Динамические системы, вып. 27 (2009), 143–149

УДК 517.927

Достатні умови виникнення розв'язку слабкозбуреної крайової задачі

Т.В. Шовкопляс

Київський національний університет ім. Тараса Шевченко
Київ 03022. *E-mail: from_ Tatyana@ukr.net*

Анотація. Розглядається слабкозбурена лінійна неоднорідна крайова задача для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Для розглядуваної крайової задачі її породжуюча крайова задача не має розв'язків при довільних неоднорідностях, тобто, виконується критичний випадок. Доведено, що для того, щоб слабкозбурена крайова задача була розв'язною, достатньо виконання деяких умов на ранг матриці, побудованої за допомогою коефіцієнтів лінійної неоднорідної системи. При виконанні цих умов на задану матрицю розглядувана слабкозбурена крайова задача буде розв'язна і матиме розв'язок у вигляді збіжного ряду Лорана.

Ключові слова: слабкозбурена крайова задача, породжуюча крайова задача, критерій розв'язності, критичний випадок.

1. Вступ. Постановка задачі

Слабкозбурена лінійна крайова задача не завжди має розв'язок. Виникає потреба встановлення умов, при виконанні яких розглядувана задача буде розв'язною. Схожа крайова задача для системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку розглядалася в роботах [1, 2, 7, 10], де використовувався апарат псевдообернених матриць та метод Вішика-Люстерника [3].

У цій роботі шукаються умови розв'язності слабкозбуреної лінійної неоднорідної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Розглядається слабкозбурена лінійна неоднорідна крайова задача

$$(P(t)x')' - Q(t)x - \varepsilon Q_1(t)x = f(t), \quad t \in [a, b], \tag{1.1}$$

$$lx(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon\, l_1 x(\cdot, \varepsilon). \tag{1.2}$$

У (1.1), (1.2) $x = x(t, \varepsilon)$ — n-вимірна двічі неперервно диференційовна шукана вектор-функція: $x(\cdot, \varepsilon) \in C^2([a, b]\times(0,\ \varepsilon_0])$. $P(t), Q(t), Q_1(t)$ — $(n\times n)$- вимірні дійсні матриці-функції. Елементи матриці $P(t)$ неперервно диференційовні на відрізку $[a, b]$: $P(t) \in C^1([a, b])$; елементи матриць $Q(t)$ та $Q_1(t)$ є неперервними на відрізку $[a, b]$: $Q(t),\ Q_1(t) \in C([a, b])$. Матриця $P(t)$ є невиродженою: $\det P(t) \neq 0$. $f(t)$ — n-вимірна вектор-функція, неперервна на відрізку $[a,\ b]$: $f(t) \in C([a, b])$. $l,\ l_1$ — лінійні обмежені m-вимірні векторні функціонали, визначені на просторі $C([a, b])$ неперервних n-вимірних векторних функцій: $l,\ l_1{:}C([a, b]) \to R^m$. α — m-вимірний дійсний вектор: $\alpha \in R^m$; ε — малий невід'ємний параметр.

Породжуюча до задачі (1.1), (1.2) крайова задача має вигляд:

$$(P(t)x')' - Q(t)x = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{1.3}$$

$$lx(\cdot\,,\varepsilon) = \alpha. \tag{1.4}$$

Загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (1.3) має вигляд: $x(t) = X(t)c + \bar{x}(t), c \in R^{2n}$, де $X(t)$ — $(n \times 2n)$-вимірна фундаментальна матриця однорідної системи другого порядку (1.3), яка складається з $2n$ лінійно незалежних розв'язків однорідної ($f(t) = 0$) системи (1.3); вектор-функція $\bar{x}(t) = \int_a^b K(t,s)f(s)ds$ є частинним розв'язком системи диференціальних рівнянь (1.3); $K(t,s)$ — $(n \times n)$-вимірна матриця Коші [8, 9]. У результаті дії лінійного m-вимірного функціоналу l на фундаментальну матрицю $X(t)$ утворюється $(m\times 2n)$-вимірна прямокутна матриця D, $\operatorname{rank} D = n_1$, $n_1 < \min\{2n, m\}$. Матриця D^* є транспонованою до матриці D. $(2n \times m)$-вимірна матриця D^+ є псевдооберненою за Муром-Пенроузом до матриці D [2, 4, 6].

Через P_D і P_{D^*} позначимо $(2n\times 2n)$- і $(m\times m)$- вимірні матриці-ортопроектори, які проектують простори R^{2n} і R^m на нуль-простори $N(D)$ та $N(D^*)$ відповідно: $P_D : R^{2n} \to N(D)$, $N(D) = P_D R^{2n}$; $P_D{:}R^{2n} \to N(D)$, $N(D^*) = P_{D^*}R^m$. Матриця $N(D)$ має розмірність r: $\dim N(D) = 2n\text{-rank}D = 2n - n_1 = r$, а матриця $N(D^*)$ має розмірність d: $\dim N(D^*) = m{-}\text{rank}D = m - n_1 = d$. Звідки $\text{rank}P_D = r$, а $\text{rank}P_{D^*} = d$. Тобто, матриця P_D складається з r лінійно незалежних стовпчиків, а матриця P_{D^*} складається з d лінійно незалежних рядків. Отже, $(2n\times 2n)$- вимірну матрицю P_D можна замінити $(2n\times r)$-вимірною матрицею P_{D_r}, що складається з r лінійно незалежних стовпчиків матриці P_D; $(m\times m)$-вимірну матрицю P_{D^*} можна замінити $(d \times m)$-вимірною матрицею $P_{D_d^*}$, яка складається з повної системи d лінійно незалежних рядків матриці P_{D^*} [2].

Для крайової задачі (1.3), (1.4) має місце твердження [8].

Теорема 1 (Критичний випадок). *Нехай виконується умова:* $\operatorname{rank} D = n_1 < \min\{2n, m\}$. *Тоді однорідна крайова задача* (1.3), (1.4) *має* r, $(r = 2n - n_1)$ *і лише* r *лінійно незалежних розв'язків.*

Неоднорідна крайова задача (1.3), (1.4) *розв'язна тоді і тільки тоді, коли вектор-функція* $f(t) \in C([a,b])$ *і сталий вектор* $\alpha \in R^m$ *задовольняють умову розв'язності*

$$P_{D_d^*}[\alpha - l\bar{x}(\,\cdot\,)] = 0, \quad (d = m - n_1). \tag{1.5}$$

При виконанні цих умов крайова задача (1.3), (1.4) *має* r*-параметричну сім'ю розв'язків* $x(t,\ c_r) = X_r(t)c_r + (Gf)(t) + X(t)D^+\alpha, \quad t \in [a,b], \quad \forall\ c_r \in R^r$, *де* $X_r(t)$ — $(n \times r)$*-вимірна матриця, стовпчики якої утворюють повну систему* r *лінійно незалежних розв'язків однорідної крайової задачі:* $X_r(t) = X(t)P_{D_r}$, P_{D_r} — $(2n \times r)$*-вимірна матриця-ортопроектор;* $(Gf)(t)$, $t \in [a,b]$, — *узагальнений оператор Гріна, який діє на довільну вектор-функцію* $f(t)$ *з простору* $C([a,b])$:

$$(Gf)(t) \stackrel{def}{=} \int_a^b K(t,s)f(s)ds - X(t)D^+l\int_a^b K(\cdot,s)f(s)ds.$$

2. Умови розв'язності слабкозбуреної крайової задачі

Припустимо, що породжуюча крайова задача (1.3), (1.4) не має розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a,b])$ та $\alpha \in R^m$, тобто, має місце критичний випадок ($\mathrm{rank} D = n_1 < n$) і в силу довільного вибору неоднорідностей $f(t) \in C([a,b])$ та $\alpha \in R^m$ критерій розв'язності (1.5) для породжуючої крайової задачі (1.3), (1.4), взагалі кажучи, не виконується.

Виникає потреба з'ясування умов, яким повинні задовольняти коефіцієнти системи (1.1) так, щоб задача (1.1), (1.2) була розв'язною. Покажемо, що відповідь на це питання можна отримати за допомогою матриць B_0 та B_1. Покладемо

$$B_0 := P_{D_d^*}\{l_1 X_r(\,\cdot\,) - l\int_a^b K(\cdot,s)Q_1(s)X_r(s)ds\}, \tag{2.1}$$

B_0 — $(d \times r)$-вимірна матриця, P_{B_0} — $(r \times r)$-вимірна матриця-ортопроектор, $P_{B_0} : R^r \to N(B_0)$; $B_{_0}^*$ — $(r \times d)$-вимірна матриця, спряжена до матриці B_0, $P_{B_{_0}^*}$ — $(d \times d)$-вимірна матриця-ортопроектор, $P_{B_{_0}^*} : R^d \to N(B_{_0}^*)$; $(r \times d)$-вимірна матриця $B_{_0}^+$ є псевдооберненою за Муром-Пенроузом до матриці $B_{_0}$.

Щоб отримати нові умови існування розв'язку крайової задачі (1.1), (1.2), введемо $(d \times r)$-вимірну матрицю B_1:

$$B_1 := P_{B_0^*}P_{D_d^*}\{l_1 G_1(\,\cdot\,) - l\int_a^b K(\cdot,s)Q_1(s)G_1(s)ds\}P_{B_0}, \tag{2.2}$$

де

$$G_1(t) = (G[Q_1(s)X_r(s)])(t) + X(t)D^+ l_1 X_r(\cdot). \tag{2.3}$$

$B_{_1}^*$ — $(r \times d)$-вимірна матриця, транспонована до матриці B_1; $P_{B_{_1}}$ — $(r \times r)$-вимірна матриця-ортопроектор, яка проектує r-вимірний евклідів простір R^r на нуль-простір $N(B_1)$ матриці B_1; $P_{B_1^*}$ — $(d \times d)$-вимірна матриця-ортопроектор, яка проектує d-вимірний евклідів простір R^d на нуль-простір $N(B_{_1}^*)$ матриці $B_{_1}^*$.

У випадку, коли умова $P_{B_0^*} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rank}\, B_0 = d$ виконується, в роботі [9] були знайдені умови існування розв'язку системи (1.1), (1.2) у вигляді ряду Лорана при $k = -1$: $x(t,\ \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t)$.

Покажемо, що при виконанні певних умов на матрицю B_1 задача (1.1), (1.2) матиме розв'язок, який треба шукати у вигляді ряду $\sum_{k=-2}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t)$.

Доведемо наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай для слабкозбуреної крайової задачі* (1.1), (1.2) *має місце критичний випадок* ($\mathrm{rank}\, D = n_1 < n$)*, тобто, її породжуюча крайова задача* (1.3), (1.4) *за довільних неоднорідностей* $f(t) \in C[a,b]$ *та* $\alpha \in R^m$ *не має розв'язків, і умова* $P_{B_0^*} = 0$ *не виконується.*

Якщо має місце умова

$$P_{B_1^*}P_{B_0^*} = 0, \tag{2.4}$$

то слабкозбурена лінійна крайова задача (1.1), (1.2) *розв'язна і її розв'язок можна подати у вигляді частини збіжного (при достатньо малому фіксованому* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$*) ряду Лорана:*

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=-2}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t). \tag{2.5}$$

Доведення. Підставимо ряд (2.5) в задачу (1.1), (1.2), і в результаті при кожному степені ε отримаємо відповідну крайову задачу.

При ε^{-2} маємо однорідну крайову задачу:

$$(P(t)x'_{-2})' - Q(t)x_{-2} = 0, \quad t \in [a, b], \tag{2.6}$$

$$l\, x_{-2}(\,\cdot\,, \varepsilon) = 0. \tag{2.7}$$

Задача (2.6), (2.7) має r-параметричну сім'ю розв'язків:

$$x_{-2}(t) = X_r(t)c_{-1}, \quad c_{-1} \in R^r, \tag{2.8}$$

c_{-1} — довільний r-вимірний вектор, який буде знайдено з умови розв'язності крайової задачі при ε^{-1}. При ε^{-1} маємо неоднорідну крайову задачу:

$$(P(t)x'_{-1})' - Q(t)x_{-1} = Q_1(t)x_{-2}, \quad t \in [a, b], \tag{2.9}$$

$$l\, x_{-1}(\cdot, \varepsilon) = l_1 x_{-2}(\cdot, \varepsilon). \tag{2.10}$$

Згідно теореми 1 умова розв'язності крайової задачі (2.9), (2.10) є такою:

$$P_{D_d^*}\{l_1\, x_{-2}(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s)Q_1(s)\, x_{-2}(s)ds\} = 0, \quad d = m - n_1. \tag{2.11}$$

Враховуючи рівність (2.8) і використовуючи позначення (2.1), з рівності (2.11) отримаємо алгебраїчну відносно вектора $c_{-1} \in R^r$ систему:

$$B_0 c_{-1} = 0. \tag{2.12}$$

Алгебраїчна система (2.12) завжди розв'язна відносно r-вимірного вектора $c_{-1} \in R^r$:

$$c_{-1} = P_{B_0} c_{-1r} \in N(B_0). \tag{2.13}$$

Маємо значення вектора c_{-1} вигляду (2.13), тому можна вказати r-параметричну сім'ю розв'язків крайової задачі (2.6), (2.7):

$$x_{-2}(t) = X_r(t) P_{B_0} c_{-1r}, \quad c_{-1r} \in R^r. \tag{2.14}$$

Відповідно до теореми 1, r-параметрична сім'я розв'язків крайової задачі (2.9), (2.10) є такою:

$$x_{-1}(t, c_{-1}) = X_r(t)c_0 + \bar{x}_{-1}(t), \quad c_{-1} \in R. \tag{2.15}$$

У (2.15) $\bar{x}_{-1}(t)$ — частинний розв'язок крайової задачі (2.9), (2.10). Згідно теореми 1, враховуючи рівності (2.13), (2.14) та позначення (2.3), вектор $\bar{x}_{-1}(t)$ матиме вигляд:

$$\bar{x}_{-1}(t) = G_1(t)P_{B_0}c_{-1r}, \quad c_{-1r} \in R^r,$$

де матриця-функція $G_1(t)$ визначена таким чином:

$$G_1(t) := \int_a^b K(t,\ s)Q_1(s)X_r(s)ds - X(t)D^+l\int_a^b K(\cdot,s)Q_1(s)ds+ \\ +X(t)D^+l_1X_r(\cdot). \tag{2.16}$$

Вектор c_0 — невідомий, його буде знайдено з крайової задачі при ε^0.

При ε^0 маємо крайову задачу відносно вектора $x_0(t)$:

$$(P(t)x_0')' - Q(t)x_0 = Q_1(t)x_{-1} + f(t), \quad t \in [a,b], \tag{2.17}$$

$$lx_0(\cdot,\varepsilon) = l_1x_{-1}(\cdot,\varepsilon) + \alpha. \tag{2.18}$$

Запишемо умову розв'язності крайової задачі (2.17), (2.18):

$$P_{D_d^*}\{l_1\, x_{-1}(\cdot) + \alpha - l\int\limits_a^b K(\cdot,s)\,(Q_1(s)\,x_{-1}(s) + f(s))ds\} = 0, \quad d = m - n_1. \tag{2.19}$$

Зробивши відповідні перетворення в (2.19), умова розв'язності задачі (2.17), (2.18) зведеться до алгебраїчної системи відносно невідомого вектора $c_0 \in R^r$:

$$B_0c_0 = \varphi_0 - P_{B_0^*}P_{D_d^*}\{l_1G_1(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,s)Q_1(s)G_1(s)ds\}P_{B_0}c_{-1}. \tag{2.20}$$

Враховуючи позначення (2.2), рівність (2.20) запишемо таким чином:

$$B_0c_0 = \varphi_0 - B_1P_{B_0}c_{-1}. \tag{2.21}$$

Умова розв'язності алгебраїчної системи (2.21) є такою:

$$P_{B_0^*}\{\varphi_0 - B_1P_{B_0}c_{-1}\} = 0. \tag{2.22}$$

Алгебраїчна система відносно вектора $c_{-1} \in R^r$ має вигляд:

$$B_1c_{-1} = P_{B_0^*}\varphi_0. \tag{2.23}$$

Умова розв'язності алгебраїчної системи (2.23), є такою:

$$P_{B_1^*} \cdot P_{B_0^*}\varphi_0 = 0 \tag{2.24}$$

Якщо виконана умова

$$P_{B_1^*} \cdot P_{B_0^*} = 0, \tag{2.25}$$

то умова (2.24) завжди виконується. Виконання умови (2.21) означає, що алгебраїчна система (2.23) розв'язна, а її розв'язок є r-вимірний вектор:

$$c_0 = P_{B_0} c_{0_r} + B_0^+[\varphi_0 - B_1 \cdot P_{B_0} c_{-1r}]. \tag{2.26}$$

Значення вектора c_0 вигляду (2.26) підставимо в (2.15), у результаті отримаємо r-параметричну сім'ю розв'язків крайової задачі (2.9), (2.10):

$$x_{-1}(t, c_0) = X_r(t) P_{B_0} c_{0r} + \bar{x}_{-1}(t), \tag{2.27}$$

у (2.27) $\bar{x}_{-1}(t)$ — частинний розв'язок крайової задачі (2.9), (2.10) вигляду: $\bar{x}_{-1}(t) = X_r(t) B_0^+[\varphi_0 - X_r(t) B_0^+ B_1 P_{B_0} c_{-1r}] + G_1(t) P_{B_0} c_{-1r}$.

r-параметрична сім'я розв'язків крайової задачі (2.17), (2.18) є такою:

$$x_0(t, c_1) = X_r(t) c_1 + \bar{x}_0(t), \quad c_1 \in R. \tag{2.28}$$

У (2.28) $\bar{x}_0(t)$ — частинний розв'язок:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0(t) = \ & G_1(t)[P_{B_0} c_{0r} + B_0^+[\varphi_0 - B_1 P_{B_0} c_{-1r}]] + G_2(t) P_{B_0} c_{-1r} + \\ & + (Gf)(t) + X(t) D^+ \alpha. \end{aligned} \tag{2.29}$$

У (2.29) матриця-функція $G_1(t)$ має вигляд (2.16), а $G_2(t)$ визначена таким чином: $G_2(t) := \int_a^b K(t,s) Q_1(s) G_1(s) ds - X(t) D^+ l \int_a^b K(\cdot, s) Q_1(s) G_1(s) ds + X(t) D^+ l_1 G_1(\cdot)$.

Вектор c_1 буде знайдено з умови розв'язності крайової задачі відносно вектор-функції $x_1(t)$, яка утворюється при ε^1. Продовжуючи цей процес, при ε^k маємо таку крайову задачу:

$$(P(t) x_k')' - Q(t) x_k = Q_1(t) x_{k-1}, \quad t \in [a, b], \tag{2.30}$$

$$l\, x_k(\cdot, \varepsilon) = l_1 x_{k-1}(\cdot, \varepsilon). \tag{2.31}$$

Умова розв'язності крайової задачі (2.30), (2.31) є такою:

$$P_{D_d^*}\{l_1\, x_{k-1}(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, s) Q_1(s)\, x_{k-1}(s) ds\} = 0, d = m - n_1.$$

При виконанні умови (2.25), крайова задача (2.30), (2.31) матиме r-параметричну сім'ю розв'язків: $x_k(t, c_{k+1}) = X_r(t) c_{k+1} + \bar{x}_k(t), \quad c_{k+1} \in R$, де $\bar{x}_k(t)$ — частинний розв'язок крайової задачі (2.29), (2.30): $\bar{x}_k(t) = G_1(t) c_k + G_2(t) c_{k-1} + \ldots + G_{k+1}(t) c_0 + G_k(t) P_{B_0} c_{-1r} + (Gf)(t) + X(t) D^+ \alpha$,

$$c_k = P_{B_0} c_{kr} + B_0^+\{\varphi_k - B_1 c_{k-1} + B_2 c_{k-2} + \ldots + B_{k+1} c_{-1}\}, k \geq 0.$$

де
$$\begin{aligned} G_k(t) := & \int_a^b K(t,s) Q_1(s) G_{k-1}(s) ds - \\ & - X(t) D^+ l \int_a^b K(\cdot, s) Q_1(s) G_{k-1}(s) ds + X(t) D^+ l_1 G_{k-1}(\cdot), \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_k := & - P_{D_d^*}[l_1 G_{k-1}(\cdot) B_{k-1} - l_1 G_k(\cdot) - \\ & - l \int_a^b [K(\cdot, s) Q_1(s) G_{k-1}(s) B_1 - G_k(s)] ds] P_{B_0}, k \geq 2. \end{aligned}$$

У випадку, коли умова (2.4) виконується, всі коефіцієнти розкладу (2.5) знаходяться в явному вигляді, що доводиться за методом математичної індукції.

Отже, при виконанні умови (2.4), слабкозбурена крайова задача (1.1), (1.2) буде розв'язною.

Збіжність ряду Лорана доводиться за допомогою традиційних методів мажорування [3, 5].

У публікації [7] розглядається нетерова крайова задача для системи диференціальних рівнянь першого порядку, відшукання розв'язку якої запропоновано за допомогою застосування методу простих ітерацій.

Отримані в роботі результати добре узгоджуються з раніше відомими результатами [1, 2, 7, 8, 9, 10].

□

Перелік цитованих джерел

1. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — К.: Наук. думка, 1990. — 96 с.
2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные краевые задачи и нетеровы краевые задачи. — Київ: Труди Інституту математики НАН України, 1995. — 318 с.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмкщениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных диффференциальных уравнений // УМН. — 1960. — Т. 15, № 3. — С. 3–80.
4. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с.
5. *Гребенников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
6. *Кублановская В. И.* О вычислении обобщенной обратной матрицы и проекторов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1966. — Т. 6, № 2. — С. 326–332.
7. *Чуйко С. М.* Возникновение решений линейной нетеровой краевой задачи // Укр. мат. журнал. — 2007. — Т. 59, № 8. — С. 1148–1152.
8. *Шовкопляс Т. В.* Критерій розв'язності лінійної крайової задачі для системи другого порядку // УМЖ. — 2000. — Т. 52, № 6. — С. 861–864.
9. *Шовкопляс Т. В.* Слабкозбурені лінійні крайові задачі для системи диференціальних рівнянь другого порядку // Доповіді НАН України. — 2002. — № 4. — С. 31–36.
10. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. // Utrecht, Boston: VPS. — 2004. — 317 p.

Получена 29.09.2009