Динамические системы, вып. 25 (2008), 145–158

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.9

Модифицированный метод простых итераций для критической краевой задачи[1]

С. М. Чуйко

Славянский государственный педагогический университет
Славянск 84112. *E-mail: chujko-slav@inbox.ru*

Аннотация. Предложена модификация метода простых итераций для построения приближенных решений слабонелинейной нетеровой краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае. Найдена оценка области изменения малого параметра, в пределах которой сохраняется сходимость этой итерационной процедуры к искомому решению.

Ключевые слова: краевые задачи, обыкновенные дифференциальные уравнения, итерационная процедура.

1. Постановка задачи

Исследуем задачу о нахождении решений

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(z^{(1)}(t,\varepsilon),\ \dots\ , z^{(n)}(t,\varepsilon)\right),$$
$$z^{(i)}(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \quad z^{(i)}(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad i = 1,2,\dots,n,$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dz/dt = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \tag{1}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{2}$$

Решение задачи (1)–(2) будем искать в малой окрестности решения

$$z_0(t) = \mathrm{col}\left(z_0^{(1)}(t),\ \dots\ ,\ z_0^{(n)}(t)\right), \quad z_0^{(i)}(\cdot) \in C^1[a,b], \quad i = 1,2,\ \dots\ ,\ n,$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке государственного фонда фундаментальных исследований (код 2201020).

порождающей задачи

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \tag{3}$$

Здесь $A(t)$ — $(n\times n)$-матрица и $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a,b]$ действительные функции, $\alpha \in R^m$— действительный вектор-столбец, $Z(z,t,\varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по z в малой окрестности решения порождающей задачи, непрерывная по t на отрезке $[a,b]$ и непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$, $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный векторный функционал, а $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелинейный векторный функционал, при этом J непрерывно дифференцируем (в смысле Фреше) по z и непрерывно дифференцируем по малому параметру ε в малой окрестности решения порождающей задачи и на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Исследован критический случай $P_{Q^*} \neq 0$; при условии

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha - \ell K\left[f(s)\right](\cdot)\right\} = 0 \tag{4}$$

порождающая задача (3) имеет r линейно независимых решений

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\left[f(s);\alpha\right](t), \quad c_r \in R^r.$$

Здесь $X(t)$ — нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (3), $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m\times n)$-матрица, $\mathrm{rank}\, Q = n_1$, $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $(n\times r)$-матрица, составленная из r линейно независимых столбцов $(n\times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q : R^n \to N(Q)$, $P_{Q_d^*}$ — $(d\times m)$-матрица, составленная из $d = n - n_1$ линейно независимых строк $(m\times m)$-мерной матрицы-ортопроектора $P_{Q^*} : R^m \to N(Q^*)$,

$$G\left[f(s);\alpha\right](t) = K\left[f(s)\right](t) - X(t)Q^+\ell K\left[f(s)\right](\cdot)$$

— обобщенный оператор Грина [9] краевой задачи (3);

$$K\left[f(s)\right](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

— оператор Грина задачи Коши для дифференциальной системы (3), Q^+— псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу [3]. Учитывая непрерывность нелинейной вектор-функции $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ и векторного функционала $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ по ε в малой положительной окрестности нуля приходим к необходимому условию [9]

$$F_0(c_r) = P_{Q_d^*}\left\{J(z_0(\cdot,c_r),0) - \ell K\left[Z(z_0(s,c_r),s,0)\right](\cdot)\right\} = 0 \tag{5}$$

существования решения исходной задачи (1)–(2) в критическом случае.

Лемма. *Пусть краевая задача (1)–(2) представляет критический ($P_{Q^*} \neq 0$) случай и выполнено условие (4) разрешимости порождающей задачи (3). Предположим также, что задача (1)–(2) имеет решение, обращающееся при $\varepsilon = 0$ в порождающее $z_0(t,c_r^*)$. Тогда вектор $c_r^* \in R^r$ удовлетворяет уравнению (5).*

Предположим далее, что уравнение (5) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $c_r^* \in R^r$ уравнения (5), приходим к задаче об отыскании решения задачи (1)–(2) $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(t,c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G\,[f(s);\ \alpha]\,(t)$. Возмущение $x(t,\varepsilon)$ определяет краевая задача

$$dx(t,\varepsilon)/dt = A(t)x + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon),\ \ell x(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \quad (6)$$

Используя непрерывную дифференцируемость функции $Z(z,t,\varepsilon)$ по первому аргументу в окрестности порождающего решения и непрерывную дифференцируемость по третьему аргументу, получим в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$ следующее представление:

$$Z(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = Z(z_0(t,c_r^*), t, 0) + A_1(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + \\ + R_1(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \quad (7)$$

где $A_1(t) = \left.\dfrac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_r),\\ \varepsilon=0}}$, $A_(t) = \left.\dfrac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_r),\\ \varepsilon=0}}$. Остаток R_1 разложения функции $Z(z,t,\varepsilon)$ имеет более высокий порядок малости по неизвестной x в малой окрестности нуля и по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля, чем первые три члена разложения (7), поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{R_1(z,t,\varepsilon)}{\varepsilon} \equiv 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial R_1(z,t,\varepsilon)}{\partial z} \equiv 0.$$

Аналогично используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по первому аргументу векторного функционала $J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу выделяем линейную $\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)$ часть этого функционала по x и линейную $\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))$ часть этого функционала по ε, а также член $J(z_0(\cdot,c_r^*),0) = J(z(\cdot,0),0)$ нулевого порядка по ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$.

$$J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + \\ + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \quad (8)$$

Остаток $J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ разложения функционала $J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — более высокого порядка малости по x и ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$, чем первые два члена разложения, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\varepsilon} \equiv 0,\ \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z} \right\} \equiv 0.$$

Обозначая $(d\times r)$-матрицу

$$B_0 = P_{Q_d^*} \left\{ \ell_1 X_r(\cdot) - \ell K\,[A_1(s)X_r(s)]\,(\cdot) \right\},$$

приходим к операторной системе, равносильной задаче о нахождении решений задачи (6)

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) &= X_r(t)c_r + x^{(1)}(t,\varepsilon), \\ B_0 c_r &= -P_{Q_d^*}\left\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \right. \\ &\qquad \left. - \ell K\left[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right](\cdot)\right\}, \\ x^{(1)}(t,\varepsilon) &= \varepsilon G\left[Z(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right](t). \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} F_1(c_r^*) = P_{Q_d^*}\{\ell_1 G\left[Z(z_0(s,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\right](\cdot) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) - \\ -\ell K\left[A_1(s)G\left[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\right](s) + \varepsilon A_2(s)\right](\cdot)\}. \end{aligned}$$

Для построения приближенного решения краевой задачи (6) в критическом случае при условии $P_{B_0^*} = 0$ применяется метод простых итераций [4, 9]. Этот метод отличают простота и численная устойчивость, однако построение приближенных решений с применением метода простых итераций связано с быстро увеличивающейся от итерации к итерации сложностью вычислений. Целью данной работы является построение приближенных решений краевой задачи (6) аналогично [8] с использованием модифицированной итерационной процедуры.

2. Итерационная процедура

Первое приближение $x_1(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon)$ к решению операторной системы (9) ищем, как решение краевой задачи первого приближения к задаче (6)

$$dx_1/dt = A(t)x_1 + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,0), \ \ell\, x_1(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*),0). \tag{10}$$

Решение задачи (10) существует в силу выбора вектора c_r^*, являющегося корнем уравнения (5), и представимо в виде

$$x_1(t,\varepsilon) = \varepsilon G\left[Z(z_0(s,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\right](t).$$

Второе приближение $x_2(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$ к решению операторной системы (9) ищем, как решение краевой задачи второго приближения к задаче (6)

$$\begin{gathered} dx_2/dt = A(t)x_2 + \varepsilon\left\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x_1 + \varepsilon A_2(t)\right\}, \\ \ell\, x_2(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\left\{J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x_1(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))\right\}. \end{gathered}$$

Для нахождения вектора $\xi_2(t,\varepsilon)$, с учетом задачи первого приближения, приходим к системе

$$d\xi_2/dt = A(t)\xi_2 + \varepsilon\left\{A_1(t)\xi_1 + \varepsilon A_2(t)\right\}, \quad \ell\, \xi_2(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\left\{\ell_1\xi_1(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))\right\},$$

решение которой представимо в виде $\xi_2(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_1}(\varepsilon) + \xi_2^{(1)}(t,\varepsilon)$, где

$$\xi_2^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\left[A_1(s)\xi_1(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s);\ \ell_1\xi_1(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*))\right](t).$$

Существование решения задачи второго приближения гарантировано выбором вектора c_r^*, являющегося корнем уравнения (5), и условием $F_1(c_r^*) = 0$. Третье приближение $x_3(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \xi_3(t,\varepsilon)$ к решению операторной системы (9) ищем как решение краевой задачи третьего приближения к задаче (6)

$$dx_3/dt = A(t)x_3 + \varepsilon\left\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x_2 + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + x_1, t, \varepsilon)\right\},$$
$$\ell\, x_3(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon\left\{J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x_2(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1, \varepsilon)\right\}.$$

Для нахождения вектора $\xi_3(t,\varepsilon)$, с учетом задач первого и второго приближения, приходим к системе

$$d\xi_3/dt = A(t)\xi_3 + \varepsilon\left\{A_1(t)\xi_2 + R_1(z_0(t,c_r^*) + x_1(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\right\},$$
$$\ell\xi_3(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon\left\{\ell_1\xi_2(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\ \varepsilon), \varepsilon)\right\},$$

решение которой представимо в виде $\xi_3(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_2}(\varepsilon) + \xi_3^{(1)}(t,\varepsilon)$, где

$$\xi_3^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[A_1(s)\xi_2(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon), t, \varepsilon);$$
$$\ell_1\xi_2(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)](t).$$

С учетом уравнения (5) и требования $F_1(c_r^*) = 0$ условие разрешимости задачи третьего приближения приводит к уравнению

$$B_0 c_{r_1}(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1\xi_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$-\ell K\left[A_1(s)\xi_2^{(1)}(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\right](\cdot)\Big\}.$$

Последнее уравнение при условии $P_{B_0^*} = 0$ имеет $\rho-$ параметрическое семейство решений

$$c_{r_1}(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1\xi_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$-\ell K\left[A_1(s)\xi_2^{(1)}(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\right](\cdot)\Big\} + P_\rho c_\rho,$$

зависящее от вектора

$$c_\rho = c_\rho(\varepsilon) = \mathrm{col}\left(c_\rho^{(1)}(\varepsilon),\ \ldots\ ,\ c_\rho^{(\rho)}(\varepsilon)\right),$$
$$c_\rho^{(j)}(\cdot) \in C^1[0,\varepsilon_0],\quad c_\rho(0) = 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\quad \rho.$$

Четвертое приближение $x_4(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \xi_3(t,\varepsilon) + \xi_4(t,\varepsilon)$ к решению операторной системы (9) ищем как решение краевой задачи четвертого приближения к задаче (6)

$$dx_4/dt = A(t)x_4 + \varepsilon\left\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x_3 + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + x_2, t, \varepsilon)\right\},$$

$$\ell x_4(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon \left\{ J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x_3(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_2, \varepsilon) \right\}.$$

Для нахождения вектора $\xi_4(t,\varepsilon)$, с учетом задач первого, второго и третьего приближения, приходим к системе

$$d\xi_4/dt = A(t)\xi_4 + \varepsilon \left\{ A_1(t)\xi_3 + R_1(z_0(t, c_r^*) + x_2, t, \varepsilon) - R_1(z_0(t, c_r^*) + x_1, t, \varepsilon) \right\},$$
$$\ell \xi_4(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon \left\{ \ell_1 \xi_3(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_2, \varepsilon) - J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_1, \varepsilon) \right\},$$

решение которой представимо в виде $\xi_4(t,\varepsilon) = X_r(t) c_{r_3}(\varepsilon) + \xi_4^{(1)}(t,\varepsilon)$, где

$$\xi_4^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G \left[A_1(s)\xi_3(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x_2, s, \varepsilon) - R_1(z_0(s, c_r^*) + x_1, s, \varepsilon); \right.$$
$$\left. \ell_1 \xi_3(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_2, \varepsilon) - J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_1, \varepsilon) \right](t).$$

С учетом уравнения (5) и требования $F_1(c_r^*) = 0$ условие разрешимости задачи четвертого приближения приводит к уравнению

$$B_0 c_{r_2}(\varepsilon) = -P_{Q_d^*} \Big\{ \ell_1 \xi_3^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_2(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_1, \varepsilon) -$$
$$- \ell K \Big[A_1(s) \xi_3^{(1)}(s, \varepsilon) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x_2(s, \varepsilon), s, \varepsilon) - R_1(z_0(s, c_r^*) + x_1, s, \varepsilon) \Big](\cdot) \Big\}.$$

Последнее уравнение при условии $P_{B_0^*} = 0$ имеет ρ-параметрическое семейство решений

$$c_{r_2}(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*} \Big\{ \ell_1 \xi_3^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_2(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_1, \varepsilon) -$$
$$- \ell K \Big[A_1(s) \xi_3^{(1)}(s, \varepsilon) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x_2(s, \varepsilon), s, \varepsilon) - R_1(z_0(s, c_r^*) + x_1, s, \varepsilon) \Big](\cdot) \Big\} + P_\rho c_\rho.$$

Пятое приближение

$$x_5(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{5} \xi_i(t,\varepsilon)$$

к решению операторной системы (9) ищем как решение краевой задачи пятого приближения к задаче (6)

$$dx_5/dt = A(t)x_5 + \varepsilon \left\{ Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) + A_1(t)x_4 + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t, c_r^*) + x_3, t, \varepsilon) \right\},$$
$$\ell x_5(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon \left\{ J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x_4(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_3, \varepsilon) \right\}.$$

Для нахождения вектора $\xi_5(t,\varepsilon)$, с учетом задач первых четырех приближений, приходим к системе

$$d\xi_5/dt = A(t)\xi_5 + \varepsilon \left\{ A_1(t)\xi_4 + R_1(z_0(t, c_r^*) + x_3, t, \varepsilon) - R_1(z_0(t, c_r^*) + x_2, t, \varepsilon) \right\},$$
$$\ell \xi_5(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon \left\{ \ell_1 \xi_4(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_3, \varepsilon) - J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x_2, \varepsilon) \right\},$$

решение которой представимо в виде $\xi_5(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_4}(\varepsilon) + \xi_5^{(1)}(t,\varepsilon)$, где

$$\xi_5^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\big[A_1(s)\xi_4(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x_3, s,\varepsilon) - R_1(z_0(s,c_r^*) + x_2, s,\varepsilon);$$
$$\ell_1\xi_4(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_3,\varepsilon) - J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_2,\varepsilon)\big](t).$$

С учетом уравнения (5) и условия $F_1(c_r^*) = 0$ критерий разрешимости задачи пятого приближения приводит к уравнению

$$B_0c_{r_3}(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1\xi_4^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_3(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_2,\varepsilon) -$$
$$-\ell K\Big[A_1(s)\xi_4^{(1)}(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x_3(s,\varepsilon), s,\varepsilon) - R_1(z_0(s,c_r^*) + x_2, s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Последнее уравнение при условии $P_{B_0^*} = 0$ имеет ρ-параметрическое семейство решений

$$c_{r_3}(\varepsilon) = -B_0^+P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1\xi_4^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_3(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_2,\varepsilon) -$$
$$-\ell K\Big[A_1(s)\xi_4^{(1)}(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x_3(s,\varepsilon), s,\varepsilon) - R_1(z_0(s,c_r^*) + x_2, s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} + P_\rho c_\rho.$$

Структура найденного четвертого приближения не отличается от структуры третьего. Таким образом, продолжая рассуждения, приходим к итерационной процедуре

$$x_{k+3}(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{k+3}\xi_i(t,\varepsilon),\ \ \xi_{k+3}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_{k+2}}(\varepsilon) + \xi_{k+3}^{(1)}(t,\varepsilon),$$
$$\xi_{k+3}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[A_1(s)\xi_{k+2}(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x_{k+1}, s,\varepsilon) - R_1(z_0(s,c_r^*) + x_k, s,\varepsilon);$$
$$\ell_1\xi_{k+2}(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_{k+1},\varepsilon) - J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_k,\varepsilon)\Big](t),$$
$$c_{r_{k+1}}(\varepsilon) = -B_0^+P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1\xi_{k+2}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_k,\varepsilon) -$$
$$-\ell K\Big[A_1(s)\xi_{k+2}^{(1)}(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x_{k+1}(s,\varepsilon), s,\varepsilon) - R_1(z_0(s,c_r^*) + x_k, s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} +$$
$$+P_\rho c_\rho(\varepsilon),\ \ldots\ ,\ k = 1,2,3,\ \ldots\ .$$

Для упрощения доказательства сходимости этой процедуры положим $m = n$, $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \equiv 0$, при этом $\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) \equiv 0,\ J_1(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \equiv 0,\ \rho = 0$. Введя обозначения

$$\|G[*;0](t)\| = q_G,\ ||A_1(s)|| = \mu_1,\ ||A_2(s)|| = \mu_2,\ ||Z(z_0(t,c_r^*),t,0)|| = \mu_3,$$
$$||B_0^+P_{Q_d^*}|| = \mu_4,\ ||\ell K[*](\cdot)|| = q_\ell,\ ||X_r(t)|| = \sigma_{X_r}$$

и

$$\sigma_R = \max_{\substack{\|x\|\le\rho,\\ \varepsilon_1\in[0,\varepsilon_0]}}\left\|\frac{R_1(z_0(t,c_r^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right\|,$$

оценим

$$\|\xi_1(t,\varepsilon)\| = \varepsilon\|G\left[Z(z_0(s,c_r^*),s,0);0\right](t)\| \le \varepsilon\cdot\omega_1,\ \omega_1 = q_{_G}\cdot\mu_3.$$

Далее

$$\|\xi_2^{(1)}(t,\varepsilon)\| = \varepsilon\|G\left[A_1(s)\xi_1(s,\varepsilon)+\varepsilon A_2(s);\ 0\right](t)\| \le$$
$$\le \|G\left[A_1(s)\xi_1(s,\varepsilon);0\right](t)\| + \|G\left[\varepsilon A_2(s);0\right](t)\| \le \varepsilon^2 q_{_G}\left(q_{_G}\mu_1\mu_3+\mu_2\right);$$

при этом

$$||c_{r_1}(\varepsilon)|| = \left\|B_0^+P_{Q_d^*}\ell K\left[A_1(s)\xi_2^{(1)}(s,\varepsilon)+R_1(z_0(s,c_r^*)+x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right](\cdot)\right\| \le$$
$$\le \left\|B_0^+P_{Q_d^*}\ell K\left[A_1(s)\xi_2^{(1)}(s,\varepsilon)\right](\cdot)\right\| + \left\|B_0^+P_{Q_d^*}\ell K\left[R_1(z_0(s,c_r^*)+x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right](\cdot)\right\| \le$$
$$\le \varepsilon^2 q_\ell\left[q_{_G}\mu_1\left(q_{_G}\mu_1\mu_3+\mu_2\right)+\sigma_{_R}\right].$$

Таким образом

$$\|\xi_2(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon^2\omega_2,$$

где

$$\omega_2 = \left\{\sigma_{_{X_r}}\mu_4 q_\ell\left[q_{_G}\mu_1\left(q_{_G}\mu_1\mu_3+\mu_2\right)+\sigma_{_R}\right]+q_{_G}\left(q_{_G}\mu_1\mu_3+\mu_2\right)\right\}.$$

Аналогично

$$\|\xi_3^{(1)}(t,\varepsilon)\| = \|\varepsilon G\left[A_1(s)\xi_2(s,\varepsilon)+R_1(z_0(s,c_r^*)+x_1,t,\varepsilon);\ 0\right](t)\| \le$$
$$\le \|\varepsilon G\left[A_1(s)\xi_2(s,\varepsilon);\ 0\right](t)\| + \|\varepsilon G\left[R_1(z_0(s,c_r^*)+x_1,t,\varepsilon);\ 0\right](t)\|,$$

следовательно

$$\|\xi_3^{(1)}(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon^3 q_{_G}\left(\mu_1\omega_2+\sigma_{_R}\right).$$

Далее

$$\|c_{r_2}(\varepsilon)\| \le \|B_0^+P_{Q_d^*}\ell K\left[A_1(s)\xi_3^{(1)}(s,\varepsilon)\right](\cdot)\| +$$
$$+\|B_0^+P_{Q_d^*}\ell K\left[R_1(z_0(s,c_r^*)+x_2(s,\varepsilon),s,\varepsilon)-R_1(z_0(s,c_r^*)+x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right](\cdot)\|.$$

Для достаточно малых норм векторов $x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon)$ справедлива [6, с.185] оценка

$$\|R_1(z_0(t,c_r^*)+x_2(t,\varepsilon),s,\varepsilon)-R_1(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon),s,\varepsilon)\| \le$$
$$\le \left\|\partial R_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)/\partial z|_{z=\zeta(t,\varepsilon)}\right\| \|x_2-x_1\| \le \sigma_{_{R_1'}}\|\xi_2(t,\varepsilon)\|,$$

где $\zeta(t,\varepsilon)-$ некоторая точка отрезка, соединяющего точки $z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)$ и $z_0(t,c_r^*)+y(t,\varepsilon)$,

$$\sigma_{_{R_1'}} = \max_{\substack{||x||,||y||\le\rho,\\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0],\\ t\in[a,b]}}\left\|\left.\frac{\partial R_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{z=\zeta(t,\varepsilon)}\right\|;$$

таким образом

$$\|c_{r_2}(\varepsilon)\| \le \varepsilon^3 \mu_4 q_\ell \left[\mu_1 q_{_G} \left(\mu_1 \omega_2 + \sigma_{_R}\right) + \varepsilon \sigma_{_{R_1'}} \omega_2\right],$$

следовательно

$$\|\xi_3(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon^3 \omega_3,$$

где

$$\omega_3 = q_{_G}\left(\mu_1\omega_2 + \sigma_{_R}\right) + \sigma_{_{X_r}} \mu_4 q_\ell \left[\mu_1 q_{_G}\left(\mu_1\omega_2 + \sigma_{_R}\right) + \varepsilon\sigma_{_{R_1'}}\omega_2\right].$$

Аналогично

$$\begin{gathered}\|\xi_4^{(1)}(t,\varepsilon)\| \le \|\varepsilon G\left[A_1(s)\xi_3(s,\varepsilon);0\right](t)\| + \\ + \|\varepsilon G\left[R_1(z_0(s,c_r^*) + x_2, s, \varepsilon) - R_1(z_0(s,c_r^*) + x_1, s,\varepsilon);0\right](t)\| \le \varepsilon^4 q_{_G}\left(\mu_1\omega_3 + \varepsilon\sigma_{_{R_1'}}\omega_2\right),\end{gathered}$$

при этом

$$\begin{gathered}\|c_{r_3}(\varepsilon)\| \le \left\|B_0^+ P_{Q_d^*}\ell K\left[A_1(s)\xi_4^{(1)}(s,\varepsilon)\right](\cdot)\right\| + \\ + \left\|B_0^+ P_{Q_d^*}\ell K\left[R_1(z_0(s,c_r^*) + x_3(s,\varepsilon), s,\varepsilon) - R_1(z_0(s,c_r^*) + x_2(s,\varepsilon), s,\varepsilon)\right](\cdot)\right\|.\end{gathered}$$

Для достаточно малых норм векторов $x_2(t,\varepsilon),\ x_3(t,\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\|R_1(z_0(t,c_r^*) + x_3(t,\varepsilon), s,\varepsilon) - R_1(z_0(t,c_r^*) + x_2(t,\varepsilon), s,\varepsilon)\| \le \\ \le \left\|\partial R_1(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)/\partial z|_{z=\zeta(t,\varepsilon)}\right\| \|x_3 - x_2\| \le \sigma_{_{R_1'}} \|\xi_3(t,\varepsilon)\|,\end{gathered}$$

которое приводит к оценке

$$\|c_{r_3}(\varepsilon)\| \le \varepsilon^4 \mu_4 q_\ell \left[\varepsilon \mu_1 q_{_G} \sigma_{_{R_1'}} \omega_2 + (\mu_1^2 q_{_G} + \varepsilon\sigma_{_{R_1'}})\omega_3\right],$$

следовательно

$$||\xi_4(t,\varepsilon)|| \le \varepsilon^4 \cdot \omega_4,$$

где

$$\omega_4 = \varepsilon\left(1 + \mu_1\mu_4\sigma_{_{X_r}} q_\ell\right) q_{_G}\sigma_{_{R_1'}}\omega_2 + \left[q_{_G}\mu_1 + \sigma_{_{X_r}}\mu_4 q_\ell\left(\mu_1^2 q_{_G} + \varepsilon\sigma_{_{R_1'}}\right)\right]\omega_3.$$

Аналогично

$$\begin{gathered}\|\xi_5^{(1)}(t,\varepsilon)\| \le \|\varepsilon G\left[A_1(s)\xi_4(s,\varepsilon);0\right](t)\| + \\ + \|\varepsilon G\left[R_1(z_0(s,c_r^*) + x_3, s,\varepsilon) - R_1(z_0(s,c_r^*) + x_2, s,\varepsilon);0\right](t)\| \le \\ \le \varepsilon^5 q_{_G}(\mu_1\omega_4 + \varepsilon\sigma_{_{R_1'}}\omega_3),\end{gathered}$$

при этом

$$\|c_{r_4}(\varepsilon)\| \le \left\|B_0^+ P_{Q_d^*}\ell K\left[A_1(s)\xi_5^{(1)}(s,\varepsilon)\right](\cdot)\right\| +$$

$$+\left\| B_0^+ P_{Q_d^*} \ell K \left[R_1(z_0(s,c_r^*) + x_4(s,\varepsilon), s, \varepsilon) - R_1(z_0(s,c_r^*) + x_3(s,\varepsilon), s, \varepsilon) \right](\cdot) \right\|.$$

Для достаточно малых норм векторов $x_3(t,\varepsilon),\ x_4(t,\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\|R_1(z_0(t,c_r^*) + x_4(t,\varepsilon), s, \varepsilon) - R_1(z_0(t,c_r^*) + x_3(t,\varepsilon), s, \varepsilon)\| \le$$
$$\le \left\| \partial R_1(z(t,\varepsilon), t, \varepsilon)/\partial z|_{z=\zeta(t,\varepsilon)} \right\| \|x_4 - x_3\| \le \sigma_{R_1'} \|\xi_4(t,\varepsilon)\|,$$

которое приводит к оценке

$$\|c_{r_4}(\varepsilon)\| \le \varepsilon^5 \mu_4 q_\ell \left[\varepsilon \mu_1 q_G \sigma_{R_1'} \omega_3 + (\mu_1^2 q_G + \varepsilon \sigma_{R_1'}) \omega_4 \right],$$

следовательно

$$\|\xi_5(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon^5 \cdot \omega_5,$$

где

$$\omega_5 = \varepsilon(1 + \mu_1\mu_4\sigma_{X_r} q_\ell) q_G \sigma_{R_1'} \omega_3 + + \left[q_G \mu_1 + \sigma_{X_r} \mu_4 q_\ell (\mu_1^2 q_G + \varepsilon \sigma_{R_1'}) \right] \omega_4.$$

Таким образом, последовательность $\left\{\varepsilon^k \omega_k\right\}$ является мажорантой

$$\|\xi_k(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon^k \omega_k,\ k = 4, 5,\ ...$$

последовательности функций $\{\xi_k(t,\varepsilon)\}$, при этом константы ω_k являются решениями задачи Коши

$$\omega_3 = q_G(\mu_1\omega_2 + \sigma_R) + \sigma_{X_r} \mu_4 q_\ell \left[\mu_1 q_G (\mu_1 \omega_2 + \sigma_R) + \varepsilon \sigma_{R_1'} \omega_2 \right],$$
$$\omega_4 = \varepsilon(1 + \mu_1\mu_4\sigma_{X_r} q_\ell) q_G \sigma_{R_1'} \omega_2 + \left[q_G \mu_1 + \sigma_{X_r} \mu_4 q_\ell (\mu_1^2 q_G + \varepsilon \sigma_{R_1'}) \right] \omega_3$$

для разностного уравнения второго порядка

$$\omega_{k+2} = \varepsilon(1 + \mu_1\mu_4\sigma_{X_r} q_\ell) q_G \sigma_{R_1'} \omega_k +$$
$$+ \left[q_G \mu_1 + \sigma_{X_r} \mu_4 q_\ell (\mu_1^2 q_G + \varepsilon \sigma_{R_1'}) \right] \omega_{k+1},\ k = 3, 4, \ldots.$$

Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2-$ корни характеристического уравнения полученной последовательности

$$\lambda^2 - \left[q_G \mu_1 + \sigma_{X_r} \mu_4 q_\ell (\mu_1^2 q_G + \varepsilon \sigma_{R_1'}) \right] \lambda - \varepsilon(1 + \mu_1\mu_4\sigma_{X_r} q_\ell) q_G \sigma_{R_1'} = 0.$$

Эти корни — положительные действительные числа и при условии $\lambda_1 < 1,\ \lambda_2 < 1$ определяют сходящуюся, следовательно, ограниченную $0 < \omega_k(\varepsilon) < \gamma,\ k = 1, 2,\ ...$ последовательность $\{\omega_k(\varepsilon)\}$. В свою очередь последовательность $\{\varepsilon^k \gamma\}$ является мажорантой $||\xi_k(t,\varepsilon)|| \le \varepsilon^k \gamma$ при $0 < \varepsilon < 1$ и $k = 1, 2, \ldots$ последовательности функций $\{\xi_k(t,\varepsilon)\}$, что гарантирует абсолютную и равномерную сходимость ряда

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(t,\varepsilon).$$

Наконец, сходимость последнего ряда гарантирует сходимость последовательности

$$dx_{k+2}/dt = A(t)x_4+\varepsilon\left\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x_{k+1} + \varepsilon A_2(t) + R_1(z_0(t,c_r^*) + x_k,t,\varepsilon)\right\},$$

$$\ell x_{k+2}(\cdot,\ \varepsilon) = \varepsilon\left\{J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x_{k+1}(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_k,\varepsilon)\right\}$$

приближений к задаче (6). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть краевая задача (1)–(2) представляет критический* ($P_{Q^*} \neq 0$) *случай и выполнено условие (4) разрешимости порождающей задачи (3). Тогда для каждого корня* $c_r^* \in R^r$ *уравнения (5) при условиях* $P_{B_0^*} = 0$ *и* $F_1(c_r^*) = 0$ *задача (6) имеет по меньшей мере одно решение*

$$x(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\ \left(x^{(1)}(t,\varepsilon),\ \dots\ ,\ x^{(n)}(t,\varepsilon)\right),$$

$$x^{(i)}(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b],\ x^{(i)}(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_*],\ \varepsilon_* \le \varepsilon_0,\ i = 1,2,\ \dots\ ,\ n,$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в нулевое* $x(t,0) \equiv 0$. *Здесь* $\mathrm{rank}\ P_{B_0} = \rho$, $P_{B_0}:\ R^d \to N(B_0)-$ $(d\times d)-$ *матрица-ортопроектор,* $P_{B_0^*}:\ R^r \to N(B_0^*)-$ $(r\times r)-$ *матрица-ортопроектор. Для построения решения задачи (6) при условии* $\lambda_{1,2} < 1$ *применима итерационная процедура*

$$x_1(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon),\ \xi_1(t,\varepsilon) = \varepsilon G\left[Z(z_0(s,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\right](t);$$

$$x_2(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon),\ \xi_2(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_1}(\varepsilon) + \xi_2^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$\xi_2^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\left[A_1(s)\xi_1(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(s);\ \ell_1\xi_1(\cdot,\ \varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))\right](t),$$

$$c_{r_1}(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1\xi_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\left[A_1(s)\xi_2^{(1)}(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right](\cdot)Big\} + P_\rho c_\rho(\varepsilon);$$

$$x_3(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \xi_3(t,\varepsilon),\ \xi_3(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_2}(\varepsilon) + \xi_3^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$\xi_3^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\left[A_1(s)\xi_2(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x_1,t,\varepsilon);\ \ell_1\xi_2(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1,\varepsilon)\right](t),$$

$$c_{r_2}(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\left\{\ell_1\xi_3^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1,\varepsilon) -\right.$$

$$\left.-\ell K\left[A_1(s)\xi_3^{(1)}(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x_2(s,\varepsilon),s,\varepsilon) - R_1(z_0(s,c_r^*) + x_1,s,\varepsilon)\right](\cdot)\right\} + P_\rho c_\rho;$$

. . . .

$$x_{k+3}(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{k+3}\xi_i(t,\varepsilon),\ \xi_{k+3}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_{k+2}}(\varepsilon) + \xi_{k+3}^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$\xi_{k+3}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\left[A_1(s)\xi_{k+2}(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x_{k+1},s,\varepsilon) - R_1(z_0(s,c_r^*) + x_k,s,\varepsilon);\right.$$

$$\left.\ell_1\xi_{k+2}(\cdot,\ \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_{k+1},\varepsilon) - J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_k,\varepsilon)\right](t),$$

$$c_{r_{k+1}}(\varepsilon) = -B_0^+ P_{Q_d^*}\left\{\ell_1\xi_{k+2}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x_k,\varepsilon) -\right.$$

$$\left.-\ell K\left[A_1(s)\xi_{k+2}^{(1)}(s,\varepsilon) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x_{k+1}(s,\varepsilon),s,\varepsilon) - R_1(z_0(s,c_r^*) + x_k,s,\varepsilon)\right](\cdot)\right\} +$$

$$+P_\rho c_\rho(\varepsilon),\dots,\ k = 1,2,3,\dots. \tag{11}$$

Наличие производных $A_2(t)$ и $\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*))$, а также условие $F_1(c_r^*) = 0$ отличают итерационную процедуру (11) от традиционной [4, 9]. Учет производных $A_2(t)$ и $\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*))$, вообще говоря, снимает дополнительные требования

$$\left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon=0}} \equiv 0, \quad \left.\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*),\\ \varepsilon=0}} = 0,$$

используемые при построении итерационной процедуры [9]. С другой стороны, условие $F_1(c_r^*) = 0$ не является необходимым условием преобразования краевой задачи (1)–(2) к операторной системе (9), а лишь условием упрощения этой процедуры. Как будет показано ниже, существуют краевые задачи, для которых условие $F_1(c_r^*) = 0$ выполняется. Итерационная процедура (11) использует представление искомого решения в виде суммы последовательности возмущений

$$x_1(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon),\ x_2(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon),\ x_3(t,\varepsilon) = x_2(t,\varepsilon) + \xi_3(t,\varepsilon), \ldots,$$

не является разложением искомого решения по степеням малого параметра и не предполагает разложений нелинейностей по степеням решения задачи (6).

Правые части уравнений итерационной процедуры (11) в отличие от традиционной схемы [4, 9] не содержат повторяющихся слагаемых, поэтому точность приближенных вычислений возрастает.

3. Пример построения итерационной процедуры

Убедимся в существовании решений и построим первые приближения к решению слабонелинейной краевой задачи

$$\frac{dz}{dt} = (2t-1)z + \varepsilon z \ln z,\ \ell z(\cdot) = z(0,\varepsilon) - z(1,\varepsilon) = 0. \tag{12}$$

Для этого исследуем порождающую задачу

$$\frac{dz_0}{dt} = (2t-1)z_0,\ \ell z_0(\cdot) = z_0(0) - z_0(1) = 0.$$

Нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциального уравнения (12) суть функция $X(t) = e^{t^2-t}$. Поскольку $Q = \ell X(\cdot) = 0$, постольку имеет место критический случай; при этом $r = d = 1$,

$$P_{Q^*} = P_{Q_d^*} = P_Q = P_{Q_r} = 1.$$

Общее решение порождающей задачи имеет вид $z_0(t,c) = ce^{t^2-t}$. Уравнение (5) в случае задачи (12) $F(c) = c\ln c - \frac{c}{6} = 0$ имеет единственное нетривиальное решение $c_1^* = e^{\frac{1}{6}} \approx 1,18136$; этот корень определяет производную

$$A_1(t) = \left.\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_1^*)\\ \varepsilon=0}} = t^2 - t + 7/6,$$

которая, в свою очередь, приводит к константе $B_0 = 1$. Поскольку $B_0 \neq 0$, то условие $P_{Q^*} \neq 0$ выполнено. В силу равенства $Q = Q^+ = 0$, оператор Грина совпадает с оператором Грина задачи Коши $G\left[f(s);\alpha\right](t) \equiv K\left[f(s)\right](t)$.

Первое приближение к отклонению от порождающего решения

$$x_1(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) = \varepsilon G\left[Z(z_0(s,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\right](t) = \varepsilon e^{\frac{1}{6}} e^{t^2-t}\left(\frac{t}{6} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)$$

позволяет проверить условие $F_1(c_r^*) = 0$ применимости доказанной теоремы. Второе приближение

$$x_2(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon),\ \xi_2(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_1}(\varepsilon) + \xi_2^{(1)}(t,\varepsilon)$$

к отклонению от порождающего решения определяет функция

$$\xi_2^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon^2\left(\frac{1}{18}t^6 - \frac{1}{6}t^5 + \frac{19}{72}t^4 - \frac{1}{4}t^3 + \frac{7}{72}t^2\right)\exp\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right).$$

Для нахождения величины $c_{r_1}(\varepsilon)$ положим $\varepsilon = 0,1$; при этом

$$c_{r_1}(0,1) \approx -0,0000\ 328\ 163.$$

Третье приближение

$$x_3(t,\varepsilon) = \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \xi_3(t,\varepsilon),\ \xi_3(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_2}(\varepsilon) + \xi_3^{(1)}(t,\varepsilon)$$

определяет величина $c_{r_2}(0,1) \approx -1,85\ 599 \cdot 10^{-10}$ и функция

$$\begin{aligned}
\xi_3^{(1)}(t,\varepsilon) \approx{}& -3,82\ 848\cdot 10^{-6}t + 5,46\ 926\cdot 10^{-6}t^2 + 4,16\ 575\cdot 10^{-5}t^3 - \\
&- 1,81\ 602\cdot 10^{-4}t^4 + 4,04\ 753\cdot 10^{-4}t^5 - 6,32\ 544\cdot 10^{-4}t^6 + 7,73\ 950\cdot 10^{-4}t^7 - \\
&- 7,93\ 765\cdot 10{-}4t^8 + 7,05\ 11\cdot 10^{-4}t^9 - 5,57\ 249\cdot 10^{-4}t^{10} + 3,99\ 035\cdot 10^{-4}t^{11} - \\
&- 2,61\ 999\cdot 10^{-4}t^{12} + 1,59\ 766\cdot 10^{-4}t^{13} - 9,09\ 811\cdot 10^{-5}t^{14} + 4,88\ 572\cdot 10^{-4}t^{15} - \\
&- 2,48\ 049\cdot 10^{-5}t^{16} + 1,19\ 972\cdot 10^{-5}t^{17} - 5,53\ 459\cdot 10^{-6}t^{18} + 2,45\ 004\cdot 10^{-6}t^{19} - \\
&- 1,041\ 317\cdot 10^{-6}t^{20} + 4.26\ 975\cdot 10^{-7}t^{21} - 1,68\ 926\cdot 10^{-7}t^{22} + 6,47\ 178\cdot 10^{-8}t^{23} - \\
&- 2,39\ 940\cdot 10^{-8}t^{24} + 8,62\ 143\cdot 10^{-9}t^{25} - 2,99\ 310\cdot 10^{-9}t^{26} + 1,00\ 159\cdot 10^{-9}t^{27} - \\
&- 3,20\ 955\cdot 10^{-10}t^{28} + 9,80\ 577\cdot 10^{-11}t^{29} - 2,84\ 558\cdot 10^{-11}t^{30} + 7,87\ 707\cdot 10^{-12}t^{31} - \\
&- 2,09\ 899\cdot 10^{-12}t^{32} + 5,45\ 898\cdot 10^{-13}t^{33}.
\end{aligned}$$

Оценить невязки первых трех приближений можно с использованием невязок в решении краевой задачи (1)–(2)

$$\begin{aligned}
\Delta_i(\varepsilon) = \Big\{&\|A(t)x_i(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*) + x_i(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - dx_i(t,\varepsilon)/dt\|^2_{C[0;1]} + \\
&+ \|\ell_1 x_i(\cdot) - J(z_0(\cdot,c_r^*) + x_i(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\|^2_{R^m}\Big\}^{\frac{1}{2}},\ i = 1,2,3\ .
\end{aligned}$$

Полагая $\varepsilon = 0,1$, находим невязки в решении краевой задачи (12)

$$\Delta_1(\varepsilon) \approx 1,63\ 663 \cdot 10^{-4},\ \Delta_2(\varepsilon) \approx 3,82\ 844 \cdot 10^{-6},\ \Delta_3(\varepsilon) \approx 4,22\ 500 \cdot 10^{-8}.$$

Для сравнения приведем невязки, получаемые при помощи метода простых итераций [1, 2, 9]

$$\Delta_1(0,1) \approx 1,16\ 055 \cdot 10^{-4},\ \Delta_2(0,1) \approx 3,82\ 851 \cdot 10^{-6},\ \Delta_3(0,1) \approx 1,22\ 684 \cdot 10^{-5}.$$

При значении $\varepsilon = 0,5$, близком к величине [7] $\varepsilon_* \approx 0,518\ 181$, невязки в решении краевой задачи (12) увеличиваются

$$\Delta_1(\varepsilon) \approx 4,10\ 414 \cdot 10^{-3},\ \Delta_2(\varepsilon) \approx 4,78\ 418 \cdot 10^{-4},\ \Delta_3(\varepsilon) \approx 4,59\ 347 \cdot 10^{-4}.$$

Список цитируемых источников

1. *Бойчук А.А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев.: Наук. думка, 1990. — 96 с.
2. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц.— М.: Наука, 1988. — 552 с.
4. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем.— М. Наука, 1979.— 432 с.
5. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.— 744 с.
6. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. 2 изд. Том 1. М.: Высшая школа, 1988. 712 с.
7. *Чуйко А.С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2005. — Т. 8, № 2. — С. 278 — 288.
8. *Чуйко С.М.* Модифицированный метод простых итераций в теории краевых задач (некритический случай) // Динамические системы. — 2007. — Вып. 22. — С. 109 — 114.
9. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.— Utrecht; Boston: VSP, 2004.— XIV + 317 pp.

Получена 15.09.2008