Динамические системы, том 3(31), No. 3-4, 327–340

УДК 539.3:624.131+539.215

Дисперсия и зависимости частотных характеристик скорости волн Био от параметров пористо-упругой среды с учетом диссипации

А. Р. Сницер

Крымский факультет Запорожского национального университета
Симферополь 95005. *E-mail: snitser_ arnold@yahoo.com*

Аннотация. В рамках теории М. Био исследуются дисперсия и зависимости частотных характеристик фазовых скоростей и коэффициента затухания поверхностной волны (ПВ) на проницаемой поверхности скважины в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде от ее фильтрационных свойств с учетом диссипации. На примере среды с заданными параметрами показано, что наличие межфазного взаимодействия уменьшает, а внутреннее трение в упругом скелете увеличивает относительную и абсолютную фазовые скорости ПВ. Оценено также влияние диссипативных характеристик среды на коэффициент затухания ПВ. Проведен анализ амплитудно-частотных характеристик фазовой скорости и коэффициента затухания ПВ при различных коэффициентах пористости и проницаемости среды.

Ключевые слова: модель Био, пористо-упругая насыщенная жидкостью среда, поверхностные волны на полости, дисперсионное уравнение, диссипация, межфазные взаимодействия, внутреннее трение, фазовая скорость, затухание, амплитудно-частотные характеристики.

1. Введение

Поверхностные волны (ПВ) на полой цилиндрической скважине в бесконечной упругой среде при ее гармонических колебаниях впервые исследованы в работе Био [9], а в случае упругого полупространства — в работе [14]. В этих работах для различных коэффициентов Пуассона приведены зависимости относительной фазовой скорости $\zeta = V/c_2$ поверхностной волны от отношения ее длины к диаметру полости $x = \Lambda/D$ и от отношения окружной длины скважины к длине поперечной волны в упругой среде — $\Omega = \pi D/\lambda_2$. Такие зависимости следуют из решения дисперсионных уравнений Био полученных из условий отсутствия напряжений на поверхности. Все упомянутые здесь переменные вещественны в силу отсутствия поглощения в среде. Компоненты перемещений ПВ представляют локализованные вблизи поверхности волны, распространяющиеся в направлении оси полости без затухания, с амплитудой убывающей экспоненциально в нормальном направлении к ее поверхности (вглубь среды). Исследование дисперсионных зависимостей для ПВ Био на полой цилиндрической скважине в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде (ПУНЖС)[1] приведено в статье автора [5]. В этой работе в качестве модели пористо-упругой среды принималась модель Био [10]. Расчеты проводились для среды Фэтта [4, 11] без учета диссипации. В указанной работе получены дисперсионные зависимости $\zeta(x)$ и $\zeta(\Omega)$ для различных коэффициентов пористости среды. При этом в безразмерных величинах ζ и Ω вместо скорости поперечных волн в упругой среде $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ (μ — модуль сдвига, ρ — плотность) и длины волны $\lambda_2 = c_2 T$

[1]Данная аббревиатура введена в монографии [7]

(T — период колебаний) принимались скорость поперечных волн в ПУНЖС без учета диссипации [5, 7]:

$$c_2 = \sqrt{\mu/(\rho_{11} - \rho_{12}^2/\rho_{22})}, \quad \rho_{11} = (1-m)\rho_s - \rho_{12}, \quad \rho_{22} = (m\rho_f - \rho_{12}) \tag{1.1}$$

и соответствующая длина волны $\bar{\lambda}_2 = c_2 T$. В формулах (1.1): μ — модуль сдвига упругого скелета, m — коэффициент пористости среды, ρ_s и ρ_f — плотности твердой и жидкой фаз, ρ_{12} — коэффициент динамической связи в модели Био.

В вопросах вибровоздействий на породы через поверхность полой скважины, применяемых в нефте- и газодобывающей промышленности, а также в практике мониторинга среды, важно знание распределения энергии по типам волн, среди которых существенное значение имеют поверхностные волны. Этот факт является одним из стимулов анализа таких волн в реальных породах с учетом максимального количества параметров среды.

Целью настоящей статьи является изучение зависимостей скорости и коэффициента затухания ПВ на цилиндрической полости в ПУНЖС с учетом диссипации от различных параметров среды и частот воздействий, вызывающих волновые процессы. Мы не будем, избегая громоздкости, проводить подробные выкладки, а по возможности ссылаться на номера частных поясняющих формул из работы [5], наделяя их дополнительным знаком (*).

2. Диссипация в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде

Диссипация энергии при динамических явлениях в ПУНЖС имеет место вследствие взаимодействия твердой и жидкой фаз и внутреннего трения в упругом скелете.

Диссипативный член в уравнениях М.Био, учитывающий силы межфазного взаимодействия в среде имеет вид [10]:

$$b = \left(\frac{m^2\theta_0}{k_{pr}}\right) F(\omega), \tag{2.1}$$

где m, k_{pr}, θ_0 — коэффициенты пористости, проницаемости и динамической вязкости среды соответственно. Функция $F(\omega)$, определяющая частотную зависимость диссипативного члена, в трехмерном случае имеет вид:

$$F(k(\omega)) = \frac{kT(k)}{4[1 - 2T(k)/ik]}, \quad T(k) = e^{i\pi/4} I_1(ke^{i\pi/4})/I_0(ke^{i\pi/4}), \tag{2.2}$$

где: $I_0(z)$, $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя; $k = \alpha_2\sqrt{\omega/\nu_f}$, $\alpha_2 = \eta\sqrt{k_{pr}/m}$ — структурный коэффициент, ν_f — кинематическая вязкость, η — коэффициент, учитывающий геометрию пор. В дальнейшем будем предполагать поры сферическими, для которых эксперимент дает $\eta = 3.2$ [1, 8].

Согласно теории М.Био [10], частотная область определения функции $F(\omega)$ находится из следующих физических соображений. Для частот $\omega < \omega_1$, когда течение жидкости в порах подчиняется закону Пуазейля, можно считать функцию $F(\omega)$ равной единице (не зависящей от частоты). На частотах $\omega > \omega_2$ при размерах пор, соизмеримых с длинами волн, течение жидкости в пористо-упругой среде не описывается теорией М.Био. Критические частоты находятся по формулам:

$$f_1 = \pi\theta_0/4d^2\rho_f, \quad f_2 = c_2/d, \quad \omega_{1,2} = 2\pi f_{1,2}, \tag{2.3}$$

где $d = 2a_1$ — эффективный диаметр пор, c_2 — скорость поперечных волн в двухфазной среде без учета диссипации определяется формулой (1.1).

Для учета диссипации за счет внутреннего трения в упругом скелете двухфазной среды введен комплексный модуль сдвига [3, 7, 15]: $\tilde{\mu} = \mu e^{i\gamma}$, γ — коэффициент внутреннего трения. При этом упругие параметры среды: λ, Q, A, R, H, в силу их кратности модулю сдвига [7], также станут комплексными и зависящими от коэффициента внутреннего трения (в этом случае в дальнейшем их будем обозначать: $\tilde{\lambda}$, $\tilde{Q}$,...).

3. Поверхностные волны при сосредоточенном воздействии на поверхность скважины

Если в задаче [5] о гармоническом воздействии на проницаемую поверхность скважины в ПУНЖС в граничном условии (4*): $\sigma_{rr}(a, z) = -p_1(z)\exp(i\omega t)$ выбрать нагрузку в виде сосредоточенного по окружности $r = a$, в плоскости $z = 0$ воздействия:

$$p_1(z) = p\delta(z), \tag{3.1}$$

то для составляющих вектора перемещений твердой фазы мы получим из (35*) – (36*):

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_r(r,z) \\ u_z(r,z) \end{pmatrix} = -\frac{p}{2\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix} \xi^{-1} & F_r(r,\xi) \\ (i\bar{\beta}_0)^{-1} & F_z(r,\xi) \end{pmatrix}\frac{e^{i\xi z}}{\mathcal{D}(\xi)}d\xi, \tag{3.2}$$

где

$$\begin{pmatrix} F_r(r,z) \\ F_z(r,z) \end{pmatrix} = \frac{(2\xi^2 - \bar{k}_2^2)}{\mathcal{N}(\xi)}\begin{pmatrix} \mathcal{A}_1(r) \\ \mathcal{A}_0(r) \end{pmatrix} - 2\frac{\mathcal{B}(r)}{\mathcal{N}(\xi)}\begin{pmatrix} \xi^2 \\ (\bar{\beta}_0\bar{\beta}_2) \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{D}(\xi) = 4\xi\bar{\beta}_2\left[\frac{1}{a\bar{\beta}_2} - H_2\right]\frac{\mathcal{B}(a)}{\mathcal{N}(\xi)} - \frac{2\xi^2 - \bar{k}_2^2}{\xi}\left[\frac{2}{a} + \frac{2\xi^2 - 2\alpha_0^2}{\bar{\beta}_0}H_0\right], \tag{3.4}$$

$$\mathcal{A}_i(r) = TH_1\mathcal{H}^{(i)}(\bar{\beta}_0 r) - \left(\frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_0}\right)^i H_0\mathcal{H}^{(i)}(\bar{\beta}_1 r), \quad \mathcal{B}(r) = (TH_1 - BH_0)\mathcal{H}^{(1)}(\bar{\beta}_2 r), \tag{3.5}$$

$$\mathcal{N}(\xi) = TH_1 - EH_0, \quad \mathcal{H}^{(i)}(\bar{\beta}_j r) = \frac{H_i^{(2)}(\bar{\beta}_j r)}{H_1^{(2)}(\bar{\beta}_j a)}, \quad H_j = \frac{H_0^{(2)}(\bar{\beta}_j a)}{H_1^{(2)}(\bar{\beta}_j a)}, \quad i = 0, 1; \tag{3.6}$$

$$\bar{\beta}_j = \sqrt{\bar{k}_j^2 - \xi^2}, \quad j = 0, 1, 2. \tag{3.7}$$

Входящие в (3.5), (3.6) коэффициенты $E = E_1/E_0$, $T = (T_1\bar{k}_1^2)/(T_0\bar{k}_0^2)$ определяются выражениями (29*) – (31*), (12*), (13*); индексы $j = 0, 1, 2$ соответствуют медленной продольной, быстрой продольной и поперечной волнам.

Для изучения структуры волнового поля, в ПУНЖС, вызванного указанным динамическим воздействием, формальные выражения (3.2) для вектора перемещений твердой фазы среды следует представить контурными интегралами в комплексной плоскости. При этом для удовлетворения условий излучения и учета особенностей подынтегральных функций, ветви трех двузначных радикалов (3.7), соответствующих постоянным распространения $\bar{k}_j$ трех типов объемных волн в ПУНЖС, выбираются так, чтобы

$$\mathrm{Im}\bar{\beta}_j = \mathrm{Im}\sqrt{\bar{k}_j^2 - \xi^2} < 0. \tag{3.8}$$

Для проведения контурных преобразований интегралов (3.2) из комплексных точек ветвления $\zeta = \pm\bar{k}_j$ проводятся разрезы вдоль линий $\mathrm{Im}\bar{\beta}_j = 0$, строится шестилистная риманова поверхность и выбирается лист, на котором выполняется условие (3.8) для всех трех типов волн. Техника контурных преобразований аналогична преобразованиям, проведенным в работах [2, 6].

В данной работе нас интересует возникающая в результате контурных преобразований составляющая, которая определяет поверхностную волну на полости. Такую составляющую при контурных представлениях интегралов на указанном листе римановой поверхности дают вычеты в точках $\xi = \xi_B$, являющихся нулями дисперсионного соотношения (3.4). Так как задача рассматривается с учетом диссипации в среде, то корни дисперсионного уравнения $\mathcal{D}(\xi_B) = 0$ становятся комплексными (в отсутствие диссипации они вещественны), так что: $\xi_B = \mathrm{Re}(\xi_B) + i\mathrm{Im}(\xi_B)$.

В среде без диссипации ПВ экспоненциально затухают вглубь среды (по радиусу $r > a$) и без затухания распространяются вдоль ее поверхности ($|z| < \infty$). Наша цель — исследовать, как изменится характер ПВ в задаче при учете диссипации в среде.

Для проведения контурных преобразований интегралов (3.2) необходимо учесть следующее. Сосредоточенная по окружности $r = a$, $z = 0$ нагрузка (3.1) вызывает как объемные волны в среде, так и поверхностные волны, которые распространяются от источника в противоположных направлениях: $z > 0$ и $z < 0$. При переходе к контурным интегралам необходимо зафиксировать, для каких значений будут рассматриваться перемещения (3.2). Это связано с использованием леммы Жордана для оценки интегралов по окружности большого радиуса [13]. Так, например, для $z < 0$ можно образовать контур, обходящий разрезы и замыкающийся окружностью большого радиуса в нижней полуплоскости. В этом случае вычисляя вычеты подынтегральных функций в (3.2) при значениях $\xi = \xi_B$ и затем, отделяя вещественную часть в полученных выражениях, находим компоненты ПВ, бегущей против положительного направления оси z:

$$u^{Bio} = \begin{pmatrix} u_r^{Bio}(r,z) \\ u_z^{Bio}(r,z) \end{pmatrix} = \frac{p}{\mu|\mathcal{D}'(\xi_B)|} \begin{pmatrix} \left|\frac{F_r(r,\xi_B)}{\xi_0}\right| \\ \left|\frac{F_z(r,\xi_B)}{i\bar{\beta}_0(\xi_B)}\right| \end{pmatrix} e^{-z\mathrm{Im}\xi_B} \cos\left[\omega t + z\mathrm{Re}\xi_B + \begin{pmatrix} \phi_r \\ \phi_z \end{pmatrix}\right], \tag{3.9}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_r \\ \phi_z \end{pmatrix} = \arg\begin{pmatrix} \frac{pF_r(r,\xi_B)}{\mu\xi_0\mathcal{D}'(\xi_B)} \\ \frac{pF_z(r,\xi_B)}{i\mu\bar{\beta}_0(\xi_0)\mathcal{D}'(\xi_B)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}'(\xi_B) = \left.\frac{\partial\mathcal{D}(\xi)}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_B}. \tag{3.10}$$

Как и в работе [5], введем безразмерные величины

$$\zeta_j = \frac{\bar{k}_j}{\xi} = \frac{\bar{V}}{\bar{c}_j}, \quad \bar{k}_j = \frac{\omega}{\bar{c}_j}, \quad j = 0,1,2; \quad x = \bar{\Lambda}/D, \quad \bar{\Lambda} = vT = v\frac{2\pi}{\omega}, \tag{3.11}$$

где $\bar{V}$ — скорость поверхностных волн на полости (комплексная величина);

$$\bar{c}_0 = \sqrt{\tilde{H}/\rho z_0}, \quad \bar{c}_1 = \sqrt{\tilde{H}/\rho z_1}, \quad \bar{c}_2 = \sqrt{\tilde{\mu}(\rho_{11} + \rho_{12}M_2)} \tag{3.12}$$

— скорости медленной продольной, быстрой продольной и поперечной волн в ПУНЖС с учетом диссипации (комплексные величины); x (вещественная величина) – отношение длины поверхностной волны в ПУНЖС к диаметру цилиндрической полости; v —

фазовая скорость ПВ (ниже будет показано, что $v = 1/\mathrm{Re}\bar{V}^{-1}$); z_0, z_1 — корни квадратного уравнения (19*) с коэффициентами, определяемыми выражениями (15*), (16*) и диссипативным членом (2.1); в выражениях (3.12) ρ и M_2 имеют вид:

$$\rho = \rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12}, \quad M_2 = (b/i\omega - \rho_{12})/(b/i\omega + \rho_{22}). \tag{3.13}$$

Введение отношений $\sigma_j = \bar{c}_2/\bar{c}_j$, $j = 0, 1, 2$ дает:

$$\sigma_j = \sqrt{\tilde{\mu}\rho z_j/\tilde{H}(\rho_{11} + \rho_{12}M_2)}, \quad j = 0, 1; \quad \sigma_2 = 1; \quad \zeta_j = \sigma_j\zeta, \quad \zeta_2 = \zeta. \tag{3.14}$$

В результате замены переменных дисперсионное соотношение (3.4) приводим к виду:

$$\mathcal{D}(\xi) = a^{-2}\left(\frac{\pi}{x}\right)^2 \Delta_0(\zeta, x), \tag{3.15}$$

$$\Delta_0(\zeta, x) = 4\left[\frac{x}{\pi} + \sqrt{1-\zeta^2}\mathcal{K}_2\right]\frac{\mathcal{B}(a)}{\mathcal{N}(\zeta)} - 2(2-\zeta^2)\left[\frac{x}{\pi} + \frac{1 - r_0\sigma_0^2\zeta^2}{\sqrt{1-\sigma_0^2\zeta^2}}\mathcal{K}_0\right]. \tag{3.16}$$

Здесь

$$\mathcal{B}(a) = \frac{\sqrt{1-\sigma_1^2\zeta^2}}{\sqrt{1-\sigma_0^2\zeta^2}}\mathcal{K}_0 - \tau\frac{z_1}{z_0}\mathcal{K}_1, \quad \mathcal{N}(\zeta) = \frac{e_1(\zeta)}{e_0(\zeta)}\mathcal{K}_0 - \tau\frac{z_1}{z_0}\mathcal{K}_1, \tag{3.17}$$

$$e_j(\zeta) = \sqrt{1-\sigma_j^2\zeta^2} + \frac{\pi}{x}(1 - r_j\sigma_j^2\zeta^2)\mathcal{K}_j, \quad r_j = 1 + T_j/2\tilde{\mu}, \quad j = 0, 1. \tag{3.18}$$

$$\mathcal{K}_j = \frac{K_0\left(\frac{\pi}{x}\sqrt{1-\sigma_j^2\zeta^2}\right)}{K_1\left(\frac{\pi}{x}\sqrt{1-\sigma_j^2\zeta^2}\right)}, \quad j = 0, 1, 2; \quad \zeta = \zeta_2 = \frac{\bar{V}}{\bar{c}_2}, \tag{3.19}$$

$K_j(z)$ — функция Макдональда.

Заметим, что переменная $\zeta = \zeta_2$, введенная согласно (3.11), есть отношение комплексной скорости ПВ в ПУНЖС к скорости поперечных волн с учетом диссипации. Нас будет интересовать скорость ПВ по отношению к скорости, независимой от частоты воздействия (и следовательно от диссипативной функции b, зависящей от частоты ω). Поэтому введем относительную скорость ПВ:

$$\tilde{\zeta} = \frac{\bar{V}}{c_2} = q\zeta, \quad q = \frac{\bar{c}_2}{c_2}, \tag{3.20}$$

где c_2 — скорость поперечных волн в ПУЖС без учета диссипации (не зависящая от частоты воздействия вещественная величина, определяемая согласно (1.1)).

В результате указанных замен переменных выражение (3.9) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} u_r^{Bio} \\ u_z^{Bio} \end{pmatrix} = \frac{pa^2x^2}{\pi^2\mu|\Delta_0'(\zeta_B, x)|}\begin{pmatrix} \left|\frac{F_r(R,\zeta_B)}{\zeta_B}\right| \\ \left|\frac{F_z(R,\zeta_B)}{i\beta_0(\zeta_B)}\right| \end{pmatrix}\exp\left(-z\frac{c_2}{\omega}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\tilde{\zeta}_B}\right)\right)\times$$
$$\times\cos\omega\left[t + z\mathrm{Re}\left(\frac{1}{c_2\tilde{\zeta}_b}\right) + \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}\phi_r \\ \phi_z\end{pmatrix}\right]. \tag{3.21}$$

Из полученного выражения следует, что компоненты перемещений ПВ Био в случае введения диссипации в среду представляют неоднородную бегущую волну в направлении $z < 0$ с фазовой скоростью v и нормированным коэффициентом затухания β_B:

$$v = dz/dt = -c_2/\mathrm{Re}(\tilde{\zeta}_B)^{-1}, \quad \beta_B = \mathrm{Im}(\tilde{\zeta}_B)^{-1}. \tag{3.22}$$

Кроме этого, вследствие комплексности корня ζ_B и волновых чисел $\bar{k}_i = \omega/\bar{c}_i$, комплексной становится величина $\bar{\beta}_i^{(B)} = \sqrt{\bar{k}_i^2 - \xi_B^2}$. Тогда, в силу зависимости перемещений от функции Ханкеля (см. выражения (3.2) – (3.6)), это приводит к распространению ПВ также и в радиальном направлении, в то время как без учета диссипации волна в радиальном направлении не распространялась, а лишь экспоненциально затухала.

Из (3.22) следует, что относительная фазовая скорость при учете диссипации принимает вид

$$v/c_2 = \pm 1/\mathrm{Re}(\tilde{\zeta}_B)^{-1}. \tag{3.23}$$

Отметим, что полученное выражение отличается по виду от вещественной части введенной согласно (3.11) относительной комплексной скорости ПВ Био[2]: $\mathrm{Re}(\bar{V}/c_2) = \pm\mathrm{Re}\,\tilde{\zeta}_B$. В случае отсутствия диссипации в среде, нули $\tilde{\zeta}_B$ дисперсионного выражения (3.16) вещественны и только в этом случае эти разные выражения (v/c_2 и $\bar{V}/c_2$) дают одно и то же вещественное значение — $\tilde{\zeta}_B$, а коэффициент затухания при этом исчезает — $\beta_B = 0$.

4. Влияние диссипации на частотные зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания волн Био при различных фильтрационных параметрах среды

С целью изучения влияния диссипативных и фильтрационных свойств среды на частотные и дисперсионные характеристики фазовой скорости и коэффициент затухания ПВ Био, решалось дисперсионное уравнение (3.16) при различных значениях коэффициентов пористости — m, проницаемости — k_{pr}, внутреннего трения — γ, и фиксированных упругих параметрах пористо-упругой среды [12][3]:

$$\begin{aligned}
&\lambda = 1.47\cdot 10^8\ \text{Н/м}^2; && \mu = 9.79\cdot 10^7\ \text{Н/м}^2;\\
&Q = 2.7948\cdot 10^8\ \text{Н/м}^2; && R = 2.74\cdot 10^8\ \text{Н/м}^2;\\
&A = \lambda + 1.02\,Q; && H = A + 2\mu + R + 2Q;\\
&\rho_f = 9.94\cdot 10^2\ \text{кг/м}^3; && \rho_s = 2.67\cdot 10^3\ \text{кг/м}^3;\\
&\rho_{12} = 0; && \nu = 0.25 \text{ — коэф. Пуассона.}
\end{aligned}$$

При расчетах функций $b(\omega)$ и $F(k)$ для коэффициентов динамической и кинематической вязкости поровой жидкости взяты значения $\theta_0 = 10^{-3}$ Н$\cdot$с/м, $\nu_f = 2.1\cdot 10^{-6}$ м^2/с. Радиус a полости полагался равным 0.2 м.

[2]Введение относительной комплексной скорости в виде (3.20) не означает автоматически, что ее вещественная часть определяет относительную фазовую скорость. Подставляя комплексный корень дисперсионного уравнения в выражение (3.9) и приравнивая нулю производную по времени от выражения под знаком косинуса, получим фазовую скорость в виде (3.22).

[3]В случае наличия внутреннего трения в упругом скелете среды все упругие константы следует умножать на коэффициент $\exp(i\gamma)$ [7].

На рис. 1 а) и б) представлены зависимости относительной скорости и коэффициента затухания ПВ Био от относительной длины волны при различных значениях коэффициента пористости среды и коэффициента Пуассона. Расчеты проводились с учетом только взаимодействия жидкой и твердой фаз в ПУНЖС, т.к. именно этот вид диссипации зависит от частоты, внутреннее трение в скелете, не зависящее от частоты, здесь не учитывалось. Сериям кривых 1a – 4a, 1b – 4b, 1c – 4c соответствуют коэффициенты Пуассона $\nu = 0.49$; 0.25; 0; кривым 1a, 1b, 1c – коэффициент пористости среды $m = 0$; кривым 2a, 2b, 2c — $m = 0.15$, кривым 3a, 3b, 3c — $m = 0.25$, кривым 4a, 4b, 4c — $m = 0.35$. Из приведенных на рис. 1 а) и б) графиков следует, что с увеличением коэффициента Пуассона относительная скорость ПВ растет, а коэффициент затухания уменьшается (сравнить, например, кривые 4c, 4b, 4a). Сравнивая серии кривых 4a, 4b, 4c; 3a, 3b, 3c и 2a, 2b, 2c, можно заключить, что при заданных коэффициентах Пуассона увеличение коэффициента пористости среды ведет к уменьшению относительной скорости ПВ и росту коэффициента затухания. Заметим, что кривые 1a, 1b, 1c на рис. 1 а) при коэффициентах пористости среды равных нулю совпадают с дисперсионными кривыми для ПВ в упругой среде с цилиндрической полостью при коэффициентах Пуассона $\nu = 0.49$; 0.25; 0 соответственно [9, 14].

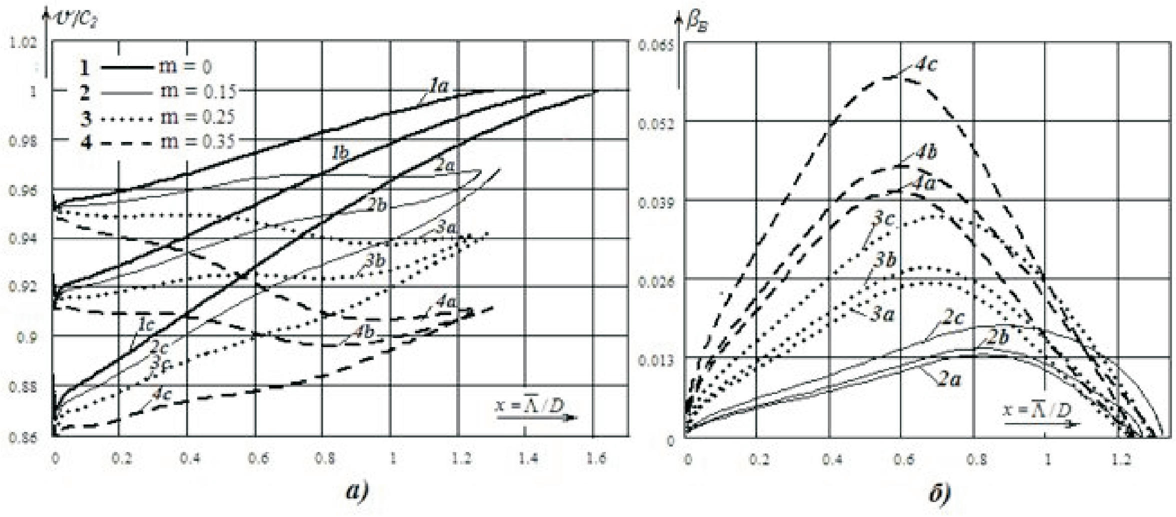


Рис. 1. Влияние пористости среды на зависимости фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) волн Био от отношения длины волны к диаметру полости. Расчеты проведены при параметрах: $k_{pr} = 10^{-10}$ м^2, $a = 0.2$ м, $\gamma = 0$, с учетом межфазного взаимодействия ($b \neq 0$). Кривым 1a – 4a соответствует коэффициент Пуассона — $\nu = 0.49$; кривым 1b – 4b — $\nu = 0.25$; кривым 1c – 4c — $\nu = 0$.

На рис. 2 а) и б) представлены зависимости относительной фазовой скорости $v/c_2 = 1/\mathrm{Re}(\tilde{\zeta}_B)^{-1}$ и нормированного коэффициента затухания $\beta_B = \mathrm{Im}(\tilde{\zeta}_B)^{-1}$ (см. в выражении (3.21) показатель экспоненты) от относительной частоты $\Omega = \pi D/\bar{\lambda}_2$ при различных значениях коэффициента внутреннего трения γ в упругом скелете, с учетом ($b \neq 0$) и без учета ($b = 0$) межфазного взаимодействия в среде Био. Сравнение кривых 1 с 4 и 2 с 3 на рис. 2 а) показывает, что учет межфазного взаимодействия в среде существенно уменьшает относительную фазовую скорость. Наличие же внутреннего трения в скелете (сравнить кривые 1 с 2 и 3 с 4) незначительно увеличивает скорость. Оценивая частотные зависимости коэффициента затухания на рис. 2 б) отметим, что вклад в затухание диссипативного члена $b(\omega)$ — (2.1), при фиксированных коэффициентах проницаемости и пористости среды и динамической вязкости жидкости не меняется (сравнить кривые 3 и 4), а лишь складывается с вкладом определяемым наличием внутреннего трения в твердой фазе (кривые 1, 2, 5, 6). При этом с ростом коэффициента γ возрастает и коэффициент затухания (сравнить

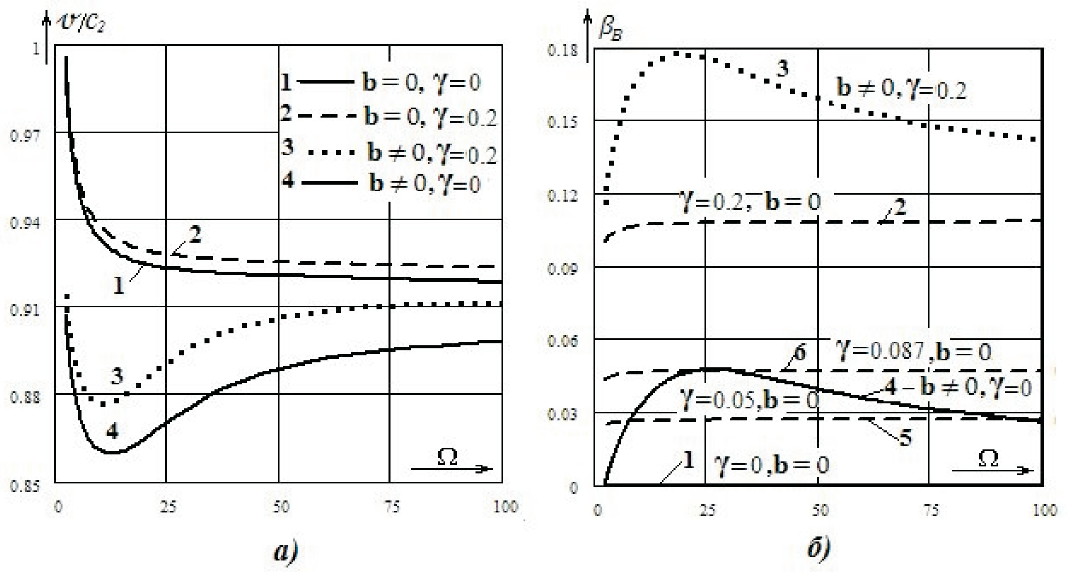


Рис. 2. Влияние диссипативных характеристик среды на частотные зависимости фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) волн Био. Кривые 1 — зависимости в отсутствие диссипации ($\gamma = 0$, $b = 0$); 2, 5, 6 соответствуют диссипации за счет внутреннего трения в скелете ($\gamma \neq 0$, $b = 0$), 4 — диссипация за счет межфазного взаимодействия ($\gamma = 0$, $b \neq 0$), 3 учитывает полную диссипацию ($\gamma \neq 0$, $b \neq 0$). Расчеты проведены при параметрах: $k_{pr} = 10^{-11}$ м^2, $m = 0.35$, $\nu = 0.25$, $a = 0.2$ м.

кривые 1, 5, 6, 2, соответствующие отсутствию межфазного взаимодействия: $b = 0$). Из рис. 2 б) также видно, что соотношение между вкладами в затухание от диссипации за счет внутреннего трения в скелете и межфазного взаимодействия существенно зависит от величины коэффициента внутреннего трения. Сравнивая кривые 5, 6, 2, соответствующие коэффициентам $\gamma = 0.05$, 0.087, 0.2, в отсутствии межфазного взаимодействия в среде с кривой 4, отвечающей за затухание только за счет межфазного взаимодействия, можно видеть, что $\beta_B(\gamma = 0.05,\ b = 0) < \beta_B(\gamma = 0,\ b \neq 0)$ — кривые 5, 4; $\beta_B(\gamma = 0.087,\ b = 0) \leq \beta_B(\gamma = 0,\ b \neq 0)$ — кривые 6, 4; $\beta_B(\gamma = 0.2,\ b = 0) > \beta_B(\gamma = 0,\ b \neq 0)$ — кривые 2, 4. Это означает, что затухание за счет только внутреннего трения в скелете может быть меньше, равно или больше, чем затухание за счет только межфазного взаимодействия в среде.

На рис. 3 в логарифмическом масштабе циклической частоты представлены частотные зависимости относительной фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) ПВ Био при различных коэффициентах пористости среды. Из рис. 3 а) видно, что относительные фазовые скорости ПВ Био уменьшаются с ростом коэффициента пористости m, их частотные максимумы при этом сдвигаются в область более высоких частот, и выше некоторой частоты (для выбранных здесь параметров среды $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 800$ Гц) графики для всех значений m сливаются и принимают постоянное значение, которое с ростом частоты почти не изменяется. Коэффициент затухания, как видно из графиков на рис. 3 б), с ростом коэффициента пористости возрастает, его резонансные пики при этом сдвигаются в область возрастания частоты.

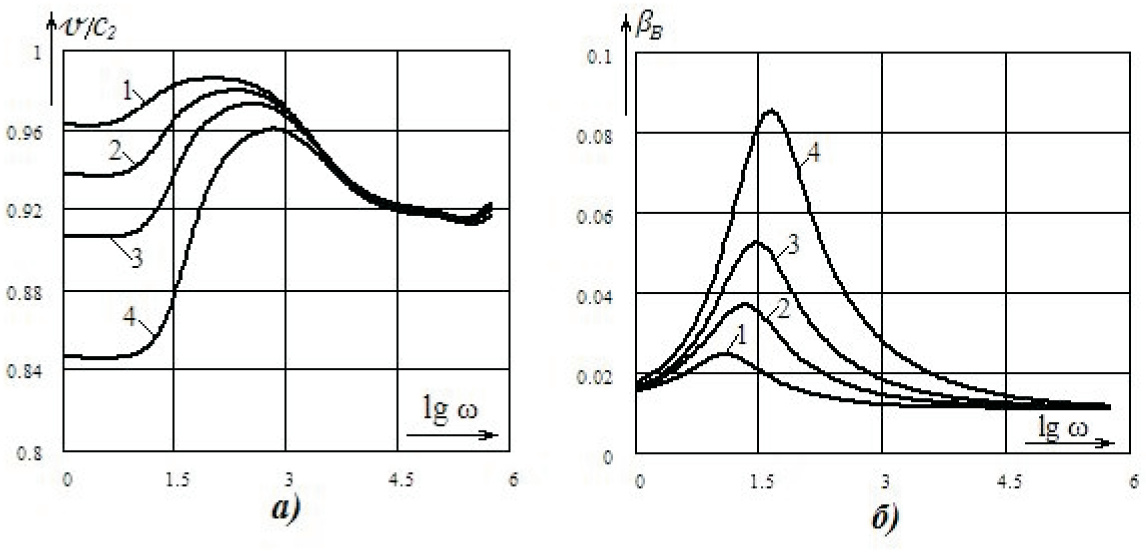


Рис. 3. Влияние коэффициента пористости среды на частотные характеристики относительной фазовой скорости (а) и коэффициент затухания (б) волн Био. Кривым 1 – 4 соответствуют коэффициенты пористости среды $m = 0.15,\ 0.25,\ 0.35,\ 0.5$ соответственно. Расчеты проведены с учетом сил межфазного взаимодействия ($b \neq 0$) при параметрах среды: $k_{pr} = 10^{-8}$ м^2, $\gamma = 0.02$, $\nu = 0.25$, $a = 0.2$ м.

В силу зависимости скорости c_2 поперечных волн в ПУНЖС (относительно которой проводится анализ влияния параметров среды на скорость ПВ) от коэффициента пористости среды m (см. выражение (1.1) для c_2), зависимости на рис. 3 а) не отражают влияние пористости на абсолютную скорость ПВ. Поэтому проводились расчеты частотных характеристик абсолютной скорости ПВ $v = -c_2/\mathrm{Re}(\tilde{\zeta}_B)^{-1}$ при различных значениях коэффициента пористости. На рис. 4 представлены частотные зависимости абсолютной фазовой скорости (а) и коэффициента затухания (б) ПВ Био при различных коэффициентах пористости среды. Из рис. 4 а) видно, что абсолютные фазовые скорости ПВ Био возрастают с ростом коэффициента пористости среды. Этот результат качественно согласуется с работами [5, 7]. Расчеты проведены при параметрах среды: $k_{pr} = 10^{-8}$ м^2, $\nu = 0.25$, $a = 0.2$ м, $\gamma = 0.2$ с учетом сил межфазного взаимодействия ($b(\omega) \neq 0$ — сплошные кривые 1b – 3b) и без учета этих сил ($b(\omega) = 0$ — штрихпунктирные кривые 1a – 3a). Кривым 1a – 3a и 1b – 3b соответствуют коэффициенты пористости среды $m = 0.15$, 0.25, 0.5. При учете сил межфазного взаимодействия абсолютные фазовые скорости ПВ Био уменьшаются по сравнению со скоростями при учете только сил внутреннего трения (сравнить 1a с 1b, 2a с 2b, 3a с 3b). Из графиков на рис.4 б) следует, что лишь при наличии сил межфазного взаимодействия коэффициент затухания зависит от коэффициента пористости среды (возрастает вместе с ростом пористости – кривые 1b – 3b). Если силы межфазного взаимодействия не учитывать, то коэффициент затухания не зависит от пористости (кривые 1a – 3a) и определяется только величиной коэффициента внутреннего трения γ.

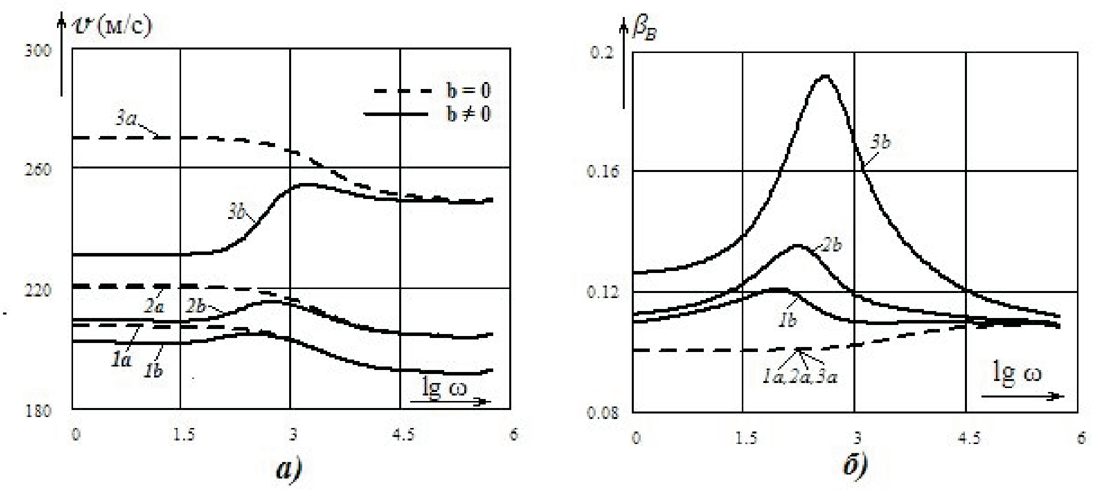
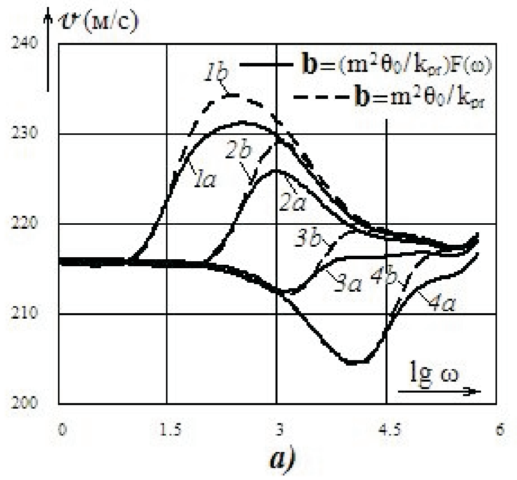


Рис. 4. Влияние коэффициента пористости среды на частотные характеристики абсолютной фазовой скорости (а) и коэффициент затухания (б) волн Био при коэффициенте внутреннего трения $\gamma = 0.2$ с учетом (сплошные кривые 1b – 3b) и без учета (штрихпунктирные кривые 1a – 3a) сил межфазного взаимодействия. Кривым 1a – 3a и 1b – 3b соответствуют коэффициенты пористости среды $m = 0.15$, 0.25, 0.5 соответственно. Расчеты проведены при параметрах среды: $k_{pr} = 10^{-8}$ м^2, $\nu = 0.25$, $a = 0.2$ м.

Частотные зависимости абсолютной фазовой скорости v и коэффициента затухания β_B ПВ Био при различных коэффициентах проницаемости среды представлены графиками на рис. 5. Расчеты проводились при параметрах среды: $m = 0.35$, $\gamma = 0.02$, $\nu = 0.25$, $a = 0.2$ м с учетом функции $F(\omega)$, определяющей частотную зависимость диссипативного члена межфазного взаимодействия ($b = (m^2\theta_0/k_{pr})F(\omega)$ — сплошные кривые 1a – 4a) и без учета такой зависимости ($F(\omega) = 1$ — штрихпунктирные кривые 1b – 4b). Кривым

1a – 4a и 1b – 4b соответствуют коэффициенты проницаемости среды $k_{pr} = 10^{-8}$, 10^{-9}, 10^{-10}, 10^{-11} м^2. Из графиков видно, что с уменьшением коэффициентов проницаемости абсолютная фазовая скорость ПВ Био уменьшается, а резонансные частоты коэффициентов затухания возрастают вместе с незначительным увеличением их амплитуд. Учет частотной функции $F(\omega)$ в диссипативном члене b дает незначительные уменьшения амплитуд абсолютной скорости v и коэффициента затухания β_B в сравнении со случаем, когда эту функцию полагали равной единице (сравнить серии кривых 1a – 4a и 1b – 4b).



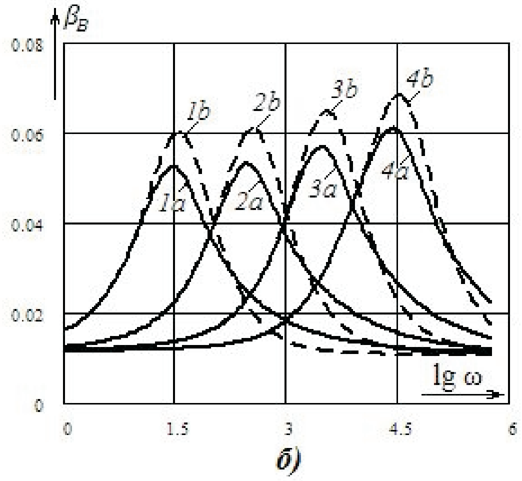


Рис. 5. Влияние коэффициента проницаемости среды на частотные характеристики абсолютной фазовой скорости (а) и коэффициент затухания (б) волн Био при коэффициенте внутреннего трения $\gamma = 0.02$ с учетом (сплошные кривые 1a – 4a) и без учета (штрихпунктирные кривые 1b – 4b) зависимости сил межфазного взаимодействия от частоты. Кривым 1a – 4a и 1b – 4b соответствуют коэффициенты проницаемости среды $k_{pr} = 10^{-8}$, 10^{-9}, 10^{-10}, 10^{-11} м^2. Расчеты проведены при параметрах среды: $m = 0.35$, $\nu = 0.25$, $a = 0.2$ м.

Для оценки влияния коэффициента внутреннего трения на частотные характеристики абсолютной фазовой скорости и коэффициент затухания волн Био, были проведены соответствующие расчеты с учетом сил межфазного взаимодействия при параметрах среды: $k_{pr} = 10^{-10}$ м^2, $m = 0.25$, $\nu = 0.25$, $a = 0.2$ м. Кривые 1 – 4 на рис. 6 соответствуют значениям $\gamma = 0.02, 0.1, 0.2, 0.3$. Из графиков видно, что с ростом коэффициента внутреннего трения абсолютные фазовые скорости и коэффициенты затухания ПВ Био возрастают.

5. Заключение

В работе исследовалось влияние диссипации, пористости и проницаемости среды на дисперсионные и частотные характеристики фазовой скорости и коэффициента затухания ПВ Био вдоль полости в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде.

Показано, что диссипация приводит к затуханию ПВ вдоль полости в направлениях от источника, в то время как в отсутствии диссипации затухания нет. Общая диссипация

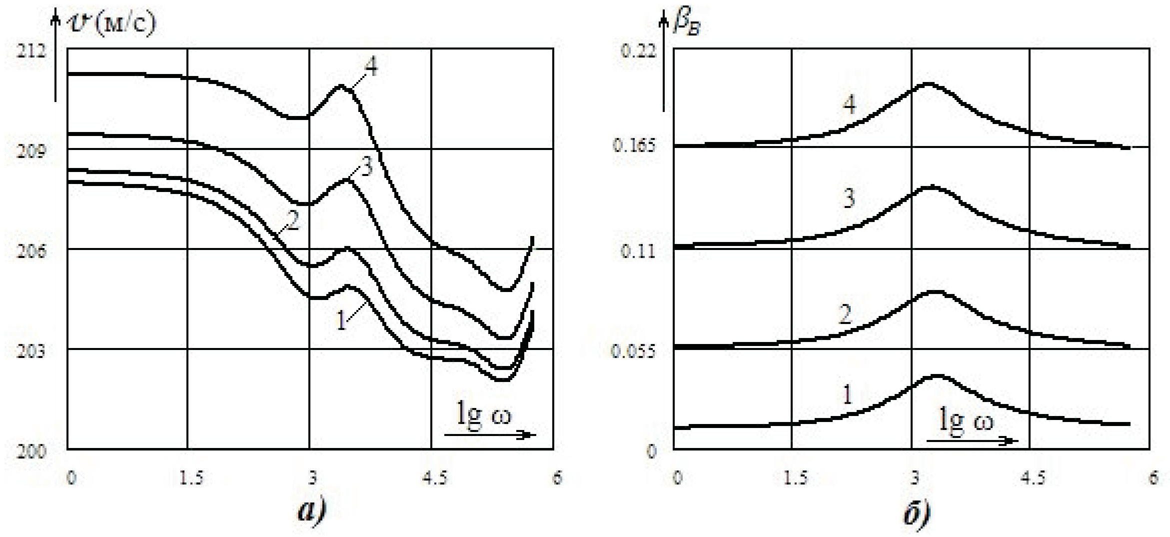


Рис. 6. Влияние коэффициента внутреннего трения на частотные характеристики абсолютной фазовой скорости (а) и коэффициент затухания (б) волн Био. Кривым 1 – 4 соответствуют коэффициенты внутреннего трения $\gamma = 0.02,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3$ соответственно. Расчеты проведены с учетом сил межфазного взаимодействия ($b \neq 0$) при параметрах среды: $k_{pr} = 10^{-10}$ м^2, $m = 0.25$, $\nu = 0.25$, $a = 0.2$ м.

в ПУНЖС обусловлена действием сил вязкого трения между жидкой и твердой фазами среды (межфазное взаимодействие) и сил внутреннего трения в упругом скелете. Установлено, что межфазное взаимодействие уменьшает относительную и абсолютную фазовую скорости ПВ, по сравнению со скоростями в его отсутствии (рис. 2 а, 4 а). Коэффициент затухания ПВ в случае отсутствия межфазного взаимодействия при заданных значениях коэффициента внутреннего трения практически не зависит от частоты (рис. 2б) или монотонно возрастает (рис. 4б). Учет межфазного взаимодействия придает амплитудно-частотным характеристикам коэффициента затухания резонансный характер (кривые 3,4 на рис. 2б и кривые 1b-3b на рис. 4б). Увеличение коэффициента внутреннего трения, как при учете, так и без учета межфазного взаимодействия при прочих неизменных параметрах среды приводит к росту относительной и абсолютной фазовых скоростей и коэффициента затухания ПВ (рис.2,6). Следует отметить, что наличие диссипации в ПУНЖС приводит к распространению («просачиванию») ПВ в радиальном направлении (вглубь среды), в то время как в ее отсутствии в этом направлении поверхностная волна не распространяется, а лишь экспоненциально затухает. Характер ПВ в радиальном направлении требует отдельного рассмотрения.

Для анализа влияния пористости и проницаемости среды на дисперсионные и частотные характеристики фазовой скорости и коэффициента затухания ПВ на полости, проведены численные расчеты, в которых использовались параметры известной пористо-упругой среды [12] и при этом менялись значения коэффициентов пористости и проницаемости. Полученные дисперсионные зависимости относительной фазовой скорости и коэффициента затухания от относительной длины ПВ показали, что для заданного коэффициента Пуассона увеличение коэффициента пористости среды приводит к уменьшению относительной скорости и увеличению коэффициента затухания. Анализ результатов расчета показал, что с увеличением коэффициента пористости относительная фазовая скорость уменьшается (рис. 3а), а абсолютная скорость и коэффициент затухания ПВ возрастают во всем диапазоне частот. При этом резонансные пики коэффициента затухания сдвигаются в сторону возрастания частоты. Учет сил межфазного взаимодействия приводит к уменьшению абсолютной скорости для каждого заданного коэффициента пористости (рис.4а) и возрастанию коэффициента затухания с ростом коэффициента пористости, а в отсутствии межфазного взаимодействия последний не зависит от коэффициента пористости и незначительно монотонно возрастает с ростом частоты (рис. 4б). Влияние коэффициента проницаемости среды на частотные характеристики ПВ отражено на рис.5. Уменьшение коэффициента проницаемости среды приводит к уменьшению абсолютной фазовой скорости и незначительному росту амплитуд коэффициента затухания ПВ, а их резонансные максимумы сдвигаются в область более высоких частот.

Список цитируемых источников

1. *Городецкая Н. С.* Волны на границе пористо-упругого полупространства. I. Свободная граница // Акустичний вiсник. — 2005. — Т. 8, № 1-2. — С. 28–41.
2. *Гринченко В. Т., В. В. Мелешко* Гармонические колебания и волны в упругих телах. — К.: Наук. думка, 1978. — 264 с.
3. *Донцов В. Е., Кузнецов В. В., Накоряков В. Е.* Распространение волн давления в пористой среде, насыщенной жидкостью // ЖПМТФ. — 1988. — Т. 167, № 1. — С. 120–130.
4. *Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А.* Колебания и волны в слоистых средах. — К.: Наук. думка, 1990. — 224 с.
5. *Сницер А. Р.* Дисперсия скорости поверхностных волн Био в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде // Динамические системы. — 2009. — Вып. 27. — С. 93–105.
6. *Сницер А. Р.* Волны при нормальном гармоническом нагружении скважины в упругой среде. I. Структура волнового поля на поверхности скважины и в дальней зоне // Динамические системы. — 2006. — Вып. 20. — С. 68–88.
7. *Трофимчук А. Н., Гомилко А. М., Савицкий О. А.* Динамика пористо-упругих насыщенных жидкостью сред. — К.: Наук. думка, 2003. — 232 с.
8. *M. Badiey, A.H.-D. Cheng, Y. Mu* From geology to geoacoustics Evaluation of Biot-Stoll sound speed and attaniation for shallow water acoustics // J. Acoust. Soc. Amer. — 1998. — 103, № 1. — P. 309–320.
9. *M. A. Biot* Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Bore Containing a Fluid // J. Appl. Physics. — 1952. — Vol.23, № 9. — P. 997–1005.
10. *Biot M. A.* Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid i. low-frequency ii. higher frequency range // J. Acoust. Soc. Amer. — 1956. — 28, № 2. — P. 168–191.
11. *Fatt I.* The Biot-Willis elastic coefficients for sanstone // J. Appl. Mech. — 1959. — № 2. — P. 296–297.
12. *Halpern M. R., Christiano P.* Response of poroelastic half-space to steady-state harmonic surface tractions // Int. J. Numer and Anal. Meth. Geotech. — 1986. — 10, № 6. — P. 609–632.
13. *Mittra R., Lee S. W.* Analytical techniques in the theory of guided waves. — N.Y.: Macmillan, 1971. — 302 p.

14. *Snitser A. R.* Surface waves on a cavity in a semi-infinite elastic medium // J.Math. Scienc. — 2001. — Vol. 107, № 6. — P. 4386–4394.
15. *Yamamoto T.* Acoustic propagation in the ocean with a poro-elastic bottom // J. Acoust. Soc. Amer. — 1983. — 73, № 5. — P. 1587–1596.

Получена 30.09.2011