Динамические системы, вып. 20 (2006), 133–140

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 519.642 : 517.948

Об одном проекционно-итеративном методе, оптимальном на некоторых классах интегральных уравнений

Е.А. Лукьянова*, **А.В. Мосенцова****

* Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: lukyanovaea@mail.ru*
** Институт математики НАН Укранны,
Киев 01601. *E-mail: annmosentsova@mail.ru*

Аннотация. Для уравнений Фредгольма второго рода с ядрами из классов Соболева вычислен точный порядок оптимальной погрешности среди всех методов, для реализации которых разрешается выполнить не более некоторого (фиксированного заранее) числа простейших операций. Описан проекционно-итеративный метод, достигающий указанную точность.

В рамках настоящей работы изучается проблема оптимизации приближенных методов решения интегральных уравнений Фредгольма. Следует напомнить, что еще в 40-х годах прошлого столетия стремление к нахождению наилучшего алгоритма решения исходной задачи подтолкнуло исследователей к идее систематизации разрозненных до сих пор методов. Основы иерархической системы алгоритмов заложены Л.В.Канторовичем [1, гл.XIV] в рамках созданной им общей теории приближенных методов решения операторных уравнений. Согласно этой теории одним из основных критериев оценки эффективности приближенных методов является скорость сходимости аппроксимаций (другими словами, оценка погрешности приближений) к точному решению. Отсюда возникает проблема отыскания оптимальных методов. Для интегральных уравнений II рода различные аспекты оптимизации приближенных методов ранее изучались в работах Н.С.Бахвалова [2], Г.М.Вайникко [3], Б.Г.Габдулхаева [4], С.В.Переверзева [5] и многих других. В частности, из результатов [6], [7] следует, насколько важное место в упомянутых исследованиях занимают проекционно-итеративные процедуры, возникновение и развитие которых тесно связано с именами Ю.Д.Соколова [8] и А.Ю.Лучки [9].

В настоящей статье будут продолжены исследования, инициированные в работах [6], [7]. А именно, наша цель состоит в построении и изучении аппроксимационных свойств одного проекционно-итеративного метода, оптимального на классах интегральных уравнений с ядрами анизотропной гладкости.

Введем в рассмотрение классы интегральных уравнений Фредгольма второго рода, для которых ниже будет рассмотрена задача оптимизации. Пусть $L_2 = L_2(0;2\pi)$ — пространство суммируемых в квадрате на $(0;2\pi)$ функций с нормой $\|f\|_2 = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, а $L_2(Q)$ – пространство суммируемых в квадрате на $Q = (0,2\pi) \times (0,2\pi)$ функций двух переменных с обычной нормой. Через $W_2^r, r = 1,2,\ldots$, обозначим пространство Соболева $2\pi-$периодических функций, имеющих r ограниченных в метрике L_2 производных, причем $\|f\|_{W_2^r} = \|f\|_2 + \sum\limits_{i=1}^{r} \|f^{(i)}\|_2$. Через $W_2^{r,s} \subset L_2(Q)$ обозначим пространство Соболева $2\pi-$периодических по обеим переменным функций и имеющих (в метрике $L_2(Q)$) r ограниченных производных по первой переменной и s ограниченных производных по второй переменной. Под $W_2^r(\gamma)$ и $W_2^{r,s}(\gamma)$ будем понимать шары радиуса γ в пространствах W_2^r и $W_2^{r,s}$ соответственно.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$x(t) = Hx(t) + f(t), \tag{1}$$

где

$$Hx(t) = \int\limits_0^{2\pi} h(t,\tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in [0,2\pi]. \tag{2}$$

Будем считать, что $f(t) \in W_2^r(1)$, $h(t,\tau) \in W_2^{r,s}(\gamma)$ при $r > s$ и $\|(I-H)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \le \beta$. Последнее условие означает однозначную разрешимость уравнения (1). Совокупность операторов (2) с такими ядрами обозначим $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$. Класс уравнений (1) с операторами $H \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ и свободными членами $f \in W_2^r(1)$ обозначим $[\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)]$.

Следуя [5, с.203], рассмотрим проблему оптимального решения уравнений (1) из исследуемого класса. Пусть $T = \{\delta_i\}_{i=1}^M$ — некоторый набор линейно-независимых линейных непрерывных функционалов δ_i, из которых $\delta_1,\ldots,\delta_{M_1}$ определены на $W_2^{r,s}(\gamma)$, а $\delta_{M_1+1},\ldots\delta_M$ — на множестве $W_2^r(1)$. Число функционалов δ_i, образующих набор T, обозначим $\mathcal{T}$, то есть $M = \mathcal{T}$. Введем обозначение $\mathcal{T}_M = \{T : \mathcal{T} \le M\}$.

Каждому уравнению (1) из рассматриваемого класса можно поставить в соответствие информационный вектор следующего вида

$$T(H,f) = (\delta_1(h),\ldots,\delta_{M_1}(h),\delta_{M_1+1}(f),\ldots,\delta_M(f)).$$

Под приближенным методом A решения (1) будем понимать произвольный оператор, сопоставляющий числовому вектору $T(H,f)$ в качестве приближенного решения некоторый элемент $A(T,H,f) \in L_2$, при этом для построения $A(T,H,f)$ разрешается выполнить лишь ограниченное число простейших арифметических операций (а.о.). Здесь под а.о. подразумеваются 4 элементарных операции: сложения, вычитания, умножения и деления.

При фиксированном информационном наборе $T(H,f)$ совокупность приближенных методов, использующих для построения приближенных решений дискретную информацию только из набора $T(H,f)$, обозначим через $\mathcal{A}(T)$. Через $\mathcal{A}_N(T)$ обозначим подмножество всех приближенных методов из $\mathcal{A}(T)$, которые при построении элемента $A(T,H,f)$ требуют выполнения не более N а.о. над компонентами информационного вектора $T(H,f)$. Длину информационного вектора $T(H,f)$ имеет смысл выбирать так, чтобы каждая его компонента была задействована в вычислениях хотя бы раз. Следовательно, вполне естественно считать, что общее количество а.о., выполняемых в рамках любого приближенного метода, не может быть меньше длины используемого этим методом информационного вектора. Таким образом, при рассмотрении методов $A \in \mathcal{A}_N(T)$ будем полагать $T \in \mathcal{T}_M$ при $M \le N$. В противном случае ни один алгоритм из $\mathcal{A}_N(T)$ не смог бы использовать всю информацию об уравнении (1), предоставленную компонентами вектора $T(H,f)$.

Величина

$$e([\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)], A) := \sup_{\substack{x=Hx+f \\ H\in\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, f\in W_2^r(1)}} \|x - A(T,H,f)\|_2$$

называется погрешностью приближенного метода A на классе уравнений (1), где $H \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$, $f \in W_2^r(1)$. Под оптимальной погрешностью решения уравнений (1) из класса $[\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)]$ будем понимать следующие величины

$$E_N([\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)]) = \inf_{T\in\mathcal{T}_N} \inf_{A\in\mathcal{A}(T)} e([\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)], A),$$
$$\mathcal{E}_N([\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)]) = \inf_{\substack{T\in\mathcal{T}_M \\ M\le N}} \inf_{A\in\mathcal{A}_N(T)} e([\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)], A).$$

Величина $E_N([\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)])$ показывает, какую минимальную погрешность можно достичь на исследуемом классе $([\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)])$ при помощи всевозможных приближенных методов, которые для своей реализации требуют информационные векторы $T(H,f)$ с мощностью не более N. В свою очередь величина $\mathcal{E}_N([\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)])$ характеризует наилучшую точность приближения, которую можно достичь на том же классе уравнений среди методов, требующих для своей реализации не более чем N а.о. над значениями функционалов δ_i. Таким образом, обе величины E_N и $\mathcal{E}_N$ означают оптимальную точность решения уравнений из одного класса и различаются между собой видом фиксированного вычислительного ресурса, а именно, в первом случае ограничен объем дискретной информации, а во втором — количество простейших операций. Очевидно соотношение

$$E_N([\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)]) \le \mathcal{E}_N([\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)]). \tag{3}$$

Точный порядок величины $E_N([\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)])$ был найден авторами в [10]. Чтобы сформулировать соответствующий результат, необходимо прежде описать приближенный метод, реализующий оптимальный порядок E_N.

Итак, в качестве информационного вектора $T_m(H,f)$ в работе [10] был предложен набор значений следующих скалярных произведений

$$T_m(H,f) = \Big(\int\limits_Q h(t,\tau)\cos(kt-\tfrac{\pi i}{2})\cos(n\tau-\tfrac{\pi j}{2})dtd\tau,$$
$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos(lt-\tfrac{\pi i}{2})dt, i,j=0,1; k,n,l=0,1,\ldots,m; kn\le m\Big). \tag{4}$$

Следует отметить, что в набор $T_m(H,f)$ входят числа, которые с точностью до постоянного множителя определяют коэффициенты Фурье ядра $h(t,\tau)$ с номерами из области координатной плоскости вида

$$\Gamma_m = \{(i,j) : |ij| \le m, |\, i\,| \le m, |\, j\,| \le m\}.$$

Легко видеть, что общее число функционалов вида (4) равно по порядку $m\log m$, т.е. $\mathcal{T}_{\Updownarrow} = O(m\log m)$.

Приближенный метод $A' \in \mathcal{A}(T)$ состоит в нахождении решения уравнения

$$\hat{x}_m(t) = H_m\hat{x}_m(t) + S_m f(t). \tag{5}$$

Здесь $A'(T_m,H,f) := \hat{x}_m$, индекс m характеризует размерность подпространства тригонометрических многочленов, в котором ищется приближенное решение, и

$$S_m f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt$$

— m-я сумма Фурье функции $f(t)$ по тригонометрическому базису, причем

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)d\tau, a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)\cos k\tau d\tau, b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)\sin k\tau\, d\tau,$$

$$H_m z(t) = \int\limits_0^{2\pi} h_m(t,\tau)z(\tau)d\tau, \tag{6}$$

где

$$h_m(t,\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_Q h(u,v)\,dudv + \frac{1}{\pi^2}\sum_{\substack{kn\le m\\ k,n\ge 1}}\int\limits_Q h(u,v)\cos k(t-u)\times$$
$$\times\cos n(\tau-v)dudv + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_Q [\cos k(t-u)+\cos k(\tau-v)]h(u,v)\,dudv,$$

— сумма Фурье функции $h(t,\tau)$ с номерами гармоник из области Γ_m. Для приближенного метода A' справедлива

Теорема 1 ([10]). *При $r > s$ $E_N([\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)]) = O(N^{-r}\log^r N)$. Точный порядок величины E_N реализуют информационный вектор $T_m(H,f)$ (4) при $N = O(m\log m)$ и приближенный метод A' (5).*

В рамках настоящей статьи требуется оценить оптимальную погрешность решения уравнений (1) в смысле величины $\mathcal{E}_N([\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)])$.

Прежде всего вычислим количество а.о., необходимых для реализации приближенного метода A'. Как следует из (5), в рамках метода A' приходится решать систему $2m+1$ линейных алгебраических уравнений. В общем случае решение такой системы (например, методом Гаусса) требует выполнения $O(m^3) = O(N^3\log^{-3}N)$ а.о. Тем самым установлено, что $A' \in \mathcal{A}_{N_1}(T)$ при $N_1 \geq O(N^3\log^{-3}N)$. Другими словами, в рамках метода A' требуется, как минимум, в 3 раза по порядку (в степенной шкале) больше а.о., чем число компонент информационного вектора $T_m(H,f)$. А это свидетельствует о низкой эффективности метода A' в смысле величины $\mathcal{E}_N$. Нам предстоит модифицировать метод A' с тем, чтобы сократить число выполняемых а.о. до величины $N = O(m\log m)$. С этой целью рассмотрим последовательность элементов

$$\begin{aligned} &\bar{x}_0(t) = 0,\\ &\bar{x}_k(t) = \bar{x}_{k-1}(t) + (I - S_\mu H_m)^{-1}\Big(H_m\bar{x}_{k-1}(t) - \bar{x}_{k-1}(t) + S_m f(t)\Big), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\mu < m$, а индекс $k = 1, 2, \ldots$ означает номер шага итерационной процедуры (7).

Проанализируем соотношение (7). Ранг оператора $S_\mu H_m$ равен $2\mu + 1$, следовательно, решение уравнения (7) сводится к решению системы $2\mu + 1$ линейных алгебраических уравнений. Как известно, решение этой системы требует $O(\mu^3)$ а.о. Поэтому если положить $\mu = [m^{1/3}]$, то получается, что число арифметических действий, необходимое для решения этой системы, имеет порядок $O(m)$.

Предполагая $\mu = [m^{1/3}]$, приведем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *В рамках итерационной процедуры (7) при $\mu = [m^{1/3}]$ для представления любого элемента $\bar{x}_k(t)$ в стандартном виде*

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cos it + \beta_i \sin it$$

достаточно выполнить не более $O(m\log m)$ а.о. над значениями функционалов из набора $T_m(H,f)$.

Лемма 2. *Для H_m (6) и $\mu = [m^{1/3}]$ выполняется*

$$\|H_m - S_\mu H_m\|_{L_2\to L_2} \leq 2\gamma m^{-r/3}.$$

Для установления истинности лемм 1 и 2 достаточно повторить рассуждения из доказательств предложения 1 в [7] и леммы 3 в [11], соответственно. Поэтому доказательства этих лемм опущено.

Приведем теперь оценку, найденную в лемме 1 из [10], а именно

$$\|H - H_m\| \leq c \cdot m^{-r}, \tag{8}$$

где $c > 0$ — некоторая константа, не зависящая от m. Здесь и далее под c условимся понимать, возможно, различные положительные постоянные, зависящие лишь от параметров r, s, β, γ, входящих в определение класса $[\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)]$. Сравнение (8) и оценки из леммы 2 показывает, что оператор $S_\mu H_m$ приближает оператор H_m по порядку хуже, чем оператор H_m — исходный оператор H, а это в свою очередь влияет на точность приближения решения (1) элементами $\bar{x}_k(t)$. Отсюда вытекает вывод: чтобы достичь на исследуемом классе требуемую точность $O(m^{-r})$, нужно провести итерационную процедуру (7) с необходимым количеством шагов k. Следуя рекомендациям [11], для этого достаточно взять $k = 3$.

Через A'' обозначим проекционно-итеративный метод (7), где $\mu = [m^{1/3}]$ и $k = 3$. Таким образом, в рамках A'' в качестве приближенного решения $A''(T_m, H, f)$ берется элемент $\bar{x}_3(t)$. Из выше сказанного следует включение $A'' \in \mathcal{A}_N(T)$ при $N = O(m \log m)$. Для приближенного метода A'' справедлива

Теорема 2. *При $r > s$ выполняется*

$$\mathcal{E}_N([\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)]) = O(N^{-r} \log^r N).$$

Точный порядок исследуемой величины реализует проекционно-итеративный метод A''.

Доказательство. Оценим погрешность метода A'' на классе уравнений $[\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)]$. А именно, в силу соотношения $N = O(m \log m)$ нам предстоит показать, что точность метода A'' на исследуемом классе составляет $O(m^{-r})$. Из теоремы 1 следует, что для любого уравнения (1) из класса $[\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)]$ справедливо

$$\|x - \hat{x}_m\|_2 \leq cm^{-r}, \tag{9}$$

где $x(t)$ и $\hat{x}_m(t)$ есть соответственно точное и приближенное (в рамках метода A') решения (1). Таким образом, для установления необходимой верхней оценки величины $\mathcal{E}_N$ достаточно показать, что на всем классе уравнений выполняется $\|\hat{x}_m - \bar{x}_3\|_2 \leq cm^{-r}$, где $\bar{x}_3(t)$ — приближенное решение (1) в рамках метода A''.

Из леммы 1, оценки (8) и теоремы об оценке норм резольвент близких операторов [1, с.517] следует

$$\|(I - S_\mu H_m)^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \leq \frac{2\beta}{1 - 2c\beta\mu^{-r}} \leq 4\beta, \tag{10}$$

где

$$c = 2\gamma, \quad \mu \geq \mu_1 = 1 + \left[\frac{2 + |\log_2(c\beta)|}{r}\right].$$

В дальнейшем нам понадобится оценка нормы точного решения произвольного уравнения (1) в метрике W_2^r

$$\begin{aligned}\|x\|_{W_2^r} := \|Hx + f\|_{W_2^r} = \|H(I-H)^{-1}f + f\|_{W_2^r} \le \\ \le \|H\|_{L_2\to W_2^r}\|(I-H)^{-1}\|_{L_2\to L_2}\|f\|_2 + \|f\|_{W_2^r} \le \gamma(\gamma\beta+1). \quad (11)\end{aligned}$$

Далее заметим, что решение $\hat{x}_m(t)$ уравнения (5) можно представить в следующем виде

$$\hat{x}_m = \bar{x}_2 + (I-H_m)^{-1}(H_m\bar{x}_2 - \bar{x}_2 + S_m f). \quad (12)$$

Из (7) и (12) следует

$$\begin{aligned}\hat{x}_m - \bar{x}_3 = \left\{(I-H_m)^{-1} - (I-S_\mu H_m)^{-1}\right\}(I-H_m)(\hat{x}_m - \bar{x}_2) = \\ = (I-S_\mu H_m)^{-1}(H_m - S_\mu H_m)(\hat{x}_m - \bar{x}_2) = \\ = \left\{(I-S_\mu H_m)^{-1}(H_m - S_\mu H_m)\right\}^2(\hat{x}_m - \bar{x}_1). \quad (13)\end{aligned}$$

Вновь используя (7) и (5), находим

$$\begin{aligned}\|\hat{x}_m - \bar{x}_1\|_2 = \|(I-S_\mu H_m)^{-1}(H_m - S_\mu H_m)\hat{x}_m\|_2 \le \\ \le \|(I-S_\mu H_m)^{-1}\|_{L_2\to L_2}\|H_m - S_\mu H_m\|_{L_2\to L_2}\left(\|x\|_2 + \|x-\hat{x}_m\|_2\right). \quad (14)\end{aligned}$$

Подставляя в (13) оценки (10), (11), (9), (14), с учетом леммы 1 получаем

$$\begin{aligned}\|\hat{x}_m - \bar{x}_3\|_2 \le \|(I-S_\mu H_m)^{-1}\|^3_{L_2\to L_2}\|H_m - S_\mu H_m\|^3_{L_2\to L_2}\times \\ \times\left(\|x\|_2 + \|x-\hat{x}_m\|_2\right) \le cm^{-r}. \quad (15)\end{aligned}$$

Тем самым в силу соотношения $N = O(m\log m)$ получаем, что верхняя оценка величины $\mathcal{E}_N$ установлена.

С другой стороны, требуемая нижняя оценка искомой величины непосредственно следует из (3) и теоремы 1. □

ВЫВОДЫ. Впервые вопрос о порядковых оценках величины $\mathcal{E}_N$ на классах уравнений Фредгольма второго рода с коэффициентами конечной гладкости, когда интегральный оператор (2) не фиксирован, а принадлежит некоторому классу, был поставлен H. Wozniakowski в [12]. Ответ на этот вопрос получен С.В.Переверзевым в [6], [7] на классах уравнений $[\mathcal{H}_\gamma^{r,r}, W_2^r(1)]$ (т.е. в случае ядер из классов изотропной гладкости):

$$\mathcal{E}_N([\mathcal{H}_\gamma^{r,r}, W_2^r(1)]) = O(N^{-r}\log^r N).$$

Поскольку при $r > s$ очевидно вложение

$$[\mathcal{H}_\gamma^{r,r}, W_2^r(1)] \subset [\mathcal{H}_\gamma^{r,s}, W_2^r(1)],$$

то теорема 2 является обобщением результата [6], [7] на случай ядер анизотропной гладкости. Другими словами, за счет детального изучения аппроксимационных свойств проекционно-итеративного метода A'' нам удалось показать, что оценка наилучшей точности $O(N^{-r}\log^r N)$ является справедливой в более общем случае, чем это было известно ранее.

Список цитируемых источников

1. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
2. *Бахвалов Н.С.* Об оптимальных способах задания информации при решении дифференциальных уравнений // Ж.вычисл. матем. и матем.физ.– 1962. – Т.2, № 4. – С.569–592.
3. *Вайникко Г.М., Педас А., Уба П.* Методы решения слабо-сингулярных интегральных уравнений. — Тарту: Изд-во Тарт. ун-та, 1984. — 94 с.
4. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. — 232 с.
5. *Переверзев С. В.* Оптимизация методов приближенного решения операторных уравнений. – Киев: Институт математики НАН Украины, 1996. — 252 с.
6. *Переверзев С. В.* О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма II рода с гладкими ядрами. I // Украинский математический журнал. — 1988. — Т.40, № 1. — С. 84-91.
7. *Переверзев С. В.* О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма II рода с гладкими ядрами. II // Украинский математический журнал. — 1989. — Т.41, № 2. — С. 189-193.
8. *Соколов Ю.Д.* Метод осреднения функциональных поправок. — Киев: Наук. думка, 1968. — 336 с.
9. *Лучка А.Ю.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1980. — 264 с.
10. *Лукьянова Е.А., Мосенцова А.В.* О наилучшей точности решения некоторых классов интегральных уравнений // Ученые записки ТНУ. — 2006. — Т.19 (58), №1. — С. 21–28.
11. *Solodky S.G.* Complexity for some classes of well-posed problems // Proc. Estonian Sci. Phys. Math. — 1999. — V.48, N 2. — P.123–132.
12. *Wozniakowski H.* Information based complexity // Ann. Rev. Comput. Sci. — 1986. — V.1. — P.319–380.

Получено 11.10.2006