Динамические системы, том 2(30), №1-2(2012), 169–186

УДК 571.9

Нелинейные нетеровы краевые задачи, не разрешенные относительно производной[1]

С. М. Чуйко, О. В. Старкова, О. Е. Пирус

Славянский государственный педагогический университет,
Славянск 84116. *E-mail: star-o@ukr.net*

Аннотация. Найдены необходимые и достаточные условия существования решений слабонелинейной нетеровой краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, дифференциальное уравнение, не разрешенное относительно производной, уравнение Дюффинга, уравнение Релея.

1. Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решения $z(t,\varepsilon) \in C^1[a,b],\ C[0,\varepsilon_0]$ задачи

$$dz/dt = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,z',t,\varepsilon),\ \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \qquad (1)$$

в малой окрестности решения порождающей краевой задачи

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t),\ \ell z_0(\cdot) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^m. \qquad (2)$$

Здесь $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица и $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a,b]$ действительные функции, $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал $\ell z(\cdot) : C[a,b] \to \mathbb{R}^m$. Нелинейности $Z(z,z',t,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ нетеровой $(m \neq n)$ задачи (1) предполагаем непрерывно дифференцируемыми по неизвестной z и ее производной z' в малой окрестности порождающего решения и его производной и по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля. Кроме того, считаем нелинейную вектор-функцию $Z(z,z',t,\varepsilon)$ непрерывной по независимой переменной t на отрезке $[a,b]$ и линейной по производной z'.

$$Z(z,z',t,\varepsilon) := V(z,t,\varepsilon) + W(z,t,\varepsilon)z',\ V(z,t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ W(z,t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Функцию $V(z,t,\varepsilon)$ и матрицу $W(z,t,\varepsilon)$ считаем непрерывно дифференцируемыми по неизвестной z в малой окрестности порождающего решения и по малому

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0112U0000372).

параметру ε в малой положительной окрестности нуля, а также непрерывными по независимой переменной t на отрезке $[a, b]$. Исследован критический случай $(P_{Q^*} \neq 0)$, причем предполагается выполненным условие

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} = 0; \tag{3}$$

в этом случае порождающая задача (2) имеет семейство решений

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \; r := n - n_1, \; c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $X(t)$ — нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части системы (2), $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1$, $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $(n \times r)$-матрица, составленная из r линейно-независимых столбцов $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$, $P_{Q_d^*}$– $(d \times m)$-матрица, составленная из $(d := m - n_1)$ линейнонезависимых строк $(m \times m)$-матрицы-ортопроектора $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$,

$$G[f(s); \alpha](t) = K[f(s)](t) + X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\}$$

— обобщенный оператор Грина краевой задачи (2),

$$K[f(s)](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

— оператор Грина задачи Коши для системы (2), Q^+ — псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу [12].

2. Условия существования решения

Необходимые условия существования решения $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon)$ задачи (1) в критическом случае определяет следующая лемма. Доказательство леммы аналогично [12].

Лемма. *Пусть краевая задача* (1) *представляет критический* $(P_{Q^*} \neq 0)$ *случай и выполнено условие* (3) *разрешимости порождающей задачи* (2)*. Предположим также, что задача* (1) *имеет решение, обращающееся при* $\varepsilon = 0$ *в порождающее* $z_0(t, c_r^*)$*. Тогда вектор* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ *удовлетворяет уравнению*

$$F(c_r) := P_{Q_d^*}\{J(z_0(\cdot, c_r), z_0'(\cdot, c_r), 0) - \ell K[Z(z_0(s, c_r), z_0'(s, c_r), s, 0)](\cdot)\} = 0. \tag{4}$$

Пример 1. Условия леммы выполняются в случае задачи о нахождении 2π-периодического решения уравнения типа Дюффинга

$$y'' + y = \sin 3t + \varepsilon(y^3 + y''y) \tag{5}$$

в малой окрестности решения порождающей 2π-периодической задачи.

Уравнение (5) приводится к виду (1) при

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ z(t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} z^{(a)} \\ z^{(b)} \end{bmatrix}, \ f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin 3t \end{bmatrix},$$

$$Z(z, z', \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ (z^{(a)})^3 + z^{(b)}(z^{(a)})' \end{bmatrix}.$$

Поскольку $Q = 0$, постольку в случае 2π-периодической задачи для уравнения (5) имеет место критический случай. Порождающая задача имеет решение

$$y_0(t, c^{(a)},\ c^{(b)}) = c^{(a)} \cos t + c^{(b)} \sin t + \frac{1}{8}(3 \sin t - \sin 3t).$$

Единственный корень $c_0^{(a)} = 0,\ c_0^{(b)} = -\frac{3}{8}$ уравнения (4) для порождающих амплитуд

$$\begin{cases} -\dfrac{3\pi}{1\,024} \cdot [21 + 140c^{(b)} + 320(c^{(b)})^2 + 256(c^{(b)})^3 + 64(c^{(a)})^2(1 + 4c^{(b)})] = & 0, \\ \dfrac{3}{256} \cdot c^{(a)} \cdot [5 + 64(c^{(a)})^2 + 32c^{(b)} + 64(c^{(b)})^2] = & 0 \end{cases}$$

определяет решение порождающей задачи

$$y_0(t, c_0^{(a)},\ c_0^{(b)}) = -\,\frac{1}{8} \sin 3t,$$

в малой окрестности которого может существовать решение 2π-периодической задачи для уравнения типа Дюффинга (5). Таким образом, приходим к задаче об отыскании решения $z(t,\varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon)$ задачи (1) в окрестности порождающего решения $z_0(t, c_r^*)$. При условии

$$\det(I_n - \varepsilon W(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)) \neq 0, \tag{6}$$

краевая задача

$$(I_n - \varepsilon W(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)) \frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} =$$
$$= A(t)x + \varepsilon V(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) + \varepsilon W(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) z_0'(t, c_r^*), \tag{7}$$

$$\ell x(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon), \varepsilon). \tag{8}$$

является невырожденной [9] и равносильна следующей

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x + \varepsilon M(z_0(t, c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{9}$$

$$\ell x(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot, c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon), \varepsilon). \tag{10}$$

Здесь

$$M(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) := (I_n-\varepsilon W(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon))^{-1}\times$$
$$\times\,[W(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)(z_0'(t,c_r^*)+A(t)x(t,\varepsilon))+V(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)].$$

Действительно, при условии (6) матрица $I_n-\varepsilon W(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ невырождена, поэтому

$$(I_n-\varepsilon W(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon))^{-1}\in C^1[||x(t,\varepsilon)||\le q],\ C^1[0,\varepsilon_0],$$

при этом обратная функция в малой окрестности точки $\varepsilon=0$ может быть представлена в виде

$$[I_n+\varepsilon W(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)]^{-1}=I_n+\varepsilon W_1(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$$

при помощи матрицы

$$W_1(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\in C^1[||x(t,\varepsilon)||\le q],\ C^1[0,\varepsilon_0].$$

Вектор-функция

$$M(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) := V(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)+$$
$$+\,W_1(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)[A(t)z(t,\varepsilon)+f(t)+V(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)]$$

непрерывно-дифференцируема по неизвестной z в малой окрестности порождающего решения, а также — по малому параметру ε у малой положительной окрестности нуля и кроме того непрерывной по независимой переменной t на отрезке $[a,b]$. В окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0$ имеет место следующее представление:

$$M(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=M(z_0(t,c_r^*),t,0)+$$
$$+\,A_1(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon A_2(t)+R_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

где

$$A_1(t)=\left.\frac{\partial M(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z\,=\,z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon\,=\,0,}}\quad A_2(t)=\left.\frac{\partial M(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z\,=\,z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon\,=\,0.}}$$

Предполагаем линейную по x' часть функционала $J(z(\cdot,\varepsilon),z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ нулевой и выделяем линейную часть $\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)$ по x и линейную часть $\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))$ по $\varepsilon:$

$$J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),z_0'(\cdot,c_r^*)+x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)=J(z_0(\cdot,c_r^*),z_0'(\cdot,c_r^*),0)+$$
$$+\,\ell_1x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),z_0'(\cdot,c_r^*)+x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).$$

Обозначая матрицу $B_0 = P_{Q_d^*}\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K[A_1(s)X_r(s)](\cdot)\}$, приходим к операторной системе

$$\begin{gathered}
x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r + \zeta(t,\varepsilon), \qquad (11)\\
B_0\ c_r(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\{\ell_1\zeta(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -\\
-\ell K[A_1(s)\zeta(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + R_1(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\},\\
\zeta(t,\varepsilon) = \varepsilon G[M(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)](t),
\end{gathered}$$

равносильной задаче о нахождении решений задачи (7), (8). Предположим, что для краевой задачи (7), (8) выполнено условие $P_{B_0^*} = 0$, гарантирующее [12] разрешимость второго уравнения операторной системы (11); здесь $P_{B_0^*}$ — $(d \times d)$-матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^d \to N(B_0^*)$. В этом случае второе уравнение системы (11) имеет по меньшей мере одно решение вида

$$\begin{aligned}
c_r(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\{\ell_1\zeta(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -\\
- \ell K[A_1(s)\zeta(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\},
\end{aligned}$$

при этом операторная система (11) имеет по меньшей мере одно решение, для $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z_0(t,c_r^*)$. Для построения приближенного решения краевой задачи (7) в критическом случае при условии $P_{B_0^*} = 0$ применим метод простых итераций. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть для краевой задачи* (1) *имеет место критический случай и выполнено условие* (3) *разрешимости порождающей задачи* (2). *Тогда для каждого корня $c_r^* \in R^r$ уравнения* (4) *при условиях* (6) *и $P_{B_0^*} = 0$ задача* (1) *имеет по меньшей мере одно решение, определяемое операторной системой*

$$\begin{gathered}
z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),\ x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + \zeta(t,\varepsilon),\\
c_r(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\{\ell_1\zeta(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -\\
-\ell K[A_1(s)\zeta(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\},\\
\zeta(t,\varepsilon) = \varepsilon G[M(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);\ J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon), z_0'(\cdot,c_r^*) + x'(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)](t),
\end{gathered}$$

при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z_0(t,c_r^*)$.

Оценка ε_* длины отрезка $[0,\varepsilon^*]$, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры, построенной по методу простых итераций, может быть получена аналогично [2, 8] с использованием метода мажорирующих уравнений Ляпунова, либо из условия сжимаемости оператора, соответствующего системе (11) аналогично [10]. На отрезке $[0,\varepsilon^*]$ предполагаем выполненным условие (6).

Пример 2. Условия доказанной теоремы выполняются в случае 2π-периодической задачи для уравнения типа Дюффинга (5).

Выше было установлено, что уравнение для порождающих амплитуд имеет единственное решение. Невырожденность матрицы

$$B_0 = \frac{3\pi}{128} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

гарантирует выполнение условия $P_{B_0^*} = 0$, таким образом, 2π-периодическая задача для уравнения типа Дюффинга (5) имеет единственное решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее

$$y_0(t, c_0^{(a)},\ c_0^{(b)}) = -\,\frac{1}{8}\sin 3t.$$

Для проверки выполнения условий (6) представим нелинейность уравнения типа Дюффинга (5) в виде $Z(z, z', t, \varepsilon) = V(z, t, \varepsilon) + W(z, t, \varepsilon)z'$, где

$$V(z, t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ (z^{(a)})^3 \end{bmatrix},\ W(z, t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z^{(b)} & 0 \end{bmatrix};$$

при этом заметим, что матрица

$$I_2 - \varepsilon W(z, t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon z^{(b)} & 1 \end{bmatrix}$$

невырождена и имеет обратную

$$(I_2 - \varepsilon W(z, t, \varepsilon))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon z^{(b)} & 1 \end{bmatrix} \in C^1[||x(t, \varepsilon)|| \le q],\ C^1[0, \varepsilon_0].$$

3. Итерационная схема для уравнения типа Релея

Метод простых итераций [2, 12] отличают простота и численная устойчивость [2, 3, 6, 7, 12], однако построение приближенных решений с применением метода простых итераций связано с быстро увеличивающейся от итерации к итерации сложностью вычислений. Продемонстрируем технику построения приближенных решений краевой задачи (7), (8) аналогично [11] с использованием метода наименьших квадратов [1, 4, 5] на примере задачи о нахождении 2π-периодического решения

$$y(\cdot, \varepsilon) \in C^2[0, 2\pi],\ y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

уравнения типа Релея

$$y'' + y = f(t) + \varepsilon Y(y, y', y'', t, \varepsilon). \tag{12}$$

Здесь $Y(y, y', y'', t, \varepsilon)$ — нелинейная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной y и ее производным y', y'' в малой окрестности решения порождающей задачи, непрерывная по t на отрезке $[a, b]$ и непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$. Предположим, что порождающая 2π-периодическая задача для уравнения

$$y_0'' + y_0 = f(t)$$

разрешима; для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} f(t)dt = 0.$$

Если это условие выполнено, решение порождающей задачи имеет вид

$$y_0(t, c_0^{(a)},\ c_0^{(b)}) = c_0^{(a)} \cos t + c_0^{(b)} \sin t + g[f(s)](t),\ c_0^{(a)},\ c_0^{(b)} \in \mathbb{R}^1;$$

здесь

$$g[f(s)](t) := \int_0^t \sin(t-s)f(s)\ ds$$

— оператор Грина порождающей 2π-периодической задачи. Предположим, что уравнение для порождающих амплитуд (4)

$$F(c^{(a)},\ c^{(b)}) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} Y(y_0, y_0', y_0'', t, 0)\ dt = 0$$

в случае 2π-периодической задачи для уравнения типа Релея имеет простой

$$\det B_0 \neq 0,\ B_0 := \frac{\partial F(c^{(a)},\ c^{(b)})}{\partial(c^{(a)},\ c^{(b)})}\Bigg|_{\substack{c^{(a)} = c_0^{(a)}, \\ c^{(b)} = c_0^{(b)}}}$$

действительный корень $\hat{c^*}$. Предположим также, что для 2π-периодической задачи для уравнения типа Релея выполнено условие (6); таким образом, приходим к задаче об отыскании 2π-периодического решения уравнения типа Релея

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t, \hat{c^*}) + x(t, \varepsilon)$$

в окрестности порождающего решения $y_0(t, \hat{c^*})$. Для нахождения возмущения $x(\cdot, \varepsilon) \in C^2[0, 2\pi],\ x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$ получаем 2π-периодическую задачу для уравнения

$$x'' + x = \varepsilon Y(y_0 + x, y_0' + x', y_0'' + x'', t, \varepsilon). \tag{13}$$

Предположим, что

$$\frac{\partial Y(y(t,\varepsilon), y'(t,\varepsilon), y''(t,\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{y = y_0(t, \hat{c^*}), \\ y' = y_0'(t, \hat{c^*}), \\ y'' = y_0''(t, \hat{c^*}), \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0.$$

Используя непрерывную дифференцируемость функции $Y(y, y', y'', t, \varepsilon)$ по неизвестной y и ее производным y', y'' в малой окрестности решения $y_0(t, \hat{c^*})$ порождающей задачи и непрерывную дифференцируемость по малому параметру ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x(t, \varepsilon) = 0$, $x'(t, \varepsilon) = 0$, $x''(t, \varepsilon) = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$
\begin{aligned}
&Y(y_0(t, \hat{c^*}) + x(t, \varepsilon), y_0'(t, \hat{c^*}) + x'(t, \varepsilon), y_0''(t, \hat{c^*}) + x''(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \\
&\quad = Y(y_0(t, \hat{c^*}), y_0'(t, \hat{c^*}), y_0''(t, \hat{c^*}), t, 0) + \mathcal{A}_1(y_0(t, \hat{c^*}))x(t, \varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_0(t, \hat{c^*}))x'(t, \varepsilon) + \\
&+ \mathcal{A}_3(y_0(t, \hat{c^*}))x''(t, \varepsilon) + \mathcal{R}(y_0(t, \hat{c^*}) + x(t, \varepsilon), y_0'(t, \hat{c^*}) + x'(t, \varepsilon), y_0''(t, \hat{c^*}) + x''(t, \varepsilon), t, \varepsilon),
\end{aligned}
$$

где

$$
\mathcal{A}_1(y_0(t, \hat{c^*})) = \frac{\partial Y(y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon), y''(t, \varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y &=& y_0(t, \hat{c^*}), \\ y' &=& y_0'(t, \hat{c^*}), \\ y'' &=& y_0''(t, \hat{c^*}), \\ \varepsilon &=& 0 \end{array}},
$$

$$
\mathcal{A}_2(y_0(t, \hat{c^*})) = \frac{\partial Y(y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon), y''(t, \varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial y'}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y &=& y_0(t, \hat{c^*}), \\ y' &=& y_0'(t, \hat{c^*}), \\ y'' &=& y_0''(t, \hat{c^*}), \\ \varepsilon &=& 0 \end{array}},
$$

$$
\mathcal{A}_3(y_0(t, \hat{c^*})) = \frac{\partial Y(y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon), y''(t, \varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial y''}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y &=& y_0(t, \hat{c^*}), \\ y' &=& y_0'(t, \hat{c^*}), \\ y'' &=& y_0''(t, \hat{c^*}), \\ \varepsilon &=& 0 \end{array}}.
$$

Пусть $\varphi^{(1)}(t)$, $\varphi^{(2)}(t)$, $\ldots$, $\varphi^{(k)}(t)$, $\ldots$ — система линейно независимых дважды непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций. Первое приближение $x_1(t, \varepsilon)$ к решению 2π-периодической задачи для уравнения типа Релея (12) ищем, как 2π-периодическое решение уравнения

$$
x_1''(t, \varepsilon) + x_1(t, \varepsilon) = \varepsilon[Y(y_0(t, \hat{c^*}), y_0'(t, \hat{c^*}), y_0''(t, \hat{c^*}), t, 0) +
$$

$$+ \mathcal{A}_1(y_0(t,\hat{c}^*))x_1(t,\varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_0(t,\hat{c}^*))x_1'(t,\varepsilon) + \mathcal{A}_3(y_0(t,\hat{c}^*))x_1''(t,\varepsilon)]. \quad (14)$$

Решение к 2π-периодической задачи для уравнения (14) ищем в виде

$$x_1(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) := \varphi_1(t)c_1(\varepsilon),\ \varphi_1(t) = [\varphi^{(1)}(t)\ \varphi^{(2)}(t)\ \dots\ \varphi^{(\mu_1)}(t)],\ c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1}.$$

Потребуем

$$\Theta(c_1(\varepsilon)) = ||[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_0(t,\hat{c}^*)) - 1]\xi_1(t,\varepsilon) + \varepsilon Y(y_0(t,\hat{c}^*), y_0'(t,\hat{c}^*), y_0''(t,\hat{c}^*), t, 0) + \\ + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(t,\hat{c}^*))\xi_1'(t,\varepsilon) + [\varepsilon\mathcal{A}_3(y_0(t,\hat{c}^*)) - 1]\xi_1''(t,\varepsilon)||^2_{L^2[0,2\pi]} \to \min.$$

Обозначим $(1\times\mu_1)$-матрицу

$$\mathcal{F}_1(t,\varepsilon) = [\varepsilon\mathcal{A}_1(y_0(t,\hat{c}^*)) - 1]\varphi_1(t) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(t,\hat{c}^*))\varphi_1'(t) + [\varepsilon\mathcal{A}_3(y_0(t,\hat{c}^*)) - 1]\varphi_1''(t).$$

Необходимое условие минимизации функции $\Theta(c_1(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))c_1(\varepsilon) = -\varepsilon\int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(t,\varepsilon)\cdot Y(y_0(t,\hat{c}^*), y_0'(t,\hat{c}^*), y_0''(t,\hat{c}^*), t, 0)dt,$$

однозначно разрешимому при условии невырожденности матрицы Грама [1]

$$\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(t,\varepsilon)\mathcal{F}_1(t,\varepsilon)\ dt.$$

Таким образом, при условии $\det[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))] \neq 0$ находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(t,\varepsilon)\cdot Y(y_0(t,\hat{c}^*), y_0'(t,\hat{c}^*), y_0''(t,\hat{c}^*), t, 0)\ dt,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение $x_1(t,\varepsilon)$ к решению 2π-периодической задачи для уравнения (14). Предположим, что найденное первое приближение $y_1(t,\varepsilon) \approx y_0(t,\hat{c}^*) + \xi_1(t,\varepsilon)$ принадлежит области определения функции $Y(y,y',y'',t,\varepsilon)$ и не является искомым решением 2π-периодической задачи для уравнения (13). Второе приближение к решению к решению 2π-периодической задачи для уравнения (13) ищем в виде

$$x_2(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon),\ \varphi_2(t) = [\varphi^{(1)}(t)\ \varphi^{(2)}(t)\ \dots\ \varphi^{(\mu_2)}(t)], \\ \xi_2(t,\varepsilon) := \varphi_2(t)c_2(\varepsilon),\ c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_2}.$$

Аналогично разлагаем функцию $Y(y,y',y'',t,\varepsilon)$ в окрестности точек $x_1(t,\varepsilon) = 0$, $x_1'(t,\varepsilon) = 0$, $x_1''(t,\varepsilon) = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Y(y_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon), y_1'(t,\varepsilon) + \xi_2'(t,\varepsilon), y_1''(t,\varepsilon) + \xi_2''(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = \\ = Y(y_1(t,\varepsilon), y_1'(t,\varepsilon), y_1''(t,\varepsilon), t, 0) + \mathcal{A}_1(y_1(t,\varepsilon))\xi_2(t,\varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_1(t,\varepsilon))\xi_2'(t,\varepsilon) + \\ + \mathcal{A}_3(y_1(t,\varepsilon))\xi_2''(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(y_1(t,\varepsilon) + x_1(t,\varepsilon), y_1'(t,\varepsilon) + x_1'(t,\varepsilon), y_1''(t,\varepsilon) + x_1''(t,\varepsilon), t, \varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1(y_1(t,\varepsilon)) = \frac{\partial Y(y(t,\varepsilon), y'(t,\varepsilon), y''(t,\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y & = & y_1(t,\varepsilon), \\ y' & = & y_1'(t,\varepsilon), \\ y'' & = & y_1''(t,\varepsilon), \\ \varepsilon & = & 0 \end{array}},$$

$$\mathcal{A}_2(y_1(t,\varepsilon)) = \frac{\partial Y(y(t,\varepsilon), y'(t,\varepsilon), y''(t,\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial y'}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y & = & y_1(t,\varepsilon), \\ y' & = & y_1'(t,\varepsilon), \\ y'' & = & y_1''(t,\varepsilon), \\ \varepsilon & = & 0 \end{array}},$$

$$\mathcal{A}_3(y_1(t,\varepsilon)) = \frac{\partial Y(y(t,\varepsilon), y'(t,\varepsilon), y''(t,\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial y''}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y & = & y_1(t,\varepsilon), \\ y' & = & y_1'(t,\varepsilon), \\ y'' & = & y_1''(t,\varepsilon), \\ \varepsilon & = & 0 \end{array}}.$$

Решение 2π-периодической задачи для уравнения типа Релея (12) ищем, как 2π-периодическое решение уравнения

$$x_2''(t,\varepsilon) + x_2(t,\varepsilon) = \varepsilon[Y(y_1(t,\varepsilon), y_1'(t,\varepsilon), y_1''(t,\varepsilon), t, 0) + \\ + \mathcal{A}_1(y_1(t,\varepsilon))\xi_2(t,\varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_1(t,\varepsilon))\xi_2'(t,\varepsilon) + \mathcal{A}_3(y_1(t,\varepsilon))\xi_2''(t,\varepsilon)]. \quad (15)$$

Потребуем

$$\Theta(c_2(\varepsilon)) = ||[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_1(t,\varepsilon)) - 1]\xi_2(t,\varepsilon) + \varepsilon Y(y_1(t,\varepsilon), y_1'(t,\varepsilon), y_1''(t,\varepsilon), t, 0) + \\ + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_1(t,\varepsilon))\xi_2'(t,\varepsilon) + [\varepsilon\mathcal{A}_3(y_1(t,\varepsilon)) - 1]\xi_2''(t,\varepsilon)||^2_{L^2[0,2\pi]} \to \min.$$

Обозначим $(1 \times \mu_2)$-матрицу

$$\mathcal{F}_2(t,\varepsilon) = [\varepsilon\mathcal{A}_1(y_1(t,\varepsilon))) - 1]\varphi_2(t) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_1(t,\varepsilon))\varphi_2'(t) + [\varepsilon\mathcal{A}_3(y_1(t,\varepsilon)) - 1]\varphi_2''(t).$$

Необходимое условие минимизации функции $\Theta(c_2(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon))c_2(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(t,\varepsilon) \cdot [\xi_1''(t,\varepsilon) + \xi_1(t,\varepsilon) - \varepsilon Y(y_1(t,\varepsilon), y_1'(t,\varepsilon), y_1''(t,\varepsilon), t, 0)]dt,$$

однозначно разрешимому при условии невырожденности матрицы Грама

$$\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(t,\varepsilon)\mathcal{F}_2(t,\varepsilon)\, dt.$$

Таким образом, при условии $\det[\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon))] \neq 0$ находим вектор

$$c_2(\varepsilon) = -\varepsilon[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(t,\varepsilon) \cdot [\xi_1''(t,\varepsilon) + \xi_1(t,\varepsilon) - \\ - \varepsilon Y(y_1(t,\varepsilon), y_1'(t,\varepsilon), y_1''(t,\varepsilon), t, 0)]dt,$$

определяющий второе приближение $x_2(t,\varepsilon)$ к решению 2π-периодической задачи для уравнения (13). Предположим, что найденные приближения

$$y_k(t,\varepsilon) \approx y_0(t,\hat{c}^*) + \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \ \dots\ + \xi_k(t,\varepsilon),\ k = 1, 2,\ \dots$$

принадлежат области определения функции $Y(y, y', y'', t, \varepsilon)$ и не являются искомым решением 2π-периодической задачи для уравнения (13). Следующие приближения к решению 2π-периодической задачи для уравнения (13) ищем в виде

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \ \dots\ + \xi_{k+1}(t,\varepsilon),$$
$$\xi_{k+1}(t,\varepsilon) := \varphi_{k+1}(t)c_{k+1}(\varepsilon),\ c_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_{k+1}};$$

здесь

$$\varphi_{k+1}(t) = [\varphi^{(1)}(t)\ \varphi^{(2)}(t)\ \dots\ \varphi^{(\mu_{k+1})}(t)]$$

— $(1 \times \mu_{k+1})$-матрица. Разлагаем функцию $Y(y, y', y'', t, \varepsilon)$ в окрестности точек $x_k(t,\varepsilon) = 0$, $x_k'(t,\varepsilon) = 0$, $x_k''(t,\varepsilon) = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Y(y_k(t,\varepsilon) + \xi_{k+1}(t,\varepsilon),\ y_k'(t,\varepsilon) + \xi_{k+1}'(t,\varepsilon),\ y_k''(t,\varepsilon) + \xi_{k+1}''(t,\varepsilon)) = \\ = Y(y_2(t,\varepsilon), y_2'(t,\varepsilon), y_2''(t,\varepsilon), t, 0) + \mathcal{A}_1(y_k(t,\varepsilon))\xi_{k+1}(t,\varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_k(t,\varepsilon))\xi_{k+1}'(t,\varepsilon) + \\ + \mathcal{A}_3(y_k(t,\varepsilon))\xi_{k+1}''(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(y_k(t,\varepsilon) + \xi_{k+1}(t,\varepsilon), y_k'(t,\varepsilon) + \xi_{k+1}'(t,\varepsilon), y_k''(t,\varepsilon) + \xi_{k+1}''(t,\varepsilon), t, \varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1(y_k(t,\varepsilon)) = \frac{\partial Y(y(t,\varepsilon), y'(t,\varepsilon), y''(t,\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\begin{array}{lcl} y &=& y_k(t,\varepsilon), \\ y' &=& y_k'(t,\varepsilon), \\ y'' &=& y_k''(t,\varepsilon), \\ \varepsilon &=& 0 \end{array}},$$

$$\mathcal{A}_2(y_k(t,\varepsilon)) = \frac{\partial Y(y(t,\varepsilon), y'(t,\varepsilon), y''(t,\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial y'}\Bigg|_{\begin{array}{lcl} y &=& y_k(t,\varepsilon), \\ y' &=& y_k'(t,\varepsilon), \\ y'' &=& y_k''(t,\varepsilon), \\ \varepsilon &=& 0 \end{array}},$$

$$\mathcal{A}_3(y_k(t,\varepsilon)) = \frac{\partial Y(y(t,\varepsilon), y'(t,\varepsilon), y''(t,\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial y''}\Bigg|_{\begin{array}{lcl} y &=& y_2(t,\varepsilon), \\ y' &=& y_2'(t,\varepsilon), \\ y'' &=& y_2''(t,\varepsilon), \\ \varepsilon &=& 0 \end{array}}.$$

Приближение $x_{k+1}(t,\varepsilon)$ к решению 2π-периодической задачи для уравнения типа Релея (12) ищем, как 2π-периодическое решение уравнения

$$x''_{k+1}(t,\varepsilon) + x_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon[Y(y_k(t,\varepsilon), y'_k(t,\varepsilon), y''_k(t,\varepsilon), t, 0) + \\ + \mathcal{A}_1(y_k(t,\varepsilon))\xi_{k+1}(t,\varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_k(t,\varepsilon))\xi'_{k+1}(t,\varepsilon) + \mathcal{A}_3(y_k(t,\varepsilon))\xi''_{k+1}(t,\varepsilon)]. \quad (16)$$

Потребуем

$$\Theta(c_{k+1}(\varepsilon)) = ||[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_k(t,\varepsilon)) - 1]\xi_{k+1}(t,\varepsilon) + \varepsilon Y(y_k(t,\varepsilon), y'_k(t,\varepsilon), y''_k(t,\varepsilon), t, 0) + \\ + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_k(t,\varepsilon))\xi'_{k+1}(t,\varepsilon) + [\varepsilon\mathcal{A}_3(y_k(t,\varepsilon)) - 1]\xi''_{k+1}(t,\varepsilon)||^2_{L^2[0,2\pi]} \to \min.$$

Обозначим $(1 \times \mu_{k+1})$-матрицу

$$\mathcal{F}_{k+1}(t,\varepsilon) = [\varepsilon\mathcal{A}_1(y_k(t,\varepsilon))) - 1]\varphi_{k+1}(t) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_k(t,\varepsilon))\varphi'_{k+1}(t) + [\varepsilon\mathcal{A}_3(y_k(t,\varepsilon)) - 1]\varphi''_{k+1}(t).$$

Необходимое условие минимизации функции $\Theta(c_{k+1}(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))c_{k+1}(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(t,\varepsilon) \cdot [x''_k(t,\varepsilon) + x_k(t,\varepsilon) - \\ - \varepsilon Y(y_k(t,\varepsilon), y'_k(t,\varepsilon), y''_k(t,\varepsilon), t, 0)]dt,$$

однозначно разрешимому при условии невырожденности матрицы Грама

$$\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(t,\varepsilon)\mathcal{F}_{k+1}(t,\varepsilon)\; dt.$$

Таким образом, при условии $\det[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))] \neq 0$ находим вектор

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -\varepsilon[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(t,\varepsilon) \cdot [x''_k(t,\varepsilon) + x_k(t,\varepsilon) - \\ - \varepsilon Y(y_k(t,\varepsilon), y'_k(t,\varepsilon), y''_k(t,\varepsilon), t, 0)]dt,$$

определяющий приближение $x_{k+1}(t,\varepsilon)$ к решению 2π-периодической задачи для уравнения (13). Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие. *Предположим, что выполнено условие разрешимости*

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} f(t)dt = 0$$

порождающей 2π*-периодической задачи для уравнения типа Релея* (12)*. Тогда для каждого простого корня*

$$\hat{c^*} := \mathrm{col}(c_0^{(a)},\ c_0^{(b)}),\ c_0^{(a)},\ c_0^{(b)} \in \mathbb{R}^1$$

уравнения для порождающих амплитуд

$$F(\hat{c^*}) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} Y(y_0(t,\hat{c}^*), y'_0(t,\hat{c}^*), y''_0(t,\hat{c}^*), t, 0)\ dt = 0$$

при условии (6) *невырожденная* 2π*-периодическая задача для уравнения типа Релея* (12) *имеет единственное решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее*

$$y_0(t, c_0^{(a)},\ c_0^{(b)}) = c_0^{(a)} \cos t + c_0^{(b)} \sin t + g[f(s)](t).$$

При условии

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))] \neq 0,\ \Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) := \int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(t,\varepsilon)\mathcal{F}_{k+1}(t,\varepsilon)\ dt,\ k = 1, 2,\ \ldots$$

для нахождения решения уравнения типа Релея (12) *применима итерационная схема*

$$y_1(t,\varepsilon) \approx y_0(t,\hat{c}^*) + x_1(t,\varepsilon),\ x_1(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) := \varphi_1(t)c_1(\varepsilon), \tag{17}$$

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_1(t,\varepsilon) \cdot Y(y_0(t,\hat{c^*}), y'_0(t,\hat{c^*}), y''_0(t,\hat{c^*}), t, 0)\ dt,$$

$$y_2(t,\varepsilon) = y_0(t,\hat{c}^*) + x_2(t,\varepsilon),\ x_2(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon),\ \xi_2(t,\varepsilon) := \varphi_2(t)c_2(\varepsilon),$$

$$c_2(\varepsilon) = -\varepsilon[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_2(t,\varepsilon) \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_2(t,\varepsilon) \cdot [\xi''_1(t,\varepsilon) + \\ + \xi_1(t,\varepsilon) - \varepsilon Y(y_1(t,\varepsilon), y'_1(t,\varepsilon), y''_1(t,\varepsilon), t, 0)]dt,\ \ldots ,$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = y_0(t,\hat{c}^*) + x_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \ \ldots\ + \xi_{k+1}(t,\varepsilon),\ \xi_{k+1}(t,\varepsilon) = \varphi_{k+1}(t)c_{k+1}(\varepsilon),$$

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -\varepsilon[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(t,\varepsilon) \cdot [x''_k(t,\varepsilon) + x_k(t,\varepsilon) - \\ - \varepsilon Y(y_k(t,\varepsilon), y'_k(t,\varepsilon), y''_k(t,\varepsilon), t, 0)]dt,\ \ldots , k = 1, 2,\ \ldots .$$

Пример 3. Условия доказанного следствия выполняются в случае 2π-периодической задачи для уравнения типа Дюффинга (5).

Выше было установлено, что уравнение для порождающих амплитуд (4) в случае задачи о нахождении периодического решения уравнения типа Дюффинга (5) имеет единственный простой корень; таким образом, 2π-периодическая задача для уравнения типа Дюффинга (5) единственное решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее

$$y_0(t, \hat{c}^*) = -\,\frac{1}{8}\sin 3t.$$

Для первого шага итерационной схемы (17) положим

$$\varphi_1(t) = [\ 1\ \ \cos 6t\ \ \cos 12t\ \ \cos 18t\ \ \sin 3t\ \ \sin 9t\ ].$$

Матрица Грама, соответствующая порождающему решению $y_0(t, \hat{c}^*)$

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))] = 2\ 140\ 933\ 372\ 497\ 920\ 000 \cdot \pi^6 - 76\ 405\ 187\ 546\ 688\ 000 \cdot \pi^6 \cdot \varepsilon +$$
$$+\,\frac{313\ 457\ 480\ 054\ 724\ 145\ 725\pi^6\varepsilon^2}{512} - \frac{5\ 232\ 304\ 843\ 620\ 021\ 048\ 735\pi^6\varepsilon^3}{524\ 288} + \ \ldots\ \neq 0$$

невырождена, при этом

$$x_1(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) = -\frac{9\varepsilon}{128} - \frac{6\ 507\varepsilon^2}{4\ 587\ 520} + \frac{6\ 770\ 947\ 707\varepsilon^3}{657\ 666\ 867\ 200} +$$
$$+\,(-\frac{9\varepsilon}{4\ 480} - \frac{12\ 483\varepsilon^2}{321\ 126\ 400} + \frac{930\ 910\ 657\ 797\varepsilon^3}{3\ 291\ 622\ 670\ 336\ 000})\cos 6t +$$
$$+\,(-\frac{531\varepsilon^2}{1\ 312\ 030\ 720} + \frac{717\ 978\ 087\varepsilon^3}{258\ 627\ 495\ 526\ 400})\cos 12t - \frac{29\ 079\varepsilon^3\cos 18t}{70\ 084\ 020\ 729\ 282\ 560} +$$
$$+\,(\frac{3\varepsilon}{16\ 384} + \frac{21\ 563\ 529\varepsilon^2}{2\ 348\ 810\ 240} + \frac{24\ 506\ 413\ 821\varepsilon^3}{168\ 362\ 718\ 003\ 200})\sin 3t +$$
$$+\,(-\frac{\varepsilon}{163\ 840} + \frac{51\ 861\varepsilon^2}{734\ 003\ 200} + \frac{1\ 272\ 339\ 412\ 821\varepsilon^3}{481\ 517\ 373\ 489\ 152\ 000})\sin 9t.$$

Для второго шага положим

$$\varphi_2(t) = [\ 1\ \ \cos 6t\ \ \cos 12t\ \ \cos 18t\ \ \cos 24t\ \ \sin 3t\ \ \sin 9t\ \ \sin 15t\ \ \sin 21t\ ].$$

Матрица Грама невырождена

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon))] = 341\ 272\ 832\ 087\ 870\ 524\ 515\ 707\ 928\ 566\ 892\ 914\ 301\ 468\ 672 -$$
$$-\,12\ 021\ 705\ 888\ 494\ 603\ 711\ 163\ 756\ 027\ 831\ 666\ 408\ 947\ 712\varepsilon +$$
$$+\,517\ 437\ 183\ 653\ 892\ 172\ 985\ 164\ 128\ 932\ 709\ 685\ 159\ 526\ 400\varepsilon^2 -$$
$$-\,7\ 465\ 075\ 489\ 373\ 724\ 425\ 944\ 482\ 600\ 620\ 047\ 474\ 884\ 608\varepsilon^3 +$$
$$+\,289\ 681\ 629\ 504\ 824\ 272\ 624\ 496\ 874\ 508\ 753\ 763\ 617\ 996\ 800\varepsilon^4 +$$
$$+\,4\ 538\ 458\ 743\ 160\ 576\ 217\ 386\ 113\ 890\ 938\ 480\ 897\ 294\ 336\varepsilon^5 + \ \ldots\ \neq 0,$$

при этом

$$\xi_2(t,\varepsilon) \approx \Big(-\frac{9\varepsilon}{4\,480}-\frac{12\,483\varepsilon^2}{321\,126\,400}+\frac{788\,735\varepsilon^3}{1\,841\,834\,163}+\frac{226\,719\varepsilon^4}{7\,496\,136\,647}-\frac{1\,911\,313\varepsilon^5}{15\,896\,456\,138}-$$
$$-\frac{170\,566\varepsilon^6}{11\,637\,679\,803}+\frac{640\,823\varepsilon^7}{16\,685\,488\,973}+\frac{327\,442\varepsilon^8}{50\,764\,072\,703}-\frac{421\,016\varepsilon^9}{33\,731\,158\,055}-$$
$$-\frac{99\,915\varepsilon^{10}}{39\,506\,604\,731}+\frac{142\,346\varepsilon^{11}}{36\,632\,958\,791}+\frac{159\,201\varepsilon^{12}}{142\,636\,764\,125}\Big)\cos 6t+$$
$$+\Big(-\frac{531\varepsilon^2}{1\,312\,030\,720}+\frac{29\,405\varepsilon^3}{8\,954\,287\,503}+\frac{52\,813\varepsilon^4}{190\,940\,372\,191}-\frac{220\,831\varepsilon^5}{137\,645\,927\,305}-$$
$$-\frac{28\,645\varepsilon^6}{150\,109\,733\,123}+\frac{84\,520\varepsilon^7}{126\,787\,145\,543}+\frac{26\,073\varepsilon^8}{249\,004\,551\,221}-\frac{65\,288\varepsilon^9}{263\,975\,909\,325}-$$
$$-\frac{40\,432\varepsilon^{10}}{865\,748\,841\,745}+\frac{63\,921\varepsilon^{11}}{763\,460\,863\,304}+\frac{18\,853\varepsilon^{12}}{1\,025\,703\,929\,032}\Big)\cos 12t+$$
$$+\Big(-\frac{246\varepsilon^3}{6\,010\,227\,989\,413}+\frac{11\,626\varepsilon^4}{6\,784\,618\,226\,291}-\frac{6\,358\varepsilon^5}{609\,146\,866\,987}-$$
$$-\frac{60\,335\varepsilon^6}{37\,045\,801\,772\,009}+\frac{3\,379\varepsilon^7}{424\,714\,119\,629}+\frac{3\,269\varepsilon^8}{2\,629\,561\,544\,710}-\frac{9\,699\varepsilon^9}{2\,376\,406\,390\,358}-$$
$$-\frac{734\varepsilon^{10}}{1\,032\,477\,377\,023}+\frac{2\,111\varepsilon^{11}}{1\,243\,006\,682\,398}+\frac{1\,481\varepsilon^{12}}{6\,370\,469\,900\,619}\Big)\cos 18t+$$
$$+\Big(-\frac{2\varepsilon^4}{611\,758\,731\,041\,483}+\frac{13\varepsilon^5}{35\,816\,420\,180\,152}-\frac{118\varepsilon^6}{14\,072\,258\,551\,617}+$$
$$+\frac{245\varepsilon^7}{5\,690\,902\,627\,163}+\frac{331\varepsilon^8}{33\,333\,680\,364\,293}-\frac{260\varepsilon^9}{6\,118\,334\,632\,281}-\frac{62\varepsilon^{10}}{7\,728\,490\,874\,887}+$$
$$+\frac{839\varepsilon^{11}}{32\,765\,538\,066\,222}+\frac{125\varepsilon^{12}}{83\,582\,789\,357\,933}\Big)\cos 24t+$$
$$+\Big(\frac{3\varepsilon}{16\,384}+\frac{12\,509\,262\varepsilon^2}{1\,362\,573\,013}+\frac{1\,387\,399\varepsilon^3}{3\,881\,759\,553}-\frac{196\,174\varepsilon^4}{100\,293\,733}-\frac{1\,690\,238\varepsilon^5}{9\,991\,660\,785}+$$
$$+\frac{611\,473\varepsilon^6}{1\,113\,103\,929}+\frac{635\,587\varepsilon^7}{8\,638\,061\,061}-\frac{466\,361\varepsilon^8}{2\,643\,150\,508}-\frac{349\,633\varepsilon^9}{11\,608\,756\,257}+\frac{256\,449\varepsilon^{10}}{4\,736\,261\,009}+$$
$$+\frac{1\,698\,121\varepsilon^{11}}{155\,326\,011\,168}-\frac{160\,025\varepsilon^{12}}{17\,291\,233\,206}\Big)\sin 3t+$$
$$+\Big(-\frac{\varepsilon}{163\,840}+\frac{51\,861\varepsilon^2}{734\,003\,200}+\frac{19\,385\varepsilon^3}{5\,339\,097\,201}-\frac{629\,072\varepsilon^4}{25\,366\,091\,731}-\frac{91\,811\varepsilon^5}{38\,232\,052\,053}+$$
$$+\frac{330\,331\varepsilon^6}{38\,189\,340\,598}+\frac{64\,794\varepsilon^7}{51\,952\,439\,533}-\frac{195\,691\varepsilon^8}{64\,218\,924\,254}-\frac{88\,226\varepsilon^9}{160\,753\,269\,669}+$$
$$+\frac{67\,539\varepsilon^{10}}{68\,206\,390\,907}+\frac{28\,947\varepsilon^{11}}{133\,305\,410\,323}-\frac{139\,457\varepsilon^{12}}{561\,257\,098\,033}\Big)\sin 9t+$$
$$+\Big(-\frac{697\,234\varepsilon^2}{2\,183\,560\,478\,501\,547}+\frac{4\,738\varepsilon^3}{183\,175\,522\,561}-\frac{21\,032\varepsilon^4}{118\,919\,923\,387}-\frac{3\,390\varepsilon^5}{161\,284\,293\,841}+$$
$$+\frac{165\,544\varepsilon^6}{1\,494\,855\,432\,759}+\frac{22\,417\varepsilon^7}{1\,446\,003\,247\,062}-\frac{14\,273\varepsilon^8}{272\,151\,915\,005}-\frac{4\,933\varepsilon^9}{573\,167\,724\,489}+$$

$$+\frac{10\ 007\varepsilon^{10}}{491\ 352\ 096\ 203}+\frac{1\ 988\varepsilon^{11}}{499\ 135\ 807\ 637}-\frac{2\ 829\varepsilon^{12}}{563\ 542\ 031\ 285})\sin 15t+$$
$$+(-\frac{5\varepsilon^{3}}{304\ 103\ 431\ 532\ 873}+\frac{65\varepsilon^{4}}{16\ 172\ 989\ 160\ 532}-\frac{683\varepsilon^{5}}{5\ 790\ 526\ 330\ 221}+$$
$$+\frac{1\ 531\varepsilon^{6}}{2\ 335\ 341\ 147\ 572}+\frac{1\ 039\varepsilon^{7}}{8\ 154\ 642\ 572\ 644}-\frac{1\ 621\varepsilon^{8}}{2\ 793\ 653\ 909\ 449}-\frac{692\varepsilon^{9}}{6\ 956\ 874\ 421\ 741}+$$
$$+\frac{1\ 593\varepsilon^{10}}{4\ 950\ 748\ 058\ 525}+\frac{5\ 662\varepsilon^{11}}{95\ 435\ 088\ 374\ 465}-\frac{777\varepsilon^{12}}{13\ 396\ 309\ 647\ 727})\sin 21t+$$
$$+(-\frac{\varepsilon^{4}}{1\ 183\ 850\ 637\ 341\ 874\ 493}+\frac{\varepsilon^{5}}{2\ 247\ 403\ 313\ 397\ 831}-\frac{13\varepsilon^{6}}{410\ 338\ 842\ 283\ 171}+$$
$$+\frac{85\varepsilon^{7}}{139\ 667\ 905\ 050\ 988}-\frac{149\varepsilon^{8}}{51\ 263\ 623\ 956\ 584}-\frac{51\varepsilon^{9}}{65\ 502\ 024\ 543\ 812}+$$
$$+\frac{152\varepsilon^{10}}{47\ 827\ 543\ 109\ 483}+\frac{59\varepsilon^{11}}{89\ 114\ 898\ 135\ 688}-\frac{59\varepsilon^{12}}{184\ 849\ 053\ 881\ 123})\sin 27t+$$
$$-\frac{9\varepsilon}{128}-\frac{6\ 507\varepsilon^{2}}{4\ 587\ 520}+\frac{10\ 018\ 871\varepsilon^{3}}{979\ 613\ 962}+\frac{610\ 278\varepsilon^{4}}{1\ 197\ 656\ 837}-\frac{7\ 792\ 046\varepsilon^{5}}{3\ 060\ 481\ 411}-\frac{1\ 272\ 239\varepsilon^{6}}{5\ 929\ 009\ 920}+$$
$$+\frac{1\ 476\ 894\varepsilon^{7}}{1\ 923\ 305\ 807}+\frac{281\ 539\varepsilon^{8}}{3\ 126\ 152\ 577}-\frac{2\ 202\ 103\varepsilon^{9}}{9\ 138\ 301\ 574}-\frac{512\ 084\varepsilon^{10}}{15\ 528\ 783\ 017}+\frac{1\ 948\ 126\varepsilon^{11}}{26\ 038\ 879\ 301}+$$
$$+\frac{354\ 464\varepsilon^{12}}{15\ 403\ 589\ 713}.$$

Для упрощения последующих разложений зафиксируем $\varepsilon=0,1$ и положим

$$\varphi_3(t)=[1\ \ \cos 6t\ \ \cos 12t\ \ \dots\ \ \sin 33t\ ].$$

При этом

$$\xi_3(t,\varepsilon)\approx-\frac{1}{25\ 504\ 700\ 030\ 469}-\frac{\cos 6t}{1\ 579\ 122\ 664\ 989\ 987}+\frac{\cos 12t}{3\ 685\ 874\ 060\ 253\ 361}+$$
$$+\frac{\cos 18t}{479\ 644\ 644\ 257\ 400\ 029}+\frac{\cos 24t}{273\ 236\ 913\ 887\ 627\ 167\ 515}+$$
$$+\frac{\cos 30t}{42\ 053\ 620\ 607\ 720\ 896\ 389\ 082}-\frac{\sin 3t}{4\ 167\ 087\ 813\ 053\ 876}+$$
$$+\frac{\sin 9t}{14\ 602\ 091\ 538\ 097\ 863}-\frac{\sin 15t}{172\ 887\ 410\ 412\ 258\ 566}-$$
$$-\frac{\sin 21t}{189\ 942\ 139\ 757\ 802\ 561\ 868}+\frac{\sin 27t}{20\ 671\ 782\ 970\ 514\ 835\ 057\ 632}-$$
$$-\frac{\sin 33t}{7\ 034\ 650\ 810\ 950\ 400\ 208\ 820\ 163}.$$

Таким образом

$$x_3(t,\varepsilon)\approx-\frac{1\ 129\ 017}{160\ 481\ 576}-\frac{1\ 264\ 183\cos 6t}{6\ 294\ 116\ 610}-\frac{74\ 773\cos 12t}{99\ 463\ 036\ 102\ 951}+$$
$$+\frac{27\cos 18t}{1\ 070\ 162\ 744\ 051\ 792}-\frac{\cos 24t}{1\ 393\ 610\ 598\ 505\ 920\ 961}+$$

$$+\frac{\cos 30t}{42\ 053\ 620\ 607\ 720\ 896\ 389\ 082}+\frac{1\ 070\ 609\sin 3t}{9\ 708\ 326\ 172}+\frac{29\ 527\sin 9t}{303\ 357\ 474\ 581}+$$
$$+\frac{155\sin 15t}{31\ 706\ 983\ 851\ 157}-\frac{\sin 21t}{7\ 598\ 523\ 748\ 375\ 768}+\frac{\sin 27t}{245\ 745\ 030\ 873\ 538\ 384\ 256}-$$
$$-\frac{\sin 33t}{7\ 034\ 650\ 810\ 950\ 400\ 208\ 820\ 163}.$$

Для оценки точности найденных приближений к периодическому решению уравнения типа Дюффинга (5) определим невязки нулевого и первых трех приближений $(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

$$\Delta_i(\varepsilon):=||y_i''(t,\varepsilon)+y_i(t,\varepsilon)-\sin 3t-\varepsilon\cdot(y_i^3(t,\varepsilon)+y_i''(t,\varepsilon)\cdot y_i(t,\varepsilon))||_{C[0;2\pi]}.$$

В частности, при $\varepsilon=0,1$ имеем

$$\Delta_0(0,1)\approx 0,0142\ 578\ ,\ \Delta_1(0,1)\approx 5,27\ 462\cdot 10^{-6},$$
$$\Delta_2(0,1)\approx 1,11\ 501\cdot 10^{-13},\ \Delta_3(0,1)\approx 7,16\ 689\cdot 10^{-18}.$$

Уравнение типа Дюффинга (5)

$$(1-\varepsilon y)y''+y=\sin 3t+\varepsilon y^3$$

может быть разрешено относительно производной при условии $1-\varepsilon y\neq 0$; это условие выполняется для найденных нами первых приближений, например, при $\varepsilon=0,1$

$$0,988\ 194\le 1-\varepsilon\cdot y_1(t,\varepsilon)\le 1,01\ 317;\ 0,988\ 194\le 1-\varepsilon\cdot y_2(t,\varepsilon)\le 1,01\ 317;$$
$$0,988\ 194\le 1-\varepsilon\cdot y_3(t,\varepsilon)\le 1,01\ 317.$$

при этом уравнение типа Дюффинга (5) является невырожденным.

Список цитируемых источников

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. — М: Наука, 1965. — 408 с.
2. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М: Наука, 1979. — 432 с.
3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М: Наука, 1977. — 744 с.
4. *Кравчук М.* Вибрані математичні праці. — К.: Нью-Йорк, 2002. — 792 с.
5. *Крылов Н.М.* Избранные труды. Том 1. — К: Изд. Академии наук УССР, 1961. — 268 с.
6. *Курпель Н.С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. — К.: Наук. думка, 1968. — 244 с.
7. *Лучка А.Ю.* Проекционно-итеративные методы. — К.: Наук. думка, 1993. — 288 с.
8. *Лыкова О.Б., Бойчук А.А.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журнал. — 1988. — Т. 40, № 1. — С. 62 — 69.

9. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. — К.: Вища школа, 2000. — 296 с.
10. *Чуйко А.С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания. — 2005. — Т. 8, № 2. — С. 278–288.
11. *Чуйко С.М.* О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. — 2008. — Т. 11, № 4. — С. 554–573.
12. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; VSP, 2004. — XIV + 317 pp.

Получена 30.04.2012