Динамические системы, вып. 28 (2010), 133–140

УДК 517.9

О приближенном решении периодических краевых задач с запаздыванием методом наименьших квадратов[1]

С. М. Чуйко, Ан. С. Чуйко

Славянский государственный педагогический университет
Славянск, 84112. *E-mail: chujko-slav@inbox.ru*

Аннотация. Для построения приближений к решению слабонелинейной периодической краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием предложена гибридная итерационная техника, сочетающая достоинства метода простых итераций и метода наименьших квадратов. Эффективность предложенной техники продемонстрирована на примере анализа периодической задачи для уравнения типа Дюффинга с запаздыванием.

Ключевые слова: периодическая краевая задача с запаздыванием, метод наименьших квадратов, матрица Грама, итерационная схема.

1. Постановка задачи

Исследована задача о построении приближений к T-периодическому решению $z(t,\varepsilon): \ z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,T], \ z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ системы дифференциальных уравнений с запаздыванием [5, 6, 10]

$$dz(t,\varepsilon)/dt = A(t)z(t,\varepsilon) + B(t)z(t-\Delta,\varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z(t,\varepsilon), z(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon). \quad (1)$$

Решения периодической задачи для уравнения (1) ищем в малой окрестности T-периодического решения $z_0(t) \in C^1[0,T]$ порождающей задачи

$$dz_0/dt = A(t)z_0(t) + B(t)z_0(t-\Delta) + f(t), \ \Delta \in \mathbb{R}^1. \quad (2)$$

Здесь $A(t), \ B(t)$ — непрерывные T-периодические $(n\times n)$-мерные матрицы, $f(t)$ — непрерывная T-периодическая вектор-функция, $Z(z(t,\varepsilon), z(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестным $z(t,\varepsilon)$ и $z(t-\Delta,\varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи, непрерывная и T-периодическая по t, а также непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Как известно, в некритическом случае [4, с. 30], а именно — при отсутствии T-периодических решений однородной части

$$dz_0(t)/dt = A(t)z_0(t) + B(t)z_0(t-\Delta) \quad (3)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Германии (DFG; номер регистрации GZ:436UKR 13/103/0-1) и Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0109U000381)

системы (2), а в случае постоянных матриц $A(t) \equiv A$ и $B(t) \equiv B$, — при отсутствии чисто мнимых корней $\lambda_j = \pm ik_jT,\ j \in \mathbb{Z}$ характеристического уравнения [4, с. 24]

$$\det[A + Be^{-\lambda\Delta} - \lambda I_n] = 0,$$

порождающая периодическая задача для уравнения (2) имеет единственное решение. Периодическая задача для уравнения (1) при этом однозначно разрешима в достаточно малой окрестности решения порождающей задачи. Для построения приближения к T-периодическому решению уравнения (1) традиционно используется метод простых итераций [2, 10], а в случае аналитичности нелинейной вектор-функции $Z(z(t,\varepsilon), z(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon)$ — метод малого параметра Ляпунова–Пуанкаре [6]. Целью данной статьи является построение приближения к T-периодическому решению уравнения (1) в малой окрестности решения порождающей задачи с использованием метода наименьших квадратов [9].

2. Итерационная процедура

Пусть $\varphi^{(1)}(t),\ \varphi^{(2)}(t),\ \ldots\ ,\ \varphi^{(k)}(t),\ \ldots$ — система линейно независимых непрерывно дифференцируемых T-периодических n-мерных вектор-функций и $z_0(t)$ — решение порождающей T-периодической задачи для уравнения (2). Искомое решение $z(t,\varepsilon) = z_0(t) + x(t,\varepsilon)$ задачи (1) ищем в малой окрестности порождающего решения $z_0(t)$. Для нахождения возмущения $x(t,\varepsilon)$ используем T-периодическую задачу для уравнения

$$dx(t,\varepsilon)/dt = A(t)x(t,\varepsilon)+B(t)x(t-\Delta,\varepsilon)+\varepsilon Z(z_0(t)+x(t,\varepsilon), z_0(t-\Delta)+x(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon). \tag{4}$$

Учитывая непрерывную дифференцируемость по первым двум аргументам вектор-функции $Z(z_0(t)+x(t,\varepsilon), z_0(t-\Delta)+x(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(t)$ и непрерывную дифференцируемость по малому параметру, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$

$$\begin{aligned} Z(z_0(t) + x(t,\varepsilon), z_0(t-\Delta) + x(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon) &= \\ = Z(z_0(t), z_0(t-\Delta), t-\Delta, t, 0) + A_1(t)x(t,\varepsilon) + A_{\Delta 1}(t)x(t-\Delta,\varepsilon) &+ \\ + \varepsilon A_2(t) + R(z_0(t) + x(t,\varepsilon), z_0(t-\Delta) + x(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon),& \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$A_1(t) = \frac{\partial Z(z_0(t), z_0(t-\Delta), t, 0)}{\partial z(t,\varepsilon)}\ ,\ A_{\Delta 1}(t) = \frac{\partial Z(z_0(t), z_0(t-\Delta), t, 0)}{\partial z(t-\Delta,\varepsilon)}\ ,$$

$$A_2(t) = \frac{\partial Z(z_0(t), z_0(t-\Delta), t, 0)}{\partial \varepsilon}\ .$$

Первое приближение $x_1(t,\varepsilon)$ к решению T-периодической задачи для уравнения (4) ищем, как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} dx_1(t,\varepsilon)/dt = A(t)x_1(t,\varepsilon) + B(t)x_1(t-\Delta,\varepsilon) + \\ + \varepsilon[Z(z_0(t), z_0(t-\Delta), t, 0) + A_1(t)x_1(t,\varepsilon) + A_{\Delta 1}(t)x_1(t-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим $(n \times k_i)$-матрицы

$$\Phi_i(t,\varepsilon) = [A(t) + \varepsilon A_1(t)]\varphi_i(t) + [B(t) + \varepsilon A_{\Delta 1}(t)]\varphi_i(t-\Delta) - \varphi_i'(t),$$
$$\varphi_i(t) = [\varphi^{(1)}(t)\ \varphi^{(2)}(t)\ \ldots\ \varphi^{(k_i)}(t)],\ i \in \mathbb{N}.$$

Приближение к решению T-периодической задачи (6) ищем в виде

$$x_1(t,\varepsilon) := \xi_1(t,\varepsilon) \approx \varphi_1(t)c_1(\varepsilon),\ c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_1}.$$

В общем случае первое приближение $\xi_1(t,\varepsilon)$ не является решением T-периодической задачи (6), поэтому потребуем

$$\begin{aligned} F(c_1(\varepsilon)) = ||[A(t) + \varepsilon A_1(t)]\xi_1(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t), z_0(t-\Delta), t, 0) - \xi_1'(t,\varepsilon) + \\ + [B(t) + \varepsilon A_{\Delta 1}(t)]\xi_1(t-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_2(t)||_{L^2[0,T]} \to \min \end{aligned}$$

при фиксированной матрице $\varphi_1(t)$. Необходимое условие минимума функции $F(c_1(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma(\varphi_1(\cdot),\varepsilon) \cdot c_1(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot \int_0^T \Phi_1^*(t,\varepsilon)\{Z(z_0(t), z_0(t-\Delta), t, 0) + A_2(t)\}dt,$$

однозначно разрешимому относительно вектора

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot [\Gamma(\varphi_1(\cdot),\varepsilon)]^{-1} \cdot \int_0^T \Phi_1^*(t,\varepsilon)\{Z(z_0(t), z_0(t-\Delta), t, 0) + \varepsilon A_2(t)\}dt$$

при условии невырожденности $(k_1 \times k_1)$-матрицы Грама [1]

$$\Gamma(\varphi_1(\cdot),\varepsilon) = \int_0^T \Phi_1^*(t,\varepsilon) \cdot \Phi_1(t,\varepsilon)\ dt.$$

Второе приближение $x_2(t,\varepsilon)$ к решению T-периодической задачи для уравнения (4) ищем, как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} dx_2(t,\varepsilon)/dt = A(t)x_2(t,\varepsilon) + B(t)x_2(t-\Delta,\varepsilon) + \\ + \varepsilon[Z(z_0(t), z_0(t-\Delta), t, 0) + A_1(t)x_2(t,\varepsilon) + A_{\Delta 1}(t)x_2(t-\Delta,\varepsilon) + \\ + \varepsilon A_2(t) + R(z_0(t) + x_1(t,\varepsilon), z_0(t-\Delta) + x_1(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Приближение к решению T-периодической задачи (7) ищем в виде

$$x_2(t,\varepsilon) := \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon),\ \xi_2(t,\varepsilon) \approx \varphi_2(t)c_2(\varepsilon),\ c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_2}.$$

При условии невырожденности $(k_2 \times k_2)$-матрицы Грама

$$\Gamma(\varphi_2(\cdot), \varepsilon) = \int_0^T \Phi_2^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_2(t, \varepsilon)\, dt$$

находим вектор

$$c_2(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot [\Gamma(\varphi_2(\cdot), \varepsilon)]^{-1} \times \\ \times \int_0^T \Phi_2^*(t, \varepsilon)\{R(z_0(t) + x_1(t, \varepsilon), z_0(t - \Delta) + x_1(t - \Delta, \varepsilon), t, \varepsilon)\}dt,$$

определяющий второе приближение к решению T-периодической задачи (4). Продолжая рассуждения, предположим, что найдено приближение $x_{j+1}(t, \varepsilon)$ к решению T-периодической задачи для уравнения (4). Следующее приближение ищем как решение краевой задачи

$$dx_{j+2}(t, \varepsilon)/dt = A(t)x_{j+2}(t, \varepsilon) + B(t)x_{j+2}(t - \Delta, \varepsilon) + \\ + \varepsilon[Z(z_0(t), z_0(t - \Delta), t, 0) + A_1(t)x_{j+2}(t, \varepsilon) + A_{\Delta 1}(t)x_{j+2}(t - \Delta, \varepsilon) + \\ + \varepsilon A_2(t) + R(z_0(t) + x_{j+1}(t, \varepsilon), z_0(t - \Delta) + x_{j+1}(t - \Delta, \varepsilon), t, \varepsilon)]. \quad (8)$$

Приближение к решению T-периодической задачи (8) ищем в виде

$$x_{j+2}(t, \varepsilon) := \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon) + \ \ldots\ + \xi_{j+2}(t, \varepsilon), \\ \xi_{j+2}(t, \varepsilon) \approx \varphi_{j+2}(t)c_{j+2}(\varepsilon),\ c_{j+2}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_{j+2}}.$$

При условии невырожденности $(k_{j+2} \times k_{j+2})$-матрицы Грама

$$\Gamma(\varphi_{j+2}(\cdot), \varepsilon) = \int_0^T \Phi_{j+2}^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_{j+2}(t, \varepsilon)\, dt$$

находим вектор

$$c_{j+2}(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot [\Gamma(\varphi_{j+2}(\cdot), \varepsilon)]^{-1} \times \\ \times \int_0^T \Phi_{j+2}^*(t, \varepsilon)\{R(z_0(t) + x_{j+1}(t, \varepsilon), z_0(t - \Delta) + x_{j+1}(t - \Delta, \varepsilon), t, \varepsilon) - \\ - R(z_0(t) + x_j(t, \varepsilon), z_0(t - \Delta) + x_j(t - \Delta, \varepsilon), t, \varepsilon)\}dt,$$

определяющий $(j+2)$-приближение к решению T-периодической задачи (4). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *В некритическом случае однородная часть* (3) *порождающей T-периодической задачи* (2) *для уравнения* (1) *не имеет решений, отличных от тривиального, при этом порождающая T-периодическая задача* (2) *имеет единственное T-периодическое решение $z_0(t)$. В этом случае T-периодическая задача для* *уравнения* (1) *однозначно разрешима в малой окрестности решения порождающей задачи. Для построения приближения к T-периодическому решению уравнения* (1) *при условии*

$$\det[\Gamma(\varphi_j(\cdot),\varepsilon)] \neq 0,\ \ j \in \mathbb{N}$$

применима итерационная схема

$$x_1(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) \approx \varphi_1(t)c_1(\varepsilon),$$

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot [\Gamma(\varphi_1(\cdot),\varepsilon)]^{-1} \cdot \int_0^T \Phi_1^*(t,\varepsilon)\{Z(z_0(t), z_0(t-\Delta), t, 0) + \varepsilon A_2(t)\}dt;$$

$$x_2(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon),\ \ \xi_2(t,\varepsilon) \approx \varphi_2(t)c_2(\varepsilon),\ \ c_2(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot [\Gamma(\varphi_2(\cdot),\varepsilon)]^{-1} \times$$

$$\times \int_0^T \Phi_2^*(t,\varepsilon)\{R(z_0(t) + x_1(t,\varepsilon), z_0(t-\Delta) + x_1(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon)\}dt;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{j+2}(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \ \ldots\ + \xi_{j+2}(t,\varepsilon),$$

$$\xi_{j+2}(t,\varepsilon) \approx \varphi_{j+2}(t)c_{j+2}(\varepsilon),$$

$$c_{j+2}(\varepsilon) = -\varepsilon \cdot [\Gamma(\varphi_{j+2}(\cdot),\varepsilon)]^{-1} \times$$

$$\times \int_0^T \Phi_{j+2}^*(t,\varepsilon)\{R(z_0(t) + x_{j+1}(t,\varepsilon), z_0(t-\Delta) + x_{j+1}(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon) -$$

$$- R(z_0(t) + x_j(t,\varepsilon), z_0(t-\Delta) + x_j(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon)\}dt,\ \ldots\ ,$$

$$z_j(t,\varepsilon) = z_0(t) + x_j(t,\varepsilon),\ \ j = 1, 2\ \ldots\ . \tag{9}$$

Найти оценку ε_* длины отрезка $[0, \varepsilon^*]$, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры (9) можно аналогично [8].

Пример. Схема (9) применима для построения 2π-периодического решения уравнения [6, с. 35], [4, с. 42]

$$y'(t,\varepsilon) - y(t - \frac{\pi}{2}, \varepsilon) = \sin t + \varepsilon \cdot y^3(t,\varepsilon). \tag{10}$$

Порождающая система для уравнения (10) определяет характеристическое уравнение $\rho - e^{-\frac{\pi\rho}{2}} = 0$, которое не имеет чисто мнимых решений, поэтому 2π-периодическая задача для уравнения (10) представляет некритический случай. Порождающее уравнение при этом имеет единственное 2π-периодическое решение

$$y_0(t) = -\frac{\cos t}{2}.$$

На первом шагу итерационной схемы (9) положим

$$\varphi_1(t) = [\sin t\ \ \sin 3t\ \ \sin 5t\ \ \cos t\ \ \cos 3t\ \ \cos 5t],$$

при этом

$$\det[\Gamma(\varphi_1(\cdot),\varepsilon)] = 331\ 776\cdot\pi^6 + 59\ 616\cdot\pi^6\varepsilon^2 + \frac{105\ 381}{32}\cdot\pi^6\varepsilon^4 + \frac{229\ 635}{4\ 096}\cdot\pi^6\varepsilon^6 + \\ + \frac{24\ 019\ 821}{67\ 108\ 864}\cdot\pi^6\varepsilon^8 + \frac{6\ 790\ 635}{8\ 589\ 934\ 592}\cdot\pi^6\varepsilon^{10} + \frac{11\ 160\ 261}{17\ 592\ 186\ 044\ 416}\cdot\pi^6\varepsilon^{12} \neq 0.$$

Схема (9) определяет первое приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения (10)

$$y_1(t,\varepsilon) = -\frac{\cos t}{2} - \left(-\frac{3\varepsilon^2}{512} + \frac{423\varepsilon^4}{1\ 048\ 576} - \frac{8\ 325\varepsilon^6}{268\ 435\ 456}\right)\cos t - \\ -\left(-\frac{15\varepsilon^2}{2\ 048} + \frac{321\varepsilon^4}{524\ 288} - \frac{25\ 887\varepsilon^6}{536\ 870\ 912}\right)\cos 3t - \left(-\frac{\varepsilon^2}{2\ 048} + \frac{41\varepsilon^4}{524\ 288} - \frac{3\ 529\varepsilon^6}{536\ 870\ 912}\right)\cos 5t - \\ -\left(\frac{3\varepsilon}{64} - \frac{153\varepsilon^3}{65\ 536} + \frac{5\ 733\varepsilon^5}{33\ 554\ 432} - \frac{455\ 103\varepsilon^7}{34\ 359\ 738\ 368}\right)\sin t - \left(\frac{\varepsilon}{64} - \frac{129\varepsilon^3}{65536} + \frac{10725\varepsilon^5}{67108864} - \\ - \frac{53913\varepsilon^7}{4294967296}\right)\sin 3t - \left(-\frac{17\varepsilon^3}{65\ 536} + \frac{1\ 627\varepsilon^5}{67\ 108\ 864} - \frac{16\ 645\varepsilon^7}{8\ 589\ 934\ 592}\right)\sin 5t.$$

На втором шагу итерационной схемы (9) положим

$$\varphi_2(t) = [\sin t\ \ \sin 3t\ \ \sin 5t\ \ \sin 7t\ \ \sin 9t\ \ \cos t\ \ \cos 3t\ \ \cos 5t\ \ \cos 7t\ \ \cos 9t],$$

при этом матрица Грама $\Gamma(\varphi_2(\cdot),\varepsilon)$ невырождена. Второе приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения (10) имеет вид

$$y_2(t,\varepsilon) = -\frac{\cos t}{2} + \left(\frac{3\varepsilon^2}{512} - \frac{357\varepsilon^4}{1\ 048\ 576} + \frac{1\ 301\varepsilon^6}{40\ 674\ 881} - \frac{35\varepsilon^8}{26\ 942\ 956} + \frac{4\varepsilon^{10}}{14\ 855\ 963}\right)\cos t + \\ + \left(\frac{15\varepsilon^2}{2\ 048} - \frac{405\varepsilon^4}{524\ 288} + \frac{4\ 085\varepsilon^6}{47\ 205\ 697} - \frac{131\varepsilon^8}{21\ 157\ 870} + \frac{15\varepsilon^{10}}{19\ 437\ 977}\right)\cos 3t + \\ + \left(\frac{\varepsilon^2}{2\ 048} - \frac{89\varepsilon^4}{524\ 288} + \frac{1\ 075\varepsilon^6}{43\ 002\ 476} - \frac{79\varepsilon^8}{31\ 080\ 657} + \frac{3\varepsilon^{10}}{11\ 164\ 937}\right)\cos 5t + \\ + \left(-\frac{69\varepsilon^4}{2\ 097\ 152} + \frac{247\varepsilon^6}{28\ 816\ 984} - \frac{33\varepsilon^8}{27\ 414\ 967} + \frac{5\varepsilon^{10}}{35\ 865\ 032}\right)\cos 7t + \\ + \left(-\frac{\varepsilon^4}{1\ 048\ 576} + \frac{31\varepsilon^6}{35\ 120\ 702} - \frac{2\varepsilon^8}{10\ 753\ 007} + \frac{\varepsilon^{10}}{38\ 805\ 361}\right)\cos 9t + \\ + \left(-\frac{3\varepsilon}{64} + \frac{51\varepsilon^3}{32\ 768} - \frac{3\ 639\varepsilon^5}{33\ 554\ 432} + \frac{62\varepsilon^7}{5\ 046\ 451} - \frac{14\varepsilon^9}{25\ 300\ 007}\right)\sin t + \\ + \left(-\frac{\varepsilon}{64} + \frac{39\varepsilon^3}{16\ 384} - \frac{8751\varepsilon^5}{33\ 554\ 432} + \frac{913\varepsilon^7}{30\ 701\ 201} - \frac{65\varepsilon^9}{27\ 272\ 039}\right)\sin 3t + \\ + \left(\frac{3\varepsilon^3}{8\ 192} - \frac{3\ 307\varepsilon^5}{49\ 615\ 250} + \frac{153\varepsilon^7}{17\ 386\ 007} - \frac{23\varepsilon^9}{26\ 265\ 411}\right)\sin 5t + \\ + \left(\frac{\varepsilon^3}{32\ 768} - \frac{893\varepsilon^5}{47\ 002\ 522} + \frac{71\varepsilon^7}{20\ 592\ 450} - \frac{3\varepsilon^9}{6\ 883\ 789}\right)\sin 7t + \\ + \left(-\frac{20\varepsilon^5}{15\ 114\ 609} + \frac{21\varepsilon^7}{48\ 231\ 157} - \frac{\varepsilon^9}{13\ 800\ 718}\right)\sin 9t.$$

На третьем шагу итерационной схемы (9) положим

$$\varphi_3(t) = [\sin t \ \ \sin 3t \ \ \sin 5t \ \ \sin 7t \ \ \sin 9t \ \ \cos t \ \ \cos 3t \ \ \cos 5t \ \ \cos 7t \ \ \cos 9t],$$

при этом матрица Грама $\Gamma(\varphi_3(\cdot), \varepsilon)$ невырождена. Третье приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения (10) имеет вид

$$y_3(t,\varepsilon) = -\frac{\cos t}{2} + (\frac{3\varepsilon^2}{512} - \frac{357\varepsilon^4}{1\,048\,576} + \frac{566\varepsilon^6}{19\,330\,085} -$$
$$- \frac{13\varepsilon^8}{26\,964\,053} - \frac{\varepsilon^9}{3\,539\,459\,599} + \frac{5\varepsilon^{10}}{33\,548\,339}) \cos t +$$
$$+ (\frac{15\varepsilon^2}{2\,048} - \frac{405\varepsilon^4}{524\,288} + \frac{1\,782\varepsilon^6}{22\,212\,947} - \frac{\varepsilon^7}{838\,898\,778} - \frac{749\varepsilon^8}{146\,366\,251} +$$
$$+ \frac{\varepsilon^{10}}{1\,405\,862\,474} + \frac{17\varepsilon^{10}}{23\,395\,353}) \cos 3t +$$
$$+ (\frac{\varepsilon^2}{2\,048} - \frac{89\varepsilon^4}{524\,288} + \frac{678\varepsilon^6}{26\,501\,045} - \frac{\varepsilon^7}{625\,476\,193} - \frac{49\varepsilon^8}{16\,646\,918} +$$
$$+ \frac{\varepsilon^9}{1\,117\,487\,637} + \frac{10\varepsilon^{10}}{25\,341\,281}) \cos 5t +$$
$$+ (-\frac{69\varepsilon^4}{2\,097\,152} + \frac{287\varepsilon^6}{27\,715\,389} - \frac{\varepsilon^7}{37\,756\,066\,612} - \frac{54\varepsilon^8}{28\,733\,651} +$$
$$+ \frac{\varepsilon^9}{38\,260\,010\,869} + \frac{6\varepsilon^{10}}{20\,270\,741}) \cos 7t +$$
$$+ (-\frac{\varepsilon^4}{1\,048\,576} + \frac{\varepsilon^5}{11\,612\,571} + \frac{41\varepsilon^6}{32\,808\,293} - \frac{\varepsilon^7}{89\,336\,825} - \frac{11\varepsilon^8}{28\,515\,798} +$$
$$+ \frac{\varepsilon^9}{579\,507\,446} + \frac{2\varepsilon^{10}}{26\,000\,625}) \cos 9t +$$
$$+ (-\frac{3\varepsilon}{64} + \frac{51\varepsilon^3}{32\,768} - \frac{3\,443\varepsilon^5}{30\,203\,375} + \frac{124\varepsilon^7}{11\,986\,769} -$$
$$- \frac{\varepsilon^8}{537\,302\,671} + \frac{\varepsilon^9}{59\,467\,435} + \frac{\varepsilon^{10}}{950\,794\,360}) \sin t +$$
$$+ (-\frac{\varepsilon}{64} + \frac{39\varepsilon^3}{16\,384} - \frac{8\,205\varepsilon^5}{33\,554\,432} + \frac{2\varepsilon^6}{27\,508\,441} + \frac{1\,399\varepsilon^7}{53\,570\,990} -$$
$$- \frac{\varepsilon^8}{23\,977\,531} - \frac{74\varepsilon^9}{35\,784\,843} + \frac{\varepsilon^{10}}{81\,501\,446}) \sin 3t +$$
$$+ (\frac{3\varepsilon^3}{8\,192} - \frac{3\,968\varepsilon^5}{58\,155\,489} + \frac{\varepsilon^6}{157\,293\,520} + \frac{1\,569\varepsilon^7}{165\,244\,099} + \frac{\varepsilon^8}{317\,851\,258} -$$
$$- \frac{17\varepsilon^9}{15\,101\,188} - \frac{\varepsilon^{10}}{1\,503\,378\,696}) \sin 5t +$$
$$+ (\frac{\varepsilon^3}{32\,768} - \frac{356\varepsilon^5}{17\,249\,815} - \frac{\varepsilon^6}{57\,569\,771} + \frac{109\varepsilon^7}{23\,499\,567} + \frac{\varepsilon^8}{401\,599\,645} -$$
$$- \frac{36\varepsilon^9}{46\,640\,447} - \frac{\varepsilon^{10}}{10\,949\,659\,977}) \sin 7t +$$

$$+\left(-\frac{20\varepsilon^5}{13\ 109\ 813}+\frac{\varepsilon^6}{297\ 003\ 010}+\frac{34\varepsilon^7}{45\ 053\ 157}-\frac{\varepsilon^8}{784\ 466\ 174}-\right.$$
$$\left.-\frac{5\varepsilon^9}{27\ 942\ 823}+\frac{\varepsilon^{10}}{4\ 112\ 610\ 026}\right)\sin 9t.$$

Для проверки точности найденных приближений к периодическому решению уравнения (10) найдем невязки этих приближений

$$\delta_j(\varepsilon) := ||y_j'(t,\varepsilon) - y_j(t-\frac{\pi}{2},\varepsilon) - \sin t - \varepsilon\cdot y_j^3(t,\varepsilon)||_{C[0;2\pi]},\ j=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Положим $\varepsilon = 0,1$, при этом

$$\delta_0(0,1) = 0,0125,\ \delta_1(0,1) \approx 2,21\ 608\cdot 10^{-6},$$
$$\delta_2(0,1) \approx 7,10\ 975\cdot 10^{-10},\ \delta_3(0,1) \approx 3,01\ 178\cdot 10^{-10}.$$

Для построения 2π-периодического решения уравнения в монографиях [6, с. 35], [4, с. 42] использован метод малого параметра Ляпунова–Пуанкаре, при этом приближения $y_j(t,\varepsilon)$, полученные при помощи итерационной схемы (9) значительно превосходят по точности соответствующие приближения $\widetilde{y}_j(t,\varepsilon)$ к точному решению $\widetilde{y}(t,\varepsilon)$, полученные с использованием метода малого параметра Ляпунова–Пуанкаре.

Список цитируемых источников

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации.— М. Наука., 1965. — 408 с.
2. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Периодические решения нелинейных автономных систем с запаздыванием в критических случаях // Докл. АН Украины. 1991 № 9. С. 9–13.
3. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И.Г. Малкин — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
4. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.* Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием. — К.: Изд-во Киев. ун-та, 1969. — 309 с.
5. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием. — М.: Гостехиздат, 1951. — 256 с.
6. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. — М.: Наука, 1969. — 287 с.
7. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М. Мир., 1984. — 424 с.
8. *Чуйко А.С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, №2. — С. 278–288.
9. *Чуйко С.М.* О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, №4. — С. 554–573.
10. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.— Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.

Получена 20.06.2010