Динамические системы, том 3(31), No. 1-2, 159–167

УДК 531.36+517.977

Задача планирования движения для класса нелинейных систем с тригонометрическими функциями управления

Т. Н. Астахова, А. Л. Зуев

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Донецк 83114. *E-mail: ctn_ af@mail.ru*, *al_ zv@mail.ru*

Аннотация. Расмотрена двухточечная задача управления для нелинейных систем с ненулевыми краевыми условиями. Предложен локальный подход к решению этой задачи в классе тригонометрических функций управления. Полученный результат применен для класса управляемых нильпотентных систем.

Ключевые слова: управляемость, скобки Ли, ряд Вольтерра, нильпотентные системы.

Введение

В теории управления актуальной проблемой является поиск новых методов синтеза функций управления неголономными системами. Известно [6], что двухточечная задача управления может быть эффективно решена для систем простой алгебраической структуры (нильпотентных систем). В соответствии с подходом статьи [6], для систем общего вида приближенное решение задачи управления может быть реализовано в виде итерационной процедуры, которая предполагает построение нильпотентных аппроксимаций исходной системы.

Понятие нильпотентной аппроксимации было введено А. А. Аграчевым, А. В. Сарычевым [1] и H. Hermes [5].

Задачи оптимального управления и планирования движения нелинейных систем с использованием тригонометрических функций управления рассматривалась в работах [2, 3, 4, 7, 9]. В данной статье такой подход распространяется на случай систем с ненулевыми граничными условиями и функциями управления с ненулевым средним.

1. Приближенное решение двухточечной задачи управления

Рассмотрим линейную по управлению систему

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x),\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n,\ u = (u_1, u_2, ..., u_m)^T \in \mathbb{R}^m,\ m < n, \qquad (1.1)$$

где x – вектор состояния, u – вектор управления. Будем предполагать, что векторные поля $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ являются гладкими отображениями из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, и что для системы (1.1) выполнено ранговое условие

$$\operatorname{rank}\{f_i(x), [f_j, f_k](x) \mid i = \overline{1, m},\ (j, k) \in S\} = n,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad (1.2)$$

для некоторого множества индексов

$$S \subseteq \{1, 2, ..., m\}^2, \qquad |S| = n - m.$$

Здесь $[f_j, f_k](x)$ — скобка Ли векторных полей $f_j(x)$ и $f_k(x)$.

Далее рассмотрим двухточечную задачу управления следующего вида: для заданных $x^0,\ x^1 \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$, требуется найти функцию управления $u(t) \in L^\infty(0, \tau)$, при которой система (1.1) имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее краевым условиям $x(0) = x^0$, $x(\tau) = x^1$.

Поскольку из условия (1.2) следует управляемость системы (1.1) [8], то поставленная задача разрешима при любых $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$. Однако вопрос о конструктивном методе построения функций управления требует дальнейшего исследования.

Для представления решений $x(t)$ системы (1.1) с начальными условиями $x(0) = x^0$ и управлением $u \in L^\infty(0, \tau)$ воспользуемся разложением в ряд Вольтерра [8]:

$$x(\tau) = V_0 + V_1 + V_2 + ..., \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned}
&V_0 = x^0,\\
&V_1 = \sum_{i=1}^m f_i(x^0) \int_0^\tau u_i(t)dt,\\
&V_2 = \frac{1}{2} \sum_{i \le j} \left(\frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x} f_i(x^0) + \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x} f_j(x^0) \right) \int_0^\tau u_i(t)dt \int_0^\tau u_j(t)dt +\\
&+\frac{1}{2} \sum_{i<j} [f_i, f_j](x^0) \int_0^\tau \int_0^t \{u_j(t)u_i(s) - u_i(t)u_j(s)\} ds dt,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

а $\dfrac{\partial f_i(x^0)}{\partial x}$ — матрица Якоби отображения $f_i(x)$, вычисленная в точке $x = x^0$.

Заметим, что решение системы

$$\dot{x} = [f_j, f_l](x), \ \ x(0) = x^0,$$

можно аппроксимировать решениями $x^\tau(t)$ системы (1.1) в случае

$$\dot{x}^\tau(t) = u_j(t) f_j(x^\tau(t)) + u_l(t) f_l(x^\tau(t)), \quad x^\tau(0) = x^0,$$

где

$$u_j(t) = a \cos\left(\frac{2\pi k}{\tau} t\right),\ u_l(t) = a \sin\left(\frac{2\pi k}{\tau} t\right),\ \ t \in [0, \tau], k \in \mathbb{Z}\ \{0\}.$$

А именно,

$$x^\tau(\tau) = x^0 + \frac{\tau^2 a^2}{4\pi k} [f_j, f_l](x^0) + o(\tau^2)$$

для малых $\tau > 0$.

Более общо, рассмотрим семейство управлений

$$u_i^\tau(t) = v_i + \sum_{(j,l)\in S} a_{jl} \left\{ \delta_{ij} \cos\left(\frac{2\pi k_{jl}}{\tau} t\right) + \delta_{jl} \sin\left(\frac{2\pi k_{jl}}{\tau} t\right) \right\}, \tag{1.5}$$

зависящее от $\tau > 0$ и параметров $a_{jl} \in \mathbb{R}$, $k_{jl} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ для индексов $(j,l) \in S$, где δ_{ij} – символ Кронекера. В дальнейшем предположим, что числа $k_{jl} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(j,l) \in S$, выбраны без резонансов, т.е.

$$|k_{jl}| \neq |k_{qr}| \quad \text{для всех } \ (j,l) \in S, (q,r) \in S, (j,l) \neq (q,r). \tag{1.6}$$

Вычисляя интегралы в (1.4) для функций $u_i = u_i^\tau(t)$, заданных формулой (1.5) и используя предположение (1.6), получим

$$\begin{aligned} x(\tau) = x^0 + \tau \sum_{i=1}^m v_i f_i(x^0) + \frac{\tau^2}{2} \sum_{i\le j} v_i v_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial x} f_i + \frac{\partial f_i}{\partial x} f_j \right)\Bigg|_{x=x^0} + \\ + \frac{\tau^2}{4\pi} \sum_{i<j} [f_i, f_j](x^0) \sum_{(q,l)\in S} \frac{a_{ql}}{k_{ql}} \{ \delta_{jl}(a_{ql}\delta_{iq} - 2v_i) - \delta_{il}(a_{ql}\delta_{jq} - 2v_j) \}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

с точностью до членов более высокого порядка малости.

Из представления (1.7) вытекает следующий результат.

Предложение 1. Предположим, что для заданных $\tau > 0$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $x^1 \in \mathbb{R}^n$, параметры v_i, a_{ql}, k_{ql}, $i = \overline{1,m}$, $(q,l) \in S$, удовлетворяют системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^m v_i f_i(x^0) + \frac{1}{2} \sum_{i\le j} v_i v_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} f_i + \frac{\partial f_i}{\partial x} f_j \right)\Bigg|_{x=x^0} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{i<j} [f_i, f_j](x^0) \sum_{(q,l)\in S} \frac{a_{ql}}{k_{ql}} \{ \delta_{jl}(a_{ql}\delta_{iq} - 2v_i) - \delta_{il}(a_{ql}\delta_{jq} - 2v_j) \} = \frac{1}{\tau^2}(x^1 - x^0). \end{aligned}$$

Тогда решение $x(t)$ системы (1.1) с начальным условием $x(0) = x^0$ и управлением $u_i = u_i^\tau(t)$ вида (1.5) удовлетворяют условию

$$x(\tau) = x^1 + o(\tau^2),$$

где $o(\tau^2)$ – остаточный член ряда Вольтерра.

2. Интегратор Брокетта с четырьмя управлениями

В работе [3] Р. Брокетт выделил классы нильпотентных систем, описываемых дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{Y} &= xu^T - ux^T, \quad u \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где Y – антисимметрическая $m \times m$ матрица.

Система (2.1) с $m = 2$ известна в литературе как “интегратор Брокетта”. Исследование данного класса систем с $m > 2$ представляет большой интерес в теории управления.

Рассмотрим случай $m = 4$ и обозначим компоненты матрицы Y в виде

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & x_5 & x_6 & x_7 \\ -x_5 & 0 & x_8 & x_9 \\ -x_6 & -x_8 & 0 & x_{10} \\ -x_7 & -x_9 & -x_{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2.1) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2, \\ \dot{x}_3 = u_3, \\ \dot{x}_4 = u_4, \\ \dot{x}_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \\ \dot{x}_6 = x_1 u_3 - x_3 u_1, \\ \dot{x}_7 = x_1 u_4 - x_4 u_1, \\ \dot{x}_8 = x_2 u_3 - x_3 u_2, \\ \dot{x}_9 = x_2 u_4 - x_4 u_2, \\ \dot{x}_{10} = x_3 u_4 - x_4 u_3, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $x \in \mathbb{R}^{10}$. Зададим множество индексов S в виде

$$S = \{(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,4)\}, \quad |S| = 6 = n - m.$$

Нетрудно проверить, что для системы (2.2) выполнено ранговое условие (1.2).

Для решения двухточечной задачи управления запишем семейство функций управления (1.5) следующим образом:

$$\begin{cases} u_1 = u_1^0 + a_{12}\cos(k_{12}\omega t) + a_{13}\cos(k_{13}\omega t) + a_{14}\cos(k_{14}\omega t), \\ u_2 = u_2^0 + a_{12}\sin(k_{12}\omega t) + a_{23}\cos(k_{23}\omega t) + a_{24}\cos(k_{24}\omega t), \\ u_3 = u_3^0 + a_{13}\sin(k_{13}\omega t) + a_{23}\sin(k_{23}\omega t) + a_{34}\cos(k_{34}\omega t), \\ u_4 = u_4^0 + a_{14}\sin(k_{14}\omega t) + a_{24}\sin(k_{24}\omega t) + a_{34}\sin(k_{34}\omega t), \qquad t \in [0,\tau], \end{cases} \tag{2.3}$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $k_{ij} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(i,j) \in S$, $\omega = 2\pi/\tau$.

Функции (2.3) обобщают класс периодических функций с нулевым средним, которые были использованы в работах [3], [4] для решения задач оптимального управления систем (2.1) с краевыми условиями $x_j(0) = x_j(\tau) = 0$, $j = \overline{1,m}$. Будем предполагать, что целочисленные коэффициенты k_{ij} удовлетворяют условию отсутствия резонансов между различными частотами (1.6).

Для функций управления $u_i(t)$, заданных формулами (2.3), представление (1.3) в координатной записи имеет вид:

$$x_i(\tau) = x_i^0 + \tau u_i^0, \quad i = 1,2,3,4;$$

$$x_5(\tau) = x_5^0 + \tau(x_1^0 u_2^0 - x_2^0 u_1^0) + \frac{\tau^2 a_{12}(a_{12} - 2u_1^0)}{2\pi k_{12}};$$

$$x_6(\tau) = x_6^0 + \tau(x_1^0u_3^0 - x_3^0u_1^0) + \frac{\tau^2}{2\pi}\left(\frac{a_{13}^2}{k_{13}} - 2u_1^0\left(\frac{a_{13}}{k_{13}} + \frac{a_{23}}{k_{23}}\right)\right);$$

$$x_7(\tau) = x_7^0 + \tau(x_1^0u_4^0 - x_4^0u_1^0) + \frac{\tau^2}{2\pi}\left(\frac{a_{14}^2}{k_{14}} - 2u_1^0\left(\frac{a_{14}}{k_{14}} + \frac{a_{24}}{k_{24}} + \frac{a_{34}}{k_{34}}\right)\right);$$

$$x_8(\tau) = x_8^0 + \tau(x_2^0u_3^0 - x_3^0u_2^0) + \frac{\tau^2}{2\pi}\left(\frac{a_{23}^2}{k_{23}} - 2u_2^0\left(\frac{a_{13}}{k_{13}} + \frac{a_{23}}{k_{23}}\right) + 2u_3^0\frac{a_{12}}{k_{12}}\right);$$

$$x_9(\tau) = x_9^0 + \tau(x_2^0u_4^0 - x_4^0u_2^0) + \frac{\tau^2}{2\pi}\left(\frac{a_{24}^2}{k_{24}} - 2u_2^0\left(\frac{a_{14}}{k_{14}} + \frac{a_{24}}{k_{24}} + \frac{a_{34}}{k_{34}}\right) + 2u_4^0\frac{a_{12}}{k_{12}}\right);$$

$$x_{10}(\tau) = x_{10}^0 + \tau(x_3^0u_4^0 - x_4^0u_3^0) + \frac{\tau^2}{2\pi}\left(\frac{a_{34}^2}{k_{34}} - 2u_3^0\left(\frac{a_{14}}{k_{14}} + \frac{a_{24}}{k_{24}} + \frac{a_{34}}{k_{34}}\right) + 2u_4^0\left(\frac{a_{13}}{k_{13}} + \frac{a_{23}}{k_{23}}\right)\right).$$

Отметим, что приведенное представление решений является точным, т.е. остаточный член разложения в ряд Вольтерра равен нулю в силу нильпотентности системы (2.2).

Решая систему уравнений $x(\tau) = x^1$ относительно u_i^0 и a_{ij}, получим:

$$u_i^0 = \frac{(x_i^1 - x_i^0)\omega}{2\pi}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \tag{2.4}$$

$$a_{12} = \frac{2\,\pi\, u_1^0 \pm \sqrt{4\,\pi^2 {u_1^0}^2 + 4\,k_{12}\pi^2\omega x_2^0 u_1^0 - 4\,k_{12}\pi^2\omega x_1^0 u_2^0 - 2\,\pi\, x_5^0\omega^2 k_{12}}}{2\pi};$$

$$a_{23} = -\frac{k_{23}\left(4\,u_1^0 a_{13}\pi - k_{13}\omega^2 x_6^0 + k_{13}\omega^2 x_6^1 + 2\,k_{13}u_1^0x_3^0\omega\pi - 2\,{a_{13}}^2\pi - 2\,k_{13}u_3^0x_1^0\omega\pi\right)}{4k_{13}u_1^0\pi};$$

$$a_{24} = \left(-4\,a_{14}\pi\,u_1^0 + 2\,{a_{14}}^2\pi - k_{14}\omega^2x_7^1 - 2\,k_{14}u_1^0x_4^0\omega\pi + 2\,k_{14}u_4^0x_1^0\omega\pi + k_{14}\omega^2x_7^0\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(8k_{34}\pi\,k_{23}k_{14}k_{13}k_{12}u_1^0\right)^{-1}\times$$

$$\times\Big(-4\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}u_1^0x_4^0\omega^3\pi\,x_7^0 + k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}\omega^4{x_7^1}^2+$$

$$+4\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}u_4^0x_1^0\omega^3\pi\,x_7^0 + 8\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2u_3^0\pi\,u_1^0\omega^2x_7^1-$$

$$-16\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2u_3^0\pi^2u_1^0u_4^0x_1^0\omega - 8\,k_{13}k_{23}k_{34}{k_{14}}^2u_1^0\pi\,k_{12}u_2^0\omega^2x_7^1+$$

$$+16\,k_{13}k_{23}k_{34}{k_{14}}^2u_1^0\pi^2k_{12}u_2^0u_4^0x_1^0\omega + 8\,k_{13}k_{23}k_{34}{k_{14}}^2u_1^0\pi\,k_{12}u_2^0\omega^2x_7^0+$$

$$+8\,k_{13}k_{23}k_{34}{k_{14}}^2{u_1^0}^2\pi\,k_{12}\omega^2x_9^1 - 32\,k_{13}k_{23}k_{34}{k_{14}}^2{u_1^0}^2\pi^2u_4^0a_{12}-$$

$$-16\,k_{13}k_{23}k_{34}{k_{14}}^2{u_1^0}^2\pi^2k_{12}u_4^0x_2^0\omega - 8\,k_{13}k_{23}k_{34}{k_{14}}^2{u_1^0}^2\pi\,k_{12}\omega^2x_9^0-$$

$$-8\,k_{12}{k_{14}}^2k_{24}k_{23}k_{13}\omega^2x_{10}^1{u_1^0}^2\pi - 8\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2u_3^0\pi\,u_1^0\omega^2x_7^0+$$

$$+8\,k_{12}{k_{14}}^2k_{24}k_{23}k_{13}\omega^2x_{10}^0{u_1^0}^2\pi + 32\,k_{12}k_{24}k_{23}{k_{14}}^2u_4^0a_{13}\pi^2{u_1^0}^2+$$

$$+16\,k_{12}{k_{14}}^2k_{24}k_{23}k_{13}u_4^0x_3^0\omega\pi^2{u_1^0}^2 + 32\,k_{12}k_{24}{k_{14}}^2k_{13}u_4^0a_{23}\pi^2{u_1^0}^2+$$

$$+4\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}\omega^3x_7^1u_1^0x_4^0\pi - 4\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}\omega^3x_7^1u_4^0x_1^0\pi-$$

$$+4\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}{u_1^0}^2{x_4^0}^2\omega^2\pi^2 + 4\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}{u_4^0}^2{x_1^0}^2\omega^2\pi^2-$$

$$-2\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}\omega^4x_7^1x_7^0+k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}\omega^4{x_7^0}^2-$$
$$-8\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}u_1^0x_4^0\omega^2\pi^2u_4^0x_1^0-16\,{a_{14}}^3k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}u_1^0\pi^2-$$
$$-8\,a_{14}k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}u_1^0\pi\,k_{14}\omega^2x_7^0-8\,{a_{14}}^2k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}k_{14}k_{34}u_1^0x_4^0\omega\pi^2+$$
$$+8\,{a_{14}}^2k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}k_{14}k_{34}u_4^0x_1^0\omega\pi^2+4\,{a_{14}}^2k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}\pi\,k_{14}\omega^2x_7^0+$$
$$+16\,{a_{14}}^2k_{13}k_{23}k_{34}k_{14}u_1^0\pi^2k_{12}u_2^0-16\,{a_{14}}^2k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}k_{14}u_3^0\pi^2u_1^0+$$
$$+16\,{a_{14}}^2k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}{u_1^0}^2\pi^2-4\,{a_{14}}^2k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}k_{14}k_{34}\omega^2x_7^1\pi+$$
$$+8\,a_{14}k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}u_1^0\pi\,k_{14}\omega^2x_7^1+16\,a_{14}k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}{u_1^0}^2\pi^2k_{14}x_4^0\omega-$$
$$-16\,a_{14}k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}u_1^0\pi^2k_{14}u_4^0x_1^0\omega+4\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}\pi^2{a_{14}}^4\big)\,;$$

$$a_{34}=\left(-4\,a_{14}\pi\,u_1^0+2\,{a_{14}}^2\pi-k_{14}\omega^2x_7^1-2\,k_{14}u_1^0x_4^0\omega\pi+2\,k_{14}u_4^0x_1^0\omega\pi+k_{14}\omega^2x_7^0\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(8k_{23}k_{13}k_{12}k_{24}k_{14}u_1^0\pi\right)^{-1}\times$$
$$\times\Big(-4\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}u_1^0x_4^0\omega^3\pi\,x_7^0+k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}\omega^4{x_7^1}^2+$$
$$+4\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}u_4^0x_1^0\omega^3\pi\,x_7^0-8\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2u_3^0\pi\,u_1^0\omega^2x_7^1+$$
$$+16\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2u_3^0\pi^2u_1^0u_4^0x_1^0\omega+8\,k_{13}k_{23}k_{34}{k_{14}}^2u_1^0\pi\,k_{12}u_2^0\omega^2x_7^1-$$
$$-16\,k_{13}k_{23}k_{34}{k_{14}}^2u_1^0\pi^2k_{12}u_2^0u_4^0x_1^0\omega-8\,k_{13}k_{23}k_{34}{k_{14}}^2u_1^0\pi\,k_{12}u_2^0\omega^2x_7^0-$$
$$-8\,k_{13}k_{23}k_{34}{k_{14}}^2{u_1^0}^2\pi\,k_{12}\omega^2x_9^1+32\,k_{13}k_{23}k_{34}{k_{14}}^2{u_1^0}^2\pi^2u_4^0a_{12}+$$
$$+16\,k_{13}k_{23}k_{34}{k_{14}}^2{u_1^0}^2\pi^2k_{12}u_4^0x_2^0\omega+8\,k_{13}k_{23}k_{34}{k_{14}}^2{u_1^0}^2\pi\,k_{12}\omega^2x_9^0+$$
$$+8\,k_{12}{k_{14}}^2k_{24}k_{23}k_{13}\omega^2x_{10}^1{u_1^0}^2\pi+8\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2u_3^0\pi\,u_1^0\omega^2x_7^0-$$
$$-8\,k_{12}{k_{14}}^2k_{24}k_{23}k_{13}\omega^2x_{10}^0{u_1^0}^2\pi-32\,k_{12}k_{24}k_{23}{k_{14}}^2u_4^0a_{13}\pi^2{u_1^0}^2-$$
$$-16\,k_{12}{k_{14}}^2k_{24}k_{23}k_{13}u_4^0x_3^0\omega\pi^2{u_1^0}^2-32\,k_{12}k_{24}{k_{14}}^2k_{13}u_4^0a_{23}\pi^2{u_1^0}^2+$$
$$+4\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}\omega^3x_7^1u_1^0x_4^0\pi-4\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}\omega^3x_7^1u_4^0x_1^0\pi+$$
$$+4\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}{u_1^0}^2{x_4^0}^2\omega^2\pi^2+4\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}{u_4^0}^2{x_1^0}^2\omega^2\pi^2-$$
$$-2\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}\omega^4x_7^1x_7^0+k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}\omega^4{x_7^0}^2-$$
$$-8\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}{k_{14}}^2k_{34}u_1^0x_4^0\omega^2\pi^2u_4^0x_1^0-16\,{a_{14}}^3k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}u_1^0\pi^2-$$
$$-8\,a_{14}k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}u_1^0\pi\,k_{14}\omega^2x_7^0-8\,{a_{14}}^2k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}k_{14}k_{34}u_1^0x_4^0\omega\pi^2+$$
$$+8\,{a_{14}}^2k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}k_{14}k_{34}u_4^0x_1^0\omega\pi^2+4\,{a_{14}}^2k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}\pi\,k_{14}\omega^2x_7^0-$$
$$-16\,{a_{14}}^2k_{13}k_{23}k_{34}k_{14}u_1^0\pi^2k_{12}u_2^0+16\,{a_{14}}^2k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}k_{14}u_3^0\pi^2u_1^0+$$
$$+16\,{a_{14}}^2k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}{u_1^0}^2\pi^2-4\,{a_{14}}^2k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}k_{14}k_{34}\omega^2x_7^1\pi+$$
$$+8\,a_{14}k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}u_1^0\pi\,k_{14}\omega^2x_7^1+16\,a_{14}k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}{u_1^0}^2\pi^2k_{14}x_4^0\omega-$$
$$-16\,a_{14}k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}u_1^0\pi^2k_{14}u_4^0x_1^0\omega+4\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{34}k_{24}\pi^2{a_{14}}^4\Big)\,.\tag{2.5}$$

Здесь a_{13} и a_{14} являются корнями уравнений четвертой степени $\varphi_{13}(a_{13}) = 0$ и $\varphi_{14}(a_{14}) = 0$, где

$$\begin{aligned}
&\varphi_{13}(z) = 4\,k_{12}k_{23}z^4\pi^2 - 16\,k_{12}k_{23}z^3\pi^2u_1^0 + \big(4\,k_{12}k_{13}k_{23}\omega^2x_6^0\pi + 8\,k_{12}k_{13}k_{23}u_3^0x_1^0\omega\pi^2+\\
&+16\,k_{12}k_{23}{u_1^0}^2\pi^2 - 16\,k_{12}k_{13}u_2^0\pi^2u_1^0 - 4\,k_{12}k_{13}k_{23}\omega^2x_6^1\pi - 8\,k_{12}k_{13}k_{23}u_1^0x_3^0\omega\pi^2\Big)\,z^2+\\
&+\Big(8\,k_{12}k_{13}k_{23}\omega^2x_6^1u_1^0\pi - 8\,k_{12}k_{13}k_{23}\omega^2x_6^0u_1^0\pi + 16\,k_{12}k_{13}k_{23}{u_1^0}^2x_3^0\omega\pi^2-\\
&-16\,k_{12}k_{13}k_{23}u_3^0x_1^0\omega\pi^2u_1^0\big)\,z + 8\,{k_{13}}^2k_{12}\omega^2x_8^0{u_1^0}^2\pi - 8\,{k_{13}}^2k_{12}\omega^2x_8^1{u_1^0}^2\pi+\\
&+8\,k_{12}{k_{13}}^2u_2^0\pi\,u_1^0\omega^2x_6^1 - 8\,k_{12}{k_{13}}^2k_{23}u_1^0x_3^0\omega^2\pi^2u_3^0x_1^0 + 4\,k_{12}{k_{13}}^2k_{23}{u_1^0}^2{x_3^0}^2\omega^2\pi^2+\\
&+4\,k_{12}{k_{13}}^2k_{23}{u_3^0}^2{x_1^0}^2\omega^2\pi^2 + 16\,{k_{13}}^2k_{12}u_3^0x_2^0\omega\pi^2{u_1^0}^2 - 4\,k_{12}{k_{13}}^2k_{23}\omega^3x_6^0u_1^0x_3^0\pi+\\
&+4\,k_{12}{k_{13}}^2k_{23}\omega^3x_6^0u_3^0x_1^0\pi + 4\,k_{12}{k_{13}}^2k_{23}\omega^3x_6^1u_1^0x_3^0\pi - 4\,k_{12}{k_{13}}^2k_{23}\omega^3x_6^1u_3^0x_1^0\pi-\\
&-16\,k_{12}{k_{13}}^2u_2^0\pi^2u_1^0u_3^0x_1^0\omega - 8\,k_{12}{k_{13}}^2u_2^0\pi\,u_1^0\omega^2x_6^0 + 32\,{k_{13}}^2u_3^0a_{12}\pi^2{u_1^0}^2-\\
&-2\,k_{12}{k_{13}}^2k_{23}\omega^4x_6^0x_6^1 + k_{12}{k_{13}}^2k_{23}\omega^4{x_6^0}^2 + k_{12}{k_{13}}^2k_{23}\omega^4{x_6^1}^2.
\end{aligned}$$

Выражение для $\varphi_{14}(z)$ не приводится в силу его громоздкости.

3. Результаты численного решения задачи управления

Для иллюстрации предложенного подхода к построению функций управления рассмотрим двухточечную задачу для системы (2.2) с краевыми условиями

$$x_j(0) = 1, \quad x_j(\tau) = 0, \quad j = \overline{1, 10}.$$

Пусть $\omega = 1$, т.е. $\tau = 2\pi$. Положим $k_{12} = -1$, $k_{13} = -2$, $k_{14} = -3$, $k_{23} = -4$, $k_{24} = -5$, $k_{34} = -6$, тогда

$$\begin{cases} u_1 = u_1^0 + a_{12}\cos(\omega t) + a_{13}\cos(2\,\omega t) + a_{14}\cos(3\,\omega t)\,, \\ u_2 = u_2^0 - a_{12}\sin(\omega t) + a_{23}\cos(4\,\omega t) + a_{24}\cos(5\,\omega t)\,, \\ u_3 = u_3^0 - a_{13}\sin(2\,\omega t) - a_{23}\sin(4\,\omega t) + a_{34}\cos(6\,\omega t)\,, \\ u_4 = u_4^0 - a_{14}\sin(3\,\omega t) - a_{24}\sin(5\,\omega t) - a_{34}\sin(6\,\omega t)\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

Найдем решение задачи Коши с начальным условием $x(0) = x^0$ в момент времени τ с управлением (3.1). Используя формулы (2.4), (2.5), приходим к выводу, что в момент времени τ решение $x(t)$ удовлетворяет условию $x(\tau) = x^1 = 0$ при значениях коэффициентов a_{ij}, приведенных в таблице 1.

Таблица 1. Коэффициенты a_{ij}

a_{12}	a_{13}	a_{23}	a_{14}	a_{24}	a_{34}
$\dfrac{-1+\sqrt{1+2\pi}}{2\pi}$	-0.914	-1.419	-1.148	-1.621	-1.042
	-0.586	1.015	-1.204	-1.688	-1.681
	0.316	0.738	-1.224	-1.711	-1.911
	0.547	-0.971	-1.208	-1.692	-1.726
$\dfrac{-1-\sqrt{1+2\pi}}{2\pi}$	-0.849	-0.832	-1.093	-1.026	-1.086
	-0.684	0.43	-1.13	-1.091	-1.451

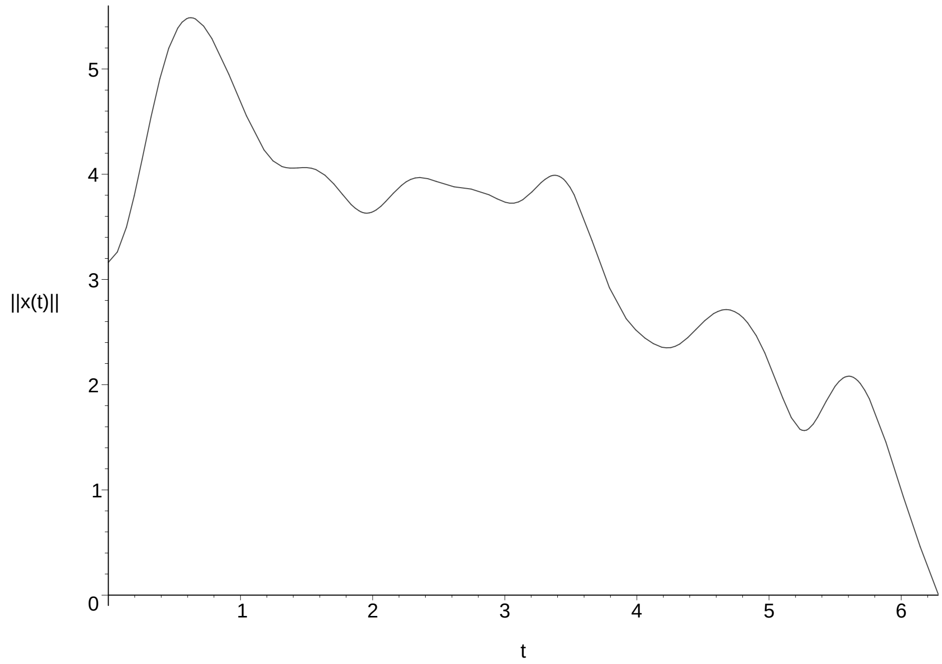

Рис. 1. Норма решения $\|x(t)\|$ системы (2.2) с краевыми условиями $x_j(0) = 1$, $x_j(2\pi) = 0$ при $j = \overline{1,10}$

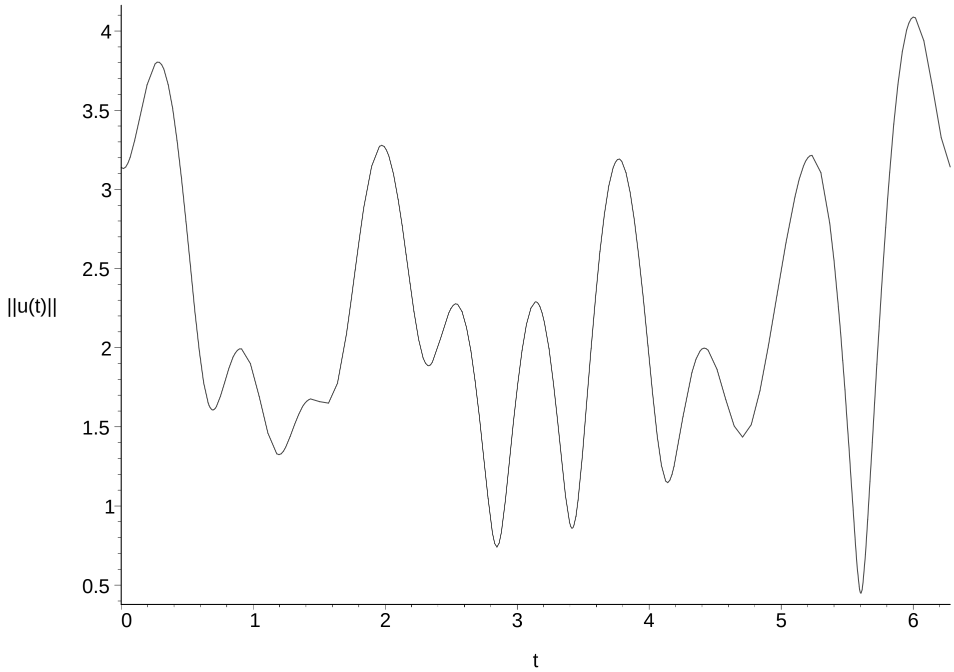

Рис. 2. Норма функции управления $\|u(t)\|$ вида (2.3)

Для случая значений коэффициентов, заданных в первой строке таблицы 1, построим график функций $\|x(t)\|$ на отрезке $t \in [0, 2\pi]$. Приведенный на рис. 1 график подтверждает, что управление вида (3.1) решает поставленную двухточечную задачу для системы (2.2).

Выводы

Полученные в работе результаты развивают подход, основанный на использовании тригонометрических функций управления вида (2.3), для решения двухточечной задачи управления системой (2.1) с краевыми условиями $x(0) = x^0$ и $x(\tau) = x^1$.

Анализ поведения функции управления $u(t)$ вида (2.3) (в частности, вид графика на рис. (2)) показывает, что $u(t)$ не стремится к нулю при $t \to \tau$ для $x(\tau) = 0$. Поэтому представляет дальнейший интерес синтез функций управления, которые принимают малые значения при значениях $x(t)$ из достаточно малой окрестности нуля.

Список цитируемых источников

1. *Аграчев А. А., Сарычев А. В.* Фильтрации алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем // Докл. АН СССР. — Т. 295. — 1987. — С. 777–781.
2. *Сачкова Е. Ф.* Приближенное решение задачи управления на основе нильпотентной аппроксимации // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45(9) — С. 1355 –1364.
3. *Brockett R. W.* Control Theory and Singular Riemannian Geometry // New Directions in Applied Mathematics. / Eds. P.J. Hilton, G.S. Young. — New York: Springer, 1981. — P. 11–27.
4. *Gauthier J.-P., Jakubczyk B., Zakalyukin V.* Motion planning and fastly oscillating controls // SIAM Journ. on Control and Optim. — 2010. — V. 48, No. 5. — P. 3433–3448.
5. *Hermes H.* Nilpotent and high-order approximations of vector fields systems // SIAM Review. — 1991. — V. 33. — P. 1–10.
6. *Sussmann H. J.* New differential geometric methods in nonholonomic path finding // Progr. Systems Control Theory. — V. 12. — Boston: Birkhäuser, 1992. — P. 365–384.
7. *Murray R. M., Sastry S. S.* Nonholonomic Motion Planning: Steering Using Sinusoids // IEEE Transaction on Automatic Control. — 1993. — V. 38, No.5. — P. 700–716.
8. *Nijmeijer H., van der Schaft A.* Nonlinear Dynamical Control Systems. — Springer, 1990. — 467 p.
9. *Walsh G., Tilbury D., Sastry S., Murray R., Laumond J. P.*Stabilization of Trajectories for Systems with Nonholonomic Constraints // IEEE Transaction on Automatic Control. — 1994. — V. 39, No. 1. — P. 216–222.

Получена 12.03.2013