Динамические системы, том 2(30), №1-2(2012), 143–154

УДК 517.36

Об устойчивости квазилинейных систем переменной структуры

В. И. Слынько, С. А. Рычка*

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,
Киев 03057. *E-mail: vitstab@ukr.net*
*Черкасский национальный университет им. Б. Хмельницкого,
Черкассы 18031. *E-mail: rychka-svetlana@ukr.net*

Аннотация. В работе получены новые достаточные условия экспоненциальной устойчивости линейных систем переменной структуры. При этом существенно учитываются алгебраические свойства структурного множества. Для квазилинейных систем переменной структуры исследована устойчивость состояния равновесия. Приведен пример системы третьего порядка, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: системы с переменной структурой, устойчивость по Ляпунову, ассоциативная алгебра.

Одним из направлений нелинейной динамики и теории систем является теория устойчивости динамических систем при структурных возмущениях. Обзоры [12, 13] дают достаточно полное представление о результатах в этой области. Важным подклассом динамических систем со структурными возмущениями являются системы с переменной структурой. Некоторые результаты относительно устойчивости движения систем переменной структуры с постоянными коэффициентами получены в работах [1, 2, 3, 4, 9, 14]. Целью настоящей работы является получение более тонких условий устойчивости за счет учета алгебраических свойств структурного множества системы. При этом применяется аппарат теории ассоциативных алгебр и результаты развитые в монографиях [7, 10].

1. Введение

Рассмотрим линейную систему с переключениями

$$\frac{dx}{dt} = A_{\sigma(t)}x, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, (t_0, x_0) — начальные данные, $\sigma(t) : [t_0, \infty) \to I_N = \{1, 2, ...N\}$ — кусочно-постоянная функция времени с бесконечным числом точек разрыва τ_i, $\tau_i \to \infty$ при $i \to \infty$ и $A_{\sigma(t)}$ также кусочно-постоянная матрично-значная функция времени t со значениями из множества матриц $\{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$. Матрицы A_i предполагаются постоянными матрицами с действительными элементами.

Целью этой работы является получение условий экспоненциальной устойчивости системы (1.1) при наиболее общих предположениях относительно множества матриц $\{A_1, \dots, A_N\}$. В частности, в отличие от работы [10], где рассматривалась аналогичная задача, здесь не предполагается наличие среди множества матриц $\{A_1, \dots, A_N\}$ гурвицевых матриц. Простые соображения показывают, что важную роль при исследовании устойчивости системы (1.1) играют свойства матричной алгебры, порожденной множеством матриц $\{A_1, \dots, A_N\}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра матриц, порожденная множеством матриц $\{A_1, \dots, A_N\}$. Напомним [10], что алгебра $\mathcal{A}$ называется вполне приводимой, если существует неособая матрица S, которая приводит все элементы базиса алгебры $\{E_1, \dots, E_h\}$ к квазидиагональному виду, т.е.

$$S^{-1}E_jS = \begin{pmatrix} E_{11}^{(j)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & E_{11}^{(j)} \end{pmatrix}.$$

Алгебра $\mathcal{A}$ называется приводимой, если имеет место приведение базиса к квазитреугольному виду

$$S^{-1}E_jS = \begin{pmatrix} E_{11}^{(j)} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & E_{11}^{(j)} \end{pmatrix}.$$

Алгоритм, позволяющий решить вопрос о приводимости алгебры и указать матрицу S, приводящую алгебру $\mathcal{A}$, подробно описан в работах [7, 10].

2. Условия экспоненциальной устойчивости линейного приближения

Рассмотрим систему (1.1) в случае, когда алгебра $\mathcal{A}$, порожденная множеством матриц $\{A_1, \dots, A_N\}$, является неприводимой. Обозначим $N(t_0, t)$ — количество точек разрыва функции $\sigma(t)$ на полуинтервале $(t_0, t]$. Пусть $\Gamma^S \subset I_N$ — подмножество индексов таких, что соответствующие матрицы множества $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ являются гурвицевыми, а

$$\Gamma^{US} = I_N \setminus \Gamma^S.$$

Обозначим $T_i(t_0, t)$ меру Лебега подмножества $\{t : \sigma(t) = i\}$ временного интервала (t_0, t). Кроме того, относительно системы (1.1) сделаем следующие предположения.

Предложение 1. Пусть система (1.1) такова, что выполняются следующие условия:

1) для $i \in I_N$ существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T_i(t_0, t)}{t - t_0} = \nu_i,$$

не зависящий от t_0;

2) существуют положительные постоянные λ_i и положительно определенные матрицы P_i такие, что матрицы

$$(A_i+\lambda_i I)^T P_i + P_i(A_i+\lambda_i I), \quad \text{при} \quad i\in\Gamma^S,$$
$$(A_i-\lambda_i I)^T P_i + P_i(A_i-\lambda_i I), \quad \text{при} \quad i\in\Gamma^{US},$$

являются отрицательно определенными.

Исследование экспоненциальной устойчивости системы (1.1) проведем используя функцию Ляпунова, введенную в работе [15]. Рассмотрим функцию Ляпунова $v(t,x) = x^T P_{\sigma(t)} x$. Отметим, что в точках разрыва функции $\sigma(t)$ выполняется оценка $v(t^+,x)\le \mu v(t,x)$, где

$$\mu = \max_{i,k\in I_N}\frac{\lambda_M(P_i)}{\lambda_m(P_k)}.$$

Здесь $\lambda_M(.)$ и $\lambda_m(.)$ — соответственно максимальное и минимальное собственное значение симметрической матрицы. Установим достаточные условия экспоненциальной устойчивости системы (1.1).

Теорема 1. *Пусть система (1.1) такова, что*

1) алгебра $\mathcal{A}$ неприводима;

2) выполняется неравенство $\sum\limits_{i\in\Gamma^S}\nu_i\lambda_i > \sum\limits_{i\in\Gamma^{US}}\nu_i\lambda_i$;

3) выполняется оценка

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t,t_0)}{t-t_0} < \frac{2\left(\sum\limits_{i\in\Gamma^S}\nu_i\lambda_i - \sum\limits_{i\in\Gamma^{US}}\nu_i\lambda_i\right)}{\ln\mu}.$$

Тогда система (1.1) экспоненциально устойчива.

Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$A = \lim_{t\to\infty}\frac{N(t,t_0)}{t-t_0}.$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ существует момент переключения T_ε не зависящий от t_0 такой, что

$$\begin{aligned}(A-\varepsilon)(t-t_0) < N(t,t_0) < (A+\varepsilon)(t-t_0),\\ (\nu_i-\varepsilon)(t-t_0) < T_i(t,t_0) < (\nu_i+\varepsilon)(t-t_0),\end{aligned} \tag{2.1}$$

при всех $t\ge T_\varepsilon > t_0$. Пусть $t_0 < T_\varepsilon = \tau_0 < \dots < \tau_i < \dots$ — точки переключения. На каждом интервале (τ_i,τ_{i+1}) производная функции $v(t,x)$ оценивается неравенствами

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{(1.1)} \le \begin{cases} -2\lambda_i(t-\tau_i), & \text{при} \quad \sigma\Big(\dfrac{\tau_i+\tau_{i+1}}{2}\Big)\in\Gamma^S,\\ 2\lambda_i(t-\tau_i), & \text{при} \quad \sigma\Big(\dfrac{\tau_i+\tau_{i+1}}{2}\Big)\in\Gamma^{US}.\end{cases}$$

Откуда находим оценку

$$v(\tau_{i+1}^+, x(\tau_{i+1}^+)) \le \begin{cases} \mu e^{-2\lambda_i(\tau_{i+1}-\tau_i)} v(\tau_i^+, x(\tau_i^+)), & \text{при} \quad \sigma\left(\dfrac{\tau_i+\tau_{i+1}}{2}\right) \in \Gamma^S, \\ \mu e^{2\lambda_i(\tau_{i+1}-\tau_i)} v(\tau_i^+, x(\tau_i^+)), & \text{при} \quad \sigma\left(\dfrac{\tau_i+\tau_{i+1}}{2}\right) \in \Gamma^{US}. \end{cases}$$

Эти оценки приводят к неравенству

$$v(t, x(t)) \le \mu^{N(t,T_\varepsilon)} e^{2(\sum\limits_{i\in\Gamma^{US}} \lambda_i T_i(T_\varepsilon,t) - \sum\limits_{i\in\Gamma^S} \lambda_i T_i(T_\varepsilon,t))} v(T_\varepsilon, x(T_\varepsilon))$$

из которого следует, что

$$\|x(t)\| \le \|x(T_\varepsilon)\| \sqrt{\frac{\sup\limits_{i\in I_N} \lambda_M(P_i)}{\sup\limits_{i\in I_N} \lambda_m(P_i)}} \times$$
$$\times \exp\left\{2\left(\sum_{i\in\Gamma^{US}} \lambda_i T_i(T_\varepsilon, t) - \sum_{i\in\Gamma^S} \lambda_i T_i(T_\varepsilon, t)\right) + N(T_\varepsilon, t)\ln\mu\right\}.$$

Очевидно, что

$$N(t_0, T_\varepsilon) + N(T_\varepsilon, t) = N(t_0, t),$$
$$T(t_0, T_\varepsilon) + T(T_\varepsilon, t) = T(t_0, t),$$

поэтому

$$\|x(t)\| \le L_\varepsilon(t_0) \exp\left\{2\left(\sum_{i\in\Gamma^{US}} \lambda_i T_i(t_0, t) - \sum_{i\in\Gamma^S} \lambda_i T_i(t_0, t)\right) + N(t_0, t)\ln\mu\right\} \|x(T_\varepsilon)\|,$$

где

$$L_\varepsilon(t_0) = \sqrt{\frac{\sup\limits_{i\in I_N} \lambda_M(P_i)}{\inf\limits_{i\in I_N} \lambda_m(P_i)}} \exp\left\{2\left(-\sum_{i\in\Gamma^{US}} \lambda_i T_i(t_0, T_\varepsilon) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{i\in\Gamma^S} \lambda_i T_i(t_0, T_\varepsilon)\right) - N(t_0, T_\varepsilon)\ln\mu\right\}.$$

С учетом неравенств (2.1) находим

$$\|x(t)\| \le \|x(T_\varepsilon)\| L_\varepsilon(t_0) \times$$
$$\times \exp\left\{\left(2\left(\sum_{i\in\Gamma^{US}} \lambda_i(\nu_i + \varepsilon) - \sum_{i\in\Gamma^S} \lambda_i(\nu_i - \varepsilon)\right) + (A+\varepsilon)\ln\mu\right)(t - t_0)\right\}.$$

Выберем

$$0 < \varepsilon < \lambda^* = \frac{2\left(-\sum\limits_{i\in\Gamma^{US}} \lambda_i\nu_i + \sum\limits_{i\in\Gamma^{S}} \lambda_i\nu_i\right) - A\ln\mu}{2\sum\limits_{i=1}^{N}\lambda_i + \ln\mu},$$

тогда

$$\|x(t)\| \le L_\varepsilon e^{-(\lambda^*-\varepsilon)(t-t_0)}\|x(T_\varepsilon)\|, \quad t \ge T_\varepsilon.$$

Поскольку решение системы (1.1) непрерывно зависит от начальных условий, то можно указать постоянную $\widetilde{L}_\varepsilon$ такую, что $\|x(T_\varepsilon)\| \le \widetilde{L}_\varepsilon\|x_0\|$. Выбор постоянной

$$N = \sup_{0\le t_0\le T_\varepsilon} \max\{L_\varepsilon, \widetilde{L}_\varepsilon e^{(\lambda^*-\varepsilon)(T_\varepsilon-t_0)}\}$$

завершает доказательство теоремы в случае $t_0 \le T_\varepsilon$.

Если $t_0 > T_\varepsilon$, то доказательство теоремы аналогично. □

Рассмотрим случай, когда алгебра $\mathcal{A}$ приводима. Тогда существует невырожденная матрица S такая, что матрицы $S^{-1}A_jS$ при всех $j \in I_N$ имеют квазидиагональную (квазитреугольную) форму. Обозначим $A_{ii}^{(j)} \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}$, $i = 1,\dots,s$ — диагональные блоки матрицы $S^{-1}A_jS$, $\Gamma_i^S \subset I_N$ множество индексов j, для которых матрицы $A_{ii}^{(j)}$ являются гурвицевыми, и

$$\Gamma_i^{US} = I_N \setminus \Gamma_i^S.$$

Относительно системы (1.1) сделаем следующее предположение.

Предложение 2. Пусть система (1.1) такова, что выполняются следующие условия:

1) для $j \in I_N$ существует предел,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{T_j(t_0,t)}{t-t_0} = \nu_j,$$

не зависящий от t_0;

2) существуют положительные постоянные λ_{ij} и положительно определенные матрицы P_{ij}, $i = 1,\dots,s$ такие, что матрицы

$$(A_{ii}^{(j)} + \lambda_{ij}I)^T P_{ij} + P_{ij}(A_{ii}^{(j)} + \lambda_{ij}I), \quad \text{при} \quad j \in \Gamma_i^S,$$
$$(A_{ii}^{(j)} - \lambda_{ij}I)^T P_{ij} + P_{ij}(A_{ii}^{(j)} - \lambda_{ij}I), \quad \text{при} \quad j \in \Gamma_i^{US},$$

являются отрицательно определенными.

Установим условия экспоненциальной устойчивости системы (1.1). Обозначим

$$\mu_i = \max_{j,k\in I_N}\frac{\lambda_M(P_{ij})}{\lambda_m(P_{ik})}.$$

Теорема 2. *Пусть система (1.1) такова, что*

1) алгебра $\mathcal{A}$ приводима;

2) выполняются неравенства $\sum\limits_{j\in\Gamma_i^S}\nu_j\lambda_{ij} > \sum\limits_{j\in\Gamma_i^{US}}\nu_j\lambda_{ij}$ *при всех* $i = 1,\dots,s$*;*

3) выполняется оценка

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t,t_0)}{t-t_0} < \min_i\left(\frac{2\left(\sum\limits_{j\in\Gamma_i^S}\nu_j\lambda_{ij} - \sum\limits_{j\in\Gamma_i^{US}}\nu_j\lambda_{ij}\right)}{\ln\mu_i}\right).$$

Тогда система (1.1) экспоненциально устойчива.

Доказательство теоремы 2. В случае, когда алгебра $\mathcal{A}$ вполне приводима, т. е. приводится к квазидиагональному виду, утверждение теоремы тривиально. Рассмотрим случай, когда алгебра $\mathcal{A}$ приводима к квазитреугольному виду. Каждая из независимых подсистем

$$\frac{dy_i}{dt} = A_{ii}^{(\sigma(t))}y_i, \quad i = 1,\dots,s, \tag{2.2}$$

по доказанному выше, является экспоненциально устойчивой.

Рассмотрим систему (1.1) как линейную систему с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= A_{11}(t)x_1 + A_{12}(t)x_2 + \dots + A_{1s}(t)x_s,\\
\frac{dx_2}{dt} &= \qquad\qquad\quad A_{22}(t)x_2 + \dots + A_{2s}(t)x_s,\\
&\dots \qquad\qquad \dots \qquad\qquad \dots\\
\frac{dx_s}{dt} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad A_{ss}(t)x_s,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $A_{ij}(t) = A_{ij}^{(\sigma(t))}$. Обозначим $U_i(t,t_0)$ матрицант системы (2.2) и представим решение системы (2.4) по формуле Коши

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= U_1(t,t_0)x_{10} + \int\limits_{t_0}^{t} U_1(t,\zeta)(A_{12}(\zeta)x_2(\zeta) + \dots + A_{1s}(\zeta)x_s(\zeta))\,d\zeta,\\
x_2(t) &= U_2(t,t_0)x_{20} + \int\limits_{t_0}^{t} U_2(t,\zeta)(A_{23}(\zeta)x_3(\zeta) + \dots + A_{2s}(\zeta)x_s(\zeta))\,d\zeta,\\
&\dots \qquad\qquad \dots \qquad\qquad \dots\\
x_s(t) &= U_s(t,t_0)x_{s0}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

По доказанному выше, существуют положительные постоянные M_i, $i = 1,\ldots,s$, Γ_i, $i = 1,\ldots,s$ такие, что $\|U_i(t,t_0)\| \le M_i e^{-\Gamma_i(t-t_0)}$, при всех $t \ge t_0$, поэтому имеет место оценка

$$\|x_s(t)\| \le M_s e^{-\Gamma_s(t-t_0)}\|x_{s0}\| \le M_s e^{-\Gamma_s(t-t_0)}\|\|x_0\|.$$

Предположим, что уже доказаны оценки

$$\|x_i(t)\| \le N_i e^{-\beta_i(t-t_0)}\|x_0\|,$$

где β_i, N_i — положительные постоянные, при всех $i \le s-m$, $m < s-1$. Отметим, также, что всегда можно считать $\Gamma_{s-1-m} \ne \beta_{s-i}$ при всех $i = 0,\ldots,m$. Докажем, что такая же оценка справедлива при $i = s-1-m$. Учитывая представление (2.3) получим

$$\|x_{s-1-m}(t)\| \le M_{s-1-m}e^{-\Gamma_{s-1-m}(t-t_0)}\|x_0\| +$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t} M_{s-1-m}e^{-\Gamma_{s-1-m}(t-\zeta)}(\|A_{s-1-m,\,s-m}(\zeta)\|N_{s-m}e^{-\beta_{s-m}(\zeta-t_0)}\|x_0\| +$$
$$+\cdots+\|A_{s-1-m,s}(\zeta)\|N_s e^{-\beta_s(\zeta-t_0)}\|x_0\|)\,d\zeta.$$

Пусть $\|A_{ik}^{(j)}\| \le c$, при всех $i \ne k$, где c — положительная постоянная, тогда

$$\|x_{s-1-m}(t)\| \le N_{s-m-1}e^{-\beta_{s-m-1}(t-t_0)}\|x_0\|,$$

где

$$N_{s-m-1} = M_{s-m-1} + 2M_{s-m-1}c\left[\frac{N_{s-m}}{|\Gamma_{s-m-1}-\beta_{s-m}|}+\cdots+\frac{N_s}{|\Gamma_{s-m-1}-\beta_s|}\right],$$

$\beta_{s-m-1} = \min\limits_{i=0,\ldots,m}\{\beta_{s-i},\Gamma_{s-m-1}\}$.

Из этих оценок находим

$$\|x(t)\| \le N\|x_0\|e^{-\lambda(t-t_0)},$$

где $N = \sqrt{s}\max\limits_i N_i$, $\lambda = \min\limits_i \beta_i$. □

3. Условия устойчивости квазилинейных систем с переменной структурой

Рассмотрим вопрос о сохранении свойства устойчивости линейной системы (1.1) при действии нелинейных возмущений переменной структуры

$$\frac{dx}{dt} = A_{\sigma(t)}x(t) + f_{\sigma(t)}(t,x(t)), \tag{3.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f_{\sigma(t)}(t,x)$ — нелинейные функции, удовлетворяющие условию Липшица, и оценкам

$$\|f_{\sigma(t)}(t,x)\| \leq Me^{\Delta_{\sigma(t)}(t-\tau_i)}\|x\|^{1+\beta_{\sigma(t)}},$$

где M, $\Delta_{\sigma(t)}$, $\beta_{\sigma(t)}$ — положительные постоянные, τ_i — соответствующий момент переключения. Укажем условия устойчивости нулевого решения системы (3.1).

Теорема 3. *Пусть система уравнений (3.1) такова, что*

1) выполняются условия 2) и 3) предположения 1;

2) выполняется оценка

$$\sum_{i\in S}\lambda_i\nu_i > \sum_{i\in US}\lambda_i\nu_i + \sum_{i=1}^{N}\frac{2\Delta_i\nu_i}{\beta_i};$$

3) выполняется неравенство

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t,t_0)}{t-t_0} < \frac{2\left(\sum\limits_{i\in S}\lambda_i\nu_i - \sum\limits_{i\in US}\lambda_i\nu_i - \sum\limits_{i=1}^{N}\frac{2\Delta_i\nu_i}{\beta_i}\right)}{\ln\mu};$$

4) моменты переключения τ_k обладают свойством $\sup\{\tau_{k+1}-\tau_k\} < \infty$.

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (3.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\tau_1 < \ldots\tau_i < \ldots$, $\tau_i \to \infty$ при $i \to \infty$ — моменты переключения. Построим разрывную функцию Ляпунова

$$v(t,x) = e^{\frac{2\Delta_{\sigma(t)}}{\beta_{\sigma(t)}}(t-\tau_i)}x^TP_{\sigma(t)}x,$$

при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Нетрудно установить оценки производной этой функции

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases}\Big(\dfrac{2\Delta_i}{\beta_i} + 2\lambda_i\Big)v + \dfrac{M\|P_i\|}{\lambda_m^{\frac{2+\beta_i}{2}}(P_i)}v^{\frac{2+\beta_i}{2}}, & \text{при} \quad \sigma\Big(\dfrac{\tau_i+\tau_{i+1}}{2}\Big) \in US,\\ \Big(\dfrac{2\Delta_i}{\beta_i} - 2\lambda_i\Big)v + \dfrac{M\|P_i\|}{\lambda_m^{\frac{2+\beta_i}{2}}(P_i)}v^{\frac{2+\beta_i}{2}}, & \text{при} \quad \sigma\Big(\dfrac{\tau_i+\tau_{i+1}}{2}\Big) \in S,\end{cases}$$

выполняющиеся при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Кроме того,

$$v(\tau_{i+1}^+) \leq \mu e^{\frac{2\Delta_i}{\beta_i}(\tau_{i+1}-\tau_i)}v(\tau_i).$$

Используя обобщение принципа сравнения для систем уравнений с импульсным воздействием [12], можно установить, что

$$v(t,x(t;t_0,x_0)) \leq u^+(t;t_0,v_0), \quad \text{при достаточно малых} \quad v_0,$$

где $u^+(t;t_0,u_0)$ — верхнее решение скалярного уравнения сравнения

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= a(t)u + cu^{\frac{2+\beta}{2}}, \quad t \neq \tau_i, \\ u(t^+) &= \mu e^{\frac{\Delta_i}{\beta_i}(\tau_{i+1}-\tau_i)}u, \quad t = \tau_i, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где c, β — положительные постоянные, $a(t)$ — кусочно-постоянная функция, определяемая выражением

$$a(t) = \begin{cases} \dfrac{2\Delta_i}{\beta_i} + 2\lambda_i, & i \in \sigma\Big(\dfrac{\tau_{i+1}+\tau_i}{2}\Big) \in US, \\ \dfrac{2\Delta_i}{\beta_i} - 2\lambda_i, & i \in \sigma\Big(\dfrac{\tau_{i+1}+\tau_i}{2}\Big) \in S. \end{cases}$$

Условия устойчивости по первому приближению уравнения сравнения (4.2) имеют вид [8]

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\int\limits_{t_0}^{T} a(s)\,ds}{T} + \frac{\sum\limits_{(t_0,T)} \ln\Big(\mu e^{\frac{2\Delta_i}{\beta_i}(\tau_{i+1}-\tau_i)}\Big)}{T} < 0,$$

причем существование предела в левой части предполагается равномерным по t_0. Последнее неравенство выполняется в силу условий 2) и 3), поэтому состояние равновесия $u = 0$ асимптотически устойчиво в малом.

Докажем асимптотическую устойчивость состояния равновесия $x = 0$ системы (3.1). Пусть ε — положительное число, тогда для положительного числа $\varepsilon^2\alpha$,

$$\alpha = \min_{i=1,\dots,N} \lambda_m(P_i)$$

существует положительное число $\widetilde{\Delta}(\varepsilon^2\alpha)$ такое, что из условия $u_0 < \widetilde{\Delta}(\varepsilon^2\alpha)$ следует $u(t) < \varepsilon^2\alpha$, при всех $t \geq t_0$. Выберем

$$\Delta(\varepsilon) = \frac{\widetilde{\Delta}(\varepsilon^2\alpha)e^{-\Delta\theta}}{\alpha^*},$$

где

$$\Delta = \max_{i=1,\dots,N} \Delta_i, \quad \alpha^* = \max_{i=1,\dots,N} \lambda_M(P_i), \quad \theta = \sup_i\{\tau_{i+1} - \tau_i\}.$$

Пусть $\|x_0\| < \Delta(\varepsilon)$, тогда $u_0 < \widetilde{\Delta}(\varepsilon^2\alpha)$, поэтому $u(t) < \varepsilon^2\alpha$, при всех $t \geq t_0$ и $\|x(t)\| < \varepsilon$. Этим доказана устойчивость состояния равновесия $x = 0$. Асимптотическая устойчивость следует из оценки $\alpha\|x(t)\|^2 \leq v$. □

4. Пример

Рассмотрим линейную систему с переключениями

$$\frac{dx}{dt} = A_{\sigma(t)}x, \qquad (4.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^3$, матрицы A_1 и A_2 — постоянные с действительными элементами

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2.13727 & 0.1718 & 0.3402 \\ 0.9845 & -2.0336 & 0.03764 \\ -1.0364 & -0.4909 & 0.6709 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0.47627 & 0.1572 & -0.4740 \\ 0.2192 & 0.3065 & -0.2497 \\ 1.7091 & 0.8227 & -3.2827 \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 3 \end{pmatrix}$$

приводит матрицы A_1 и A_2 к квазидиагональному виду:

$$\widetilde{A}_1 = S^{-1}A_1S = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A}_2 = S^{-1}A_2S = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.1 & 0 \\ 0.05 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A_{11}^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{22}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 \end{pmatrix}, \quad A_{11}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.1 \\ 0.05 & 0.25 \end{pmatrix}, \quad A_{22}^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}.$$

Симметричные, положительно определенные матрицы P_{ij} выберем единичными матрицами соответствующих размерностей.

Тогда положительные постоянные λ_{ij} из предложения 2 будут равны: $\lambda_{11} = 0.85$, $\lambda_{12} = 0.18$, $\lambda_{21} = 0.53$, $\lambda_{22} = 2.95$. Если выбрать, например, $\nu_1 = 0.24$, $\nu_2 = 0.23$, то выполняется неравенство 2) теоремы 4. Поэтому система (4.1) — экспоненциально устойчива. Отметим, что, при этом, структурные матрицы системы A_1 и A_2 не являются гурвицевыми.

5. Обсуждение

Учет алгебраических свойств структурного множества линейной системы переменной структуры с постоянными коэффициентами приводит к более тонким условиям устойчивости таких систем. В частности, относительно структурного множества не нужно предположение о наличии в нем гурвицевых матриц. Представляет интерес описание подхода, который учитывал бы свойства структурного множества нелинейной системы и позволил получить более тонкие условия устойчивости нелинейных систем с переменной структурой. Одним из возможных путей решения этой задачи представляется следующий. Необходимо на первом этапе разработать подходы к декомпозиции динамической системы, которые обеспечили бы учет свойств структурного множества, поскольку из результатов, приведенных выше, для линейных систем видно, что именно "хороший" выбор способа декомпозиции приводит к более тонким условиям устойчивости. На втором этапе целесообразно применение второго метода Ляпунова на основе матричнозначной функции Ляпунова с учетом известных способов построения функции [12, 16]. Отметим также, что предложенный подход к анализу устойчивости может быть распространен на линейные импульсные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве [5, 6] и системы, разрывные по фазовым переменным [3, 4].

Список цитируемых источников

1. *Александров А. Ю., Косов А. А., Чэнь Я.* Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями // Автомат. и телемех. — 2011. — №6. — С. 5–17.
2. *Анашкин О. В.* Об устойчивости нелинейных систем с переключениями // Украинский математический крнгресс [Электронный ресурс http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/Anashkin.pdf]: Электрон. журн. — Киев: Інститут математики НАН України, 2009.
3. *Бичков О. С.* Про критерій існування копозитивних розв'язків рівняння Ляпунова // Доповіді НАН України. — 2009. — №3. — С. 12–18.
4. *Власов А. М., Бычков А. С.* Устойчивость линейных стохастических гибридных автоматов // Соврkменные проблемы вычислительной математики и математической физики: Международная научная конференция "Современные проблемы вычислительной математики и математической физики посвященная памяти академика А.А.Самарского в связи с 90-летием со дня его рождения — Москва: [http://vm.cs.msu.su/samarski2009/abstracts/], 2009. — С. 1–2.
5. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Глобальная устойчивость решений нестационарных монотонных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в псевдолинейной форме // Нелінійні коливання. — 2011. — Т. 14, №2. — С. 187–202.
6. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Условия глобальной устойчивости решений нестационарных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в псевдолинейной форме // Український математичний вісник. — 2011. — Т. 8, №2. — С. 182–202.
7. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Теоретико-групповой поход в асимптотических методах нелинейной механики. — Киев: Наукова думка, 1987. — 272 с.
8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Вища школа,1987. — 288 с.
9. *Смелов В. В., Бычков А. С.* Об устойчивости по части переменных гибридных автоматов // Dynamical System Modelling And Stability Investigation, Modelling and Stability: XV International Conference Dynamical System Modelling And Stability Investigation, Modelling and Stability — Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2011. — С. 127.
10. *Чеботарев Н. Г.* Введение в теорию алгебр. — Москва, Ленинглад: ОГИЗ государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1949. — 90 с.
11. *Ikeda M., Siljak D.* Generalized Decompositions of Dynamic Systems and Vector Lyapunov Functions. // Automatic Control, IEEE Transactions on: IEEE Control Systems Society, 1981. — V. 26 Issue: 5— P. 1118–1125.
12. *Martynyuk A. A.* Some Results of Developing Classical and Modern Theories of Stability of Motion // International Applied Mechanics — 2001. — V. 37, №9. — P. 1142–1157.

13. *Martynyuk A. A., Miladzhanov V. G.* Stability of Singularly Perturbed Systems with Structural Perturbations. General Theory // International Applied Mechanics — 2003. — V. 39, №4. — P. 375–401(27).
14. *Wang Jizhong, Zhang Changxue, Wu Yuqiang* Study of Stabilising Strategies for Switched Linear Systems // Natural Computation. ICNC '08: Fourth International Conference on — Jinan: IEEE, 2008. — V. 7 — P. 158–162.
15. *Yu Mei, Wang Long, Chu Tianguang* Stability Analysis of Networked Systems With Packet Dropout and Transmission Delays: Discrete-Time Case // Asian Journal of Control — 2005. — V. 7, Issue 4. — P. 433–439.
16. *Ikeda M., Siljak D.* Generalized Decompositions of Dynamic Systems and Vector Lyapunov Functions. // IEEE Trans. Automat. Contr. AC-26, No 5, 1981. — P. 1118 – 1125.

Получена 13.05.2012 Переработана 20.06.2012