективная вязкость пропорциональна локальной динамической скорости потока $V^*(r)$, определяемой с учетом влияния завихрителей на поле течения, и масштабу длины $l(r)$, зависящим от радиальной координаты r . При этом $l(r)$ определяется с учетом кривизны линий тока осредненного закрученного потока.

Более детальное описание коэффициентов эффективного переноса импульса, а также привлечение условий однозначности, к которым, в частности, относится постановка граничных условий, зависят от конкретных положений, вводимых при формулировке того или иного метода.

Приведенные подходы расчетного моделирования сложных закрученных течений в каналах с завихрителями привели к уравнениям, на основе которых могут быть построены инженерные методы расчетов, для кольцевых каналов и труб с завихрителями произвольной геометрии.

2. Стационарное установившееся движение жидкости в кольцевых каналах

Рассмотрим метод расчетного моделирования гидродинамики в кольцевых каналах с произвольным соотношением радиусов и непрерывными по длине спиральными завихрителями, имеющими произвольную форму и частично перекрывающими проходное сечение каналов. При постановке задачи предусматривается, что завихрители, могут отличаться большим разнообразием конструкций. При частичном перекрытии ширины канала, что соответствует степени загромождения $\varepsilon < 1$, они могут размещаться на одной из поверхностей канала в качестве проволочных навивок, винтового оребрения или элементов спирального профилирования поверхности.

Постановка задачи расчета гидродинамики в кольцевых каналах с закручивающими устройствами ставится на основе осредненных уравнений движения (28) – (31), справедливых для произвольной геометрии завихрителей и степени загромождения канала: $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Ввиду сложности описываемых процессов, для того, чтобы задача имела решение, она должна быть сформулирована в приближенной постановке на основе ряда допустимых упрощений.

Система расчетных уравнений максимально упрощается и для описания стационарного установившегося течения жидкости в кольцевых каналах принимает вид: (используем традиционное обозначение компонент касательных напряжений и перенормируем компоненты тензора эффективных поверхностных напряжений (27),

входящие в уравнения (28) – (30) следующим образом: $S_{r\phi}^{ef} = \tau_{r\phi}$, $S_{rz}^{ef} = \tau_{rz}$)

$$\frac{\rho u_\phi^2}{r} = \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (40)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \tau_{r\phi})}{\partial r} + f_\phi = 0, \quad (41)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \tau_{rz})}{\partial r} + f_z = 0, \quad (42)$$

где $\tau_{r\phi}$, τ_{rz} — компоненты эффективных касательных напряжений, которые, согласно выражениям (37), могут быть представлены в виде:

$$\tau_{r\phi}^{ef} = \mu_{r\phi}^{ef} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\phi}{r} \right), \quad \tau_{rz}^{ef} = \mu_{zr}^{ef} \frac{u_z}{\partial r}, \quad (43)$$

где u_ϕ , u_r , P — осредненные по угловой координате окружная и продольная компоненты скорости, давление (знак осреднения опущен); $\mu_{r\phi}^{ef}$, μ_{zr}^{ef} — коэффициенты эффективной вязкости; ς — локальная пористость, зависит от радиуса); f_ϕ , f_z — составляющие силы сопротивления в угловом и продольном направлениях, имеющие в случае установившегося течения более простой вид по сравнению с (33):

$$f_\phi = -(k_{\phi\phi} u_\phi + k_{\phi z} u_z), \quad f_z = -(k_{z\phi} u_\phi + k_{zz} u_z), \quad (44)$$

где $k_{\phi\phi}$, $k_{\phi z}$, $k_{z\phi}$, k_{zz} — компоненты тензора сопротивления, определяемые по зависимостям (36).

3. Численные расчеты течений

Существенной особенностью течения турбулентных закрученных потоков жидкости в кольцевых каналах является сложный характер влияния инерционных сил не только на формирование осредненных полей скорости и давления в канале, но и на характеристики турбулентного пристеночного переноса. Связано это с тем, что, помимо пространственной кривизны линий тока закрученного течения, приводящей к поперечному градиенту давления, поверхности канала, ограничивающие область течения, по отношению к потоку обладают противоположной по знаку кривизной. При этом локальные неоднородности сил инерции вблизи поверхностей приводят, с одной стороны, к стабилизации течения и подавлению турбулентного переноса около выпуклой поверхности канала, а с другой к дестабилизации течения и усилению турбулентного переноса у вогнутой поверхности. С точки зрения проводимого расчетного анализа важно выделить следующее. Следствием сложного влияния неравномерности распределения сил инерции и давления на поле течения при закрутке потока в кольцевых каналах является несовпадение линий максимальной скорости потока (ЛМС) и линий нулевых напряжений (ЛНН), т.е. положения точек, в которых обращаются в нуль производная скорости по радиусу и напряжение трения, различны. Эти обстоятельства должны учитываться

для организации вычислительного процесса (см. схему канала, представленную на рис. 2). Согласно этой схеме, предусматривается, что область расположения завихрителей $r_1 \leq r \leq r_2$ может быть произвольной, а также, в предельных случаях, занимать всю ширину канала или отсутствовать вообще, т.е. $R_1 \leq r_1 \leq R_2$, $R_1 \leq r_2 \leq R_2$. При численном решении расчетных уравнений рассмотрение проводится в областях между каждой из поверхностей канала и линией максимальной скорости ЛМС или линией нулевых напряжений ЛНН. Область расположения завихрителей, выделенная на рис.2 штриховкой, может быть расположена как по одну, так и по обе стороны ЛМС и ЛНН. При этом компоненты тензора сопротивления k_{ij} в (43), а, следовательно, и составляющие силы сопротивления f_ϕ и f_z в уравнениях (41), (42) будут отличны от нуля только внутри этой области при $r_1 \leq r \leq r_2$.

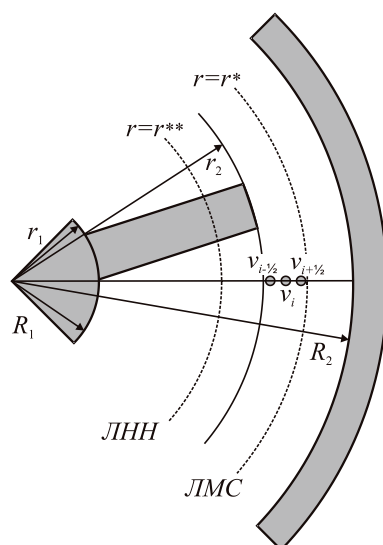


Рис. 2. Расчетная схема кольцевого канала при произвольном расположении спиральных завихрителей: R_1, R_2 – внутренний и наружный радиусы кольцевого канала, r_1, r_2 – радиусы, ограничивающие область расположения спиральных завихрителей; $r = r^*$ – ЛМС – линия максимальной скорости $u_z = u_{z \max}$; $r = r^{**}$ – ЛНН – линия нулевого напряжения $\tau_{r\phi} = 0$.

Дальнейшее упрощение уравнений связывается с интегральным представлением и заданием искомых функций с помощью небольшого числа параметров. Использование результатов из более простых моделей позволяет их включать в итерационные процедуры для более сложных вариационных конечно-разностных методов. Число узлов в сетке (конечных элементов) достаточно большое. Далее приведем результаты численных расчетов для описанной геометрии завихрителей.

Целью проведения данного расчета являлось моделирование на базе введенных уравнений возможности обеспечения установившегося возвратно-поступательного движения жидкостно-гравийной смеси при помощи установленных винтовых направляющих на наружной поверхности трубы, концентрически установленной

внутри трубы большего диаметра.

Трехмерная модель была создана программным комплексом SolidWorks. Расчет проводился программным комплексом Ansys.

Исходные данные для расчета. Для выполнения численного расчета были приняты параметры гравийно-жидкостной смеси приближенные к реальным параметрам.

Расчетная область представлена в виде смеси жидкости с гравием с параметрами:

плотность жидкости	$\rho_{\text{ж}} = 1250 \text{ кг/м}^3$;
вязкость жидкости	$\nu_{\text{ж}} = 2 \text{ мПа}\cdot\text{с}$ — первый вариант;
	$\nu_{\text{ж}} = 30 \text{ мПа}\cdot\text{с}$ — второй вариант;
плотность гравия	$\rho_{\text{Г}} = 2630 \text{ кг/м}^3$;
концентрация частиц гравия	$K_{\text{Г}} = 100 \text{ кг/м}^3$.

Размеры частиц:

минимальный	$d_{\text{min}} = 0,2 \text{ мм}$
максимальный	$d_{\text{max}} = 0,4 \text{ мм}$
средний	$d_{\text{mid}} = 0,3 \text{ мм}$

На входе задано:

массовый расход жидкости $G_{\text{ж}} = 20,83 \text{ кг/с}$ (что соответствует объемному расходу $Q = 1,0 \text{ м}^3/\text{мин}$);

массовый расход гравия $G_{\text{Г}} = 1,67 \text{ кг/с}$ (что соответствует концентрации $K_{\text{Г}} = 100 \text{ кг/м}^3$);

скорость движения частиц $V = 0,786 \text{ м/с}$.

На выходе задано:

величина статического давления $P = 10 \text{ МПа}$.

Расчет проводится для трехзаходной винтовой навивки. Длина трубы установлена 5 м. Шаг винтовых направляющих установлен 0,5 м.

Расчетная сетка — неструктурированная, тетраэдрическая. Вблизи стенок трубы и спиральной навивки выполнено 10 слоев призматических ячеек для улучшения разрешения пристеночного слоя. Число ячеек расчетной сетки ≈ 3 млн. 350 тыс.

По результатам расчета получена величина потери давления в трубе 5-ти метровой длины $\Delta p = 1112 \text{ Па}$ — для вязкости жидкости $\nu_{\text{ж}} = 2 \text{ мПа}\cdot\text{с}$, и $\Delta p = 1804 \text{ Па}$ — для вязкости жидкости $\nu_{\text{ж}} = 30 \text{ мПа}\cdot\text{с}$.

На рис. 3 представлены линии тока жидкости при движении в кольцевом канале при наличии винтовых направляющих. Видно, что, уже пройдя 25% пути поток приобретает установившееся возвратно-поступательное движение.

Более наглядно как качественно, так и количественно наличие окружной составляющей скорости потока проиллюстрировано на рис. 4 в виде графика, представляющего зависимость величины окружной составляющей скорости потока от длины пути. Следует отметить, что при большей вязкости возрастание величины окружной составляющей происходит медленнее.

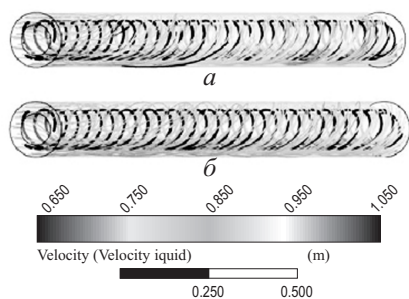


Рис. 3. Изолинии скорости в трубе (а – при вязкости жидкости $\nu_{ж} = 2$ мПа·с, б – при вязкости жидкости $\nu_{ж} = 30$ мПа·с)

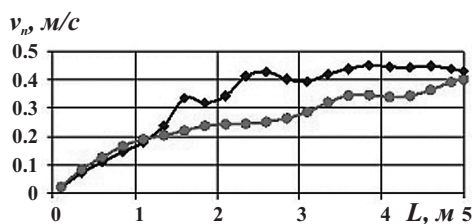


Рис. 4. Зависимость величины окружной составляющей скорости потока (V_u) от длины пути (L) (ромбы – при вязкости жидкости $\nu_{ж} = 2$ мПа·с, кружки – при вязкости жидкости $\nu_{ж} = 30$ мПа·с)

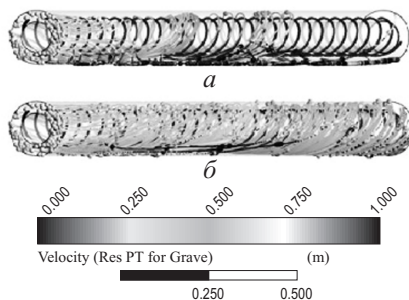


Рис. 5. Траектории движения частиц гравия (а – при вязкости жидкости $\nu_{ж} = 2$ мПа·с, б – при вязкости жидкости $\nu_{ж} = 30$ мПа·с)

На рис. 5 показаны траектории движения частиц гравия в кольцевом канале при наличии винтовых направляющих.

Можно отметить, что при большей вязкости жидкости практически все частицы находятся во взвешенном состоянии под воздействием спиральной направляющей, а при меньшей вязкости часть частиц остается на нижней стенке наружной трубы.

Расчет в канале без спиральной навивки. В качестве сравнения, расчет с выше-приведенными исходными данными был выполнен для кольцевого канала без винтовых направляющих. Расчетная сетка — структурированная, гексаэдрная. Вблизи стенок трубы и спиральной навивки выполнено сгущение сетки для улучшения разрешения пристеночного слоя. Число ячеек расчетной сетки ≈ 350 тыс.

По результатам расчета получена величина потери давления в трубе 5-ти метровой длины $\Delta p = 531$ Па — для вязкости жидкости $\nu_{\text{ж}} = 2$ мПа·с, и $\Delta p = 766$ Па — для вязкости жидкости $\nu_{\text{ж}} = 30$ мПа·с.

На рис. 6 представлены линии тока жидкости при движении в кольцевом канале при наличии винтовых направляющих. Видно, что течение происходит без окружной составляющей.

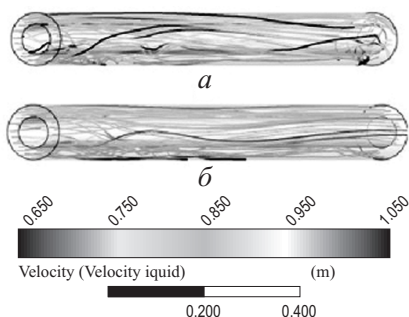


Рис. 6. Изолинии скорости в канале (а — при вязкости жидкости $\nu_{\text{ж}} = 2$ мПа·с, б — при вязкости жидкости $\nu_{\text{ж}} = 30$ мПа·с)

На рис. 7 приведено сравнение зависимости окружной составляющей скорости от длины пути. Можно сказать, что окружная составляющая в канале без спиральных направляющих практически равна нулю.

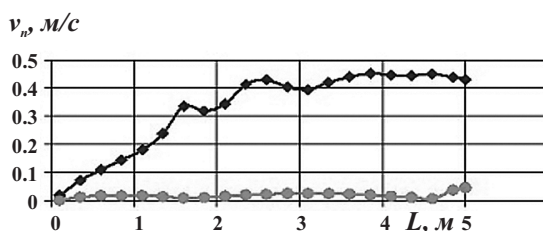


Рис. 7. Зависимость величины окружной составляющей скорости потока (V_u) от длины пути (L) при вязкости жидкости $\nu_{\text{ж}} = 2$ мПа·с (для канала со спиральными направляющими — ромбы, для канала без спиральных составляющих — кружки)

На рис. 8 показаны траектории движения частиц гравия в кольцевом канале без винтовых направляющих. Видно, что при меньшей вязкости жидкости частицы гравия практически сразу начинают оседать на дно и далее перекаатываются по дну. При большей вязкости оседание частиц происходит дальше от входа в канал, а также видно, что часть частиц плывут, не оседая до конца канала.

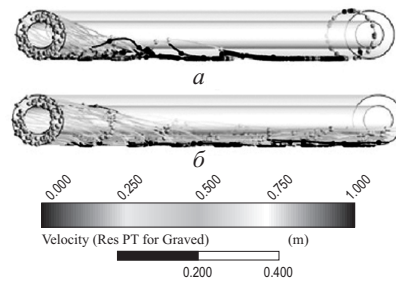


Рис. 8. Траектории движения частиц гравия (а – при вязкости жидкости $\nu_{\text{ж}} = 2$ мПа·с, б – при вязкости жидкости $\nu_{\text{ж}} = 30$ мПа·с)

Заключение

Используя известные результаты по закрученным потокам, предложены модели, пригодные для численных расчетов потоков в кольцевых каналах с завихрителями. Пространственное осреднение, учет стационарности, феноменологические предположения приводят к набору базовых моделей, которые могут использоваться в системах поддержки принятия решений по оптимизации конструкций завихрителей, применяемых в нефтегазовой промышленности, в частности для разработки гравийных фильтров в горизонтальных скважинах. Дальнейшие результаты предполагают упрощение моделей до параметрических, приспособленных для анализа течений в зависимости от конструктивных элементов и согласованных с наиболее общими моделями и экспериментальными данными.

Список цитируемых источников

1. *Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л.* Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 416 с.
2. *Воронянская М. Е., Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И.* Математическое моделирование процессов теплопроводности для элементов конструкций ядерных энергетических установок методом R -функций // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* — 2009. — № 52, — С.166-178.
3. *Щужин В. К., Халатов А. А.* Теплообмен, массообмен и гидродинамика закрученных потоков в осесимметричных каналах // М.: Машиностроение, 1982. — 200 с.
4. *Халатов А. А.* Теория и практика закрученных потоков // Киев: Наук. Думка, 1989. — 192 с.
5. *Гупта А., Лили Д., Сайред Н.* Закрученные потоки // Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 588 с.
6. *Гольдштик М. А.* Вихревые потоки // Новосибирск: Наука, 1981. — 366 с.
7. *Назмеев Ю. Г.* Гидродинамика и теплообмен закрученных потоков реологически сложных жидкостей // М.: Энергоатомиздат, 1996. — 304 с.
8. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа // М.: Наука, 1970. — 904 с.
9. *Ахмедов Р. Б.* Аэродинамика закрученной струи // М.: Энергия, 1977 — 238 с.

10. *Митрофанова О. В.* Гидродинамика каналов ядерно-энергетических установок с закруткой потока. (Методы расчета). Дис. ... канд. техн. наук. Москва: МИФИ. — 1989. — 203 с.
11. *Корсун А. С., Митрофанова О. В., Соколова М. С.* Моделирование гидродинамики и теплообмена в каналах с закруткой теплоносителя // Теплообмен ММФ-92-Минск, 1992.— Т. 10. — С. 80-85.
12. *Корсун А. С., Митрофанова О. В.* Влияние закрутки потока теплоносителя на гидродинамику и теплообмен в кольцевом канале с неравномерным тепловыделением // Теплообмен-7, Минск: ИТМО, 1984. — Т. 8, ч.1. С. 86-91.
13. *Митрофанова О. В., Корсун А. С.* Математическое моделирование гидродинамики неустановившихся закрученных течений в каналах с завихрителями // Труды 2-ой Междунар. науч.-техн. конфер. «Актуальные проблемы фундаментальных наук». — 1994. — Т.1.— Ч.1.— С.74-77.
14. *Митрофанова О. В., Филатов К. С.* Замыкание модели трансформации вихря // Сб. науч. тр. «Научная сессия МИФИ-2002». — М.: МИФИ.— 2002. — Т.8.— С.60-61.
15. *Митрофанова О. В., Филатов К. С.* Оптимизация геометрии спиральных интенсификаторов теплообмена в тепловыделяющих каналах // Сб. науч. тр. «Научная сессия МИФИ-2001». — 2001, М.: МИФИ. — Т.8, — С.67-68.

Получена 01.04.2011