Динамические системы, вып. 23 (2007), 123–126

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 519.1

Построение разделяющей функции колчанов в терминах характеристических многочленов

Ю. П. Москалева*, И. Г. Фомина**

* Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: YulMosk@mail.ru*
** Крымский государственный медицинский университет им. С.И. Георгиевского,
Симферополь 95006. *E-mail: irina_f@csmu.strace.net*

Аннотация. В теории локально скалярных представлений колчанов важную роль играет разделяющая функция, которую используют для классификации конечномерных представлений. В настоящей работе для колчанов звездного типа разделяющая функция выражается через характеристические многочлены колчана и простых цепей. Это дает возможность применять классическую теорему Смита спектральной теории графов в теории локально скалярных представлений колчанов.

1. Введение

В теории локально скалярных представлений колчанов одним из способов классификации колчанов является применение, введенной в работе [1], разделяющей функции. Целью данной статьи является построение разделяющей функции через характеристический многочлен соответствующего колчана и характеристические многочлены простых цепей.

Рассмотрим определение разделяющей функции. Для фиксированного $r \in \mathbb{R}$, $r > 4$ введем рекуррентную последовательность $\{v_i\}$:

$$v_0 = 0,\ v_1 = 1,\ v_{i+2} = \sqrt{r}v_{i+1} - v_i. \tag{1.1}$$

В терминах этой последовательности определим $\rho_r(n) = \sqrt{r}\frac{v_n}{v_{n+1}}$. Разделяющая функция $\rho_r(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, от конечного числа натуральных чисел n_1, n_2, …, n_s задается равенством

$$\rho_r(n_1, n_2, \ldots, n_s) = \sum_{i=1}^{s} \rho(n_i).$$

В работе [2] приводятся следующие решения

$$(1,1,1,1),\ (2,2,2),\ (1,3,3),\ (1,2,5) \tag{1.2}$$

уравнения $\rho_r(n_1, n_2, \ldots, n_s) = 4$, соответствующие расширенным диаграммам Дынкина $\widetilde{D}_4$, $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_8$. Аналогично получены решения

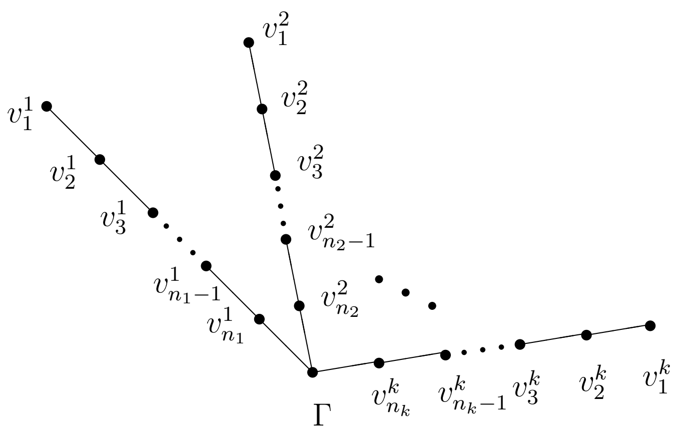
$$(1,2,2),\ (1,2,3),\ (1,2,4),\ (1,1,k),\ (l,m),\ (n), \tag{1.3}$$

неравенства $\rho_r(n_1, n_2, \ldots, n_s) < 4$ где k, l, m, n – произвольные натуральные числа, соответствующие диаграммам Дынкина. E_6, E_7, E_8, D_n, A_n.

Формула для разделяющей функции в терминах характеристического многочлена, предлагаемая в настоящей работе, позволяет получить (1.2), (1.3) как следствие теоремы Смита [3] и добавить в список (1.2) расширенные диаграммамы Дынкина $\widetilde{D}_n$ $(n > 4)$.

2. Характеристический многочлен звездного графа

Графы следующего вида называют звездными графами.



Пусть $P_G(\lambda)$ – характеристический многочлен графа G. Имеет место следующая Лемма.

Лемма 1 ([3]). *Пусть вершина x – висячая вершина графа G, вершина y – смежная с вершиной x. Тогда $P_G(\lambda) = \lambda\ P_{G-x}(\lambda) - P_{G-x-y}(\lambda)$.*

Рассмотрим рекуррентную последовательность характеристических многочленов простых цепей [3].

$$\begin{gathered} P_0(\lambda) = 1 \\ P_1(\lambda) = \lambda \\ \ldots \\ P_{n_i}(\lambda) = \lambda P_{n_i-1}(\lambda) - P_{n_i-2}(\lambda). \end{gathered} \tag{2.1}$$

Из (1.1) и (2.1) следует $v_n = \sqrt{r} P_n(\lambda)$ Тогда $\rho_r(n) = \sqrt{r}\frac{P_{n-1}(\sqrt{r})}{P_n(\sqrt{r})}$.

И таким образом получаем промежуточный результат

$$\rho_r(n_1, n_2, \dots, n_k) = \sum_{i=1}^{k} \rho_r(n_i) = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{r}\frac{P_{n_i-1}(\sqrt{r})}{P_{n_i}(\sqrt{r})}. \tag{2.2}$$

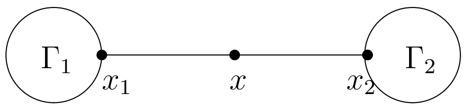
Для получения результирующей формулы докажем следующую теорему о разложении характеристического многочлена по точке сочленения.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ *– связные графы. Обозначим через* $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ *– их характеристические многочлены. В каждом* $\Gamma_i, i = \overline{1, n}$ *зафиксируем вершину* x_i*. Получим граф* Γ *следующим образом: соединим каждую вершину* x_i *графа* Γ_i *с новой вершиной* x*. Тогда имеет место следующая формула:*

$$\Phi_\Gamma = \lambda \prod_{i=1}^{n} \Phi_{k_i}(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\Phi_{k_i-1} \prod_{j=1}^{n} \Phi_{k_j}(\lambda)}{\Phi_{k_i}} \tag{2.3}$$

Доказательство. Докажем теорему по индукции.

Пусть $n = 2$.

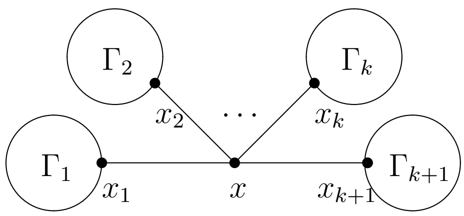


Зафиксируем для графов Γ_1 и Γ_2 вершины x_1 и x_2 соответственно. Соединим вершины с новой вершиной x. Получим граф Γ. Обозначим $\widetilde{\Gamma} = \Gamma_1 \bigcup \{x\}$, тогда имеем $\Phi_\Gamma(\lambda) = \Phi_{\widetilde{\Gamma}}\Phi_{\Gamma_2} - \Phi_{\widetilde{\Gamma}-x}\Phi_{\Gamma_2-x_2} = (\lambda\Phi_{\Gamma_1} - \Phi_{\Gamma_1-x_1})\Phi_{\Gamma_2} - \Phi_{\Gamma_1}\Phi_{\Gamma_2-x_2} = \lambda\Phi_{\Gamma_1}\Phi_{\Gamma_2} - \Phi_{\Gamma_1-x_1}\Phi_{\Gamma_2} - \Phi_{\Gamma_1}\Phi_{\Gamma_2-x_2}$.

Индуктивное предположение

$$\Phi_\Gamma = \lambda\Phi_{\Gamma_1}\Phi_{\Gamma_2}\cdots\Phi_{\Gamma_k} - \Phi_{\Gamma_1-x_1}\Phi_{\Gamma_2}\cdots\Phi_{\Gamma_k} - \Phi_{\Gamma_1}\Phi_{\Gamma_2-x_2}\cdots\Phi_{\Gamma_k} - \dots - \Phi_{\Gamma_1}\Phi_{\Gamma_2}\cdots\Phi_{\Gamma_k-x_k}.$$

Докажем утверждение при $n = k + 1$. Рассмотрим граф следующего вида:



Обозначим через $\widetilde{\Gamma} = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i \bigcup \{x\}$. Для графа $\widetilde{\Gamma}$ утверждение верно, т.к. оно соответствует случаю для $n = k$. Разложим Φ_Γ

$\Phi_\Gamma = \Phi_{\widetilde{\Gamma}}\Phi_{\Gamma_{k+1}} - \Phi_{\widetilde{\Gamma}-x}\Phi_{\Gamma_{k+1}-x_{k+1}} = (\lambda\Phi_{\Gamma_1}\Phi_{\Gamma_2}\cdots\Phi_{\Gamma_k} - \Phi_{\Gamma_1-x_1}\Phi_{\Gamma_2}\cdots\Phi_{\Gamma_k} - \Phi_{\Gamma_1}\Phi_{\Gamma_2-x_2}\cdots\Phi_{\Gamma_k} - \dots - \Phi_{\Gamma_1}\Phi_{\Gamma_2}\cdots\Phi_{\Gamma_k-x_k})\Phi_{\Gamma_{k+1}} - \Phi_{\Gamma_1}\Phi_{\Gamma_2}\cdots\Phi_{\Gamma_{k+1}-x_{k+1}} = \lambda\prod_{i=1}^{n}\Phi_{k_i}(\lambda) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\Phi_{k_i-1}\prod_{j=1}^{n}\Phi_{k_j}(\lambda)}{\Phi_{k_i}}$.

□

3. Построение разделяющей функции через характеристические многочлены

Применим теорему 1 к звездному графу

$$\frac{P_\Gamma(\lambda)}{P_{n_1}(\lambda)\cdot P_{n_2}(\lambda)\cdots P_{n_k}(\lambda)} = \lambda - \sum_{i=1}^{n_k}\frac{P_{n_{i-1}}(\lambda)}{P_{n_i}(\lambda)}$$

Домножим обе части равенства на λ:

$$\frac{\lambda\cdot P_\Gamma(\lambda)}{P_{n_1}(\lambda)\cdot P_{n_2}(\lambda)\cdots P_{n_k}(\lambda)} = \lambda^2 - \sum_{i=1}^{n_k}\frac{\lambda\cdot P_{n_{i-1}}(\lambda)}{P_{n_i}(\lambda)}$$

Обозначим $\lambda^2 = r$, получим:

$$\frac{\sqrt{r}\cdot P_\Gamma(\sqrt{r})}{P_{n_1}(\sqrt{r})\cdot P_{n_2}(x)\cdots P_{n_k}(x)} = r - \sum_{i=1}^{n_k}\frac{\sqrt{r}\cdot P_{n_{i-1}}(\sqrt{r})}{P_{n_i}(\sqrt{r})}$$

Воспользуемся (2.2):

$$\frac{\sqrt{r}\cdot P_\Gamma(\sqrt{r})}{P_{n_1}(\sqrt{r})\cdots P_{n_k}(\sqrt{r}} = r - \rho_r(n_1, n_2, \ldots, n_k).$$

Выразив ρ_r получим

$$\rho_r(n_1, n_2, \ldots, n_k) = r - \frac{\sqrt{r}\cdot P_\Gamma(\sqrt{r})}{\prod_{i=1}^{k} P_{n_i}(\sqrt{r})} \tag{3.1}$$

Список цитируемых источников

1. *I.K. Redchuk, A.V. Poiter.* Singular locally scalar representation of quivers in Hilbert spases and separating functions. // Ukr. Math. Jour. – 2004. –56., N.6 –p. 796-809.
2. *L.A. Nazarova, A.V. Poiter.* Norm of a relation, separating functions and representetions of marked quivers // Ukr. Math. Jour. – 2002. –54., N.6 –p. 18-54.
3. *Ю.П. Москалева, Ю.С. Самойленко* Введение в спектральную теорию графов. – К.: Центр учебной литературы. – 2007. –114 С.

Получена 30.09.2007