

УДК 517.91/943

Исследование структуры частных асимптотических решений линейных сингулярно возмущённых систем дифференциальных уравнений с малым запаздыванием аргумента

Е.В. Шатковская

Национальный педагогический университет им. М.П. Драгоманова,
Киев. E-mail: shatkovskakv@ukr.net

Аннотация. Исследован вопрос о построении частных асимптотических решений линейных сингулярно возмущённых систем дифференциальных уравнений с малым запаздыванием аргумента и тождественно вырожденной матрицей при производных в случае кратного корня соответствующего характеристического уравнения. Используя методы теории возмущённых линейных операторов выведено соответствующее уравнение разветвления и проведён его анализ. Установлено, что асимптотические разложения искомых решений в данном случае можно построить по дробным степеням малого параметра. Разработан алгоритм определения показателей этих степеней с помощью диаграмм Ньютона.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений с малым запаздыванием аргумента, уравнение разветвления, метод диаграмм Ньютона.

1. Введение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon B(t) \frac{dx(t, \varepsilon)}{dt} = A(t, \varepsilon) x(t, \varepsilon) + C(t, \varepsilon) x(t - \varepsilon \Delta(t), \varepsilon), \quad (1)$$

где $x(t, \varepsilon)$ — искомый n -мерный вектор, $A(t, \varepsilon), B(t), C(t, \varepsilon)$ — действительные или комплекснозначные квадратные матрицы n -го порядка, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ — малый параметр.

Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

1°. Матрицы $A(t, \varepsilon), C(t, \varepsilon)$ допускают равномерные асимптотические разложения по степеням ε на заданном отрезке $[0; T]$:

$$A(t, \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_k(t), C(t, \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k C_k(t); \quad (2)$$

2°. Коэффициенты разложений (2), матричная функция $B(t)$ и функция $\Delta(t)$ бесконечно дифференцируемы на $[0; T]$;

3°. $\Delta(t) \geq 0 \forall t \in [0; T]$;

4°. $\det B(t) \equiv 0$.

Возможность построения частных асимптотических решений сингулярно возмущённых систем данного типа изучалась в работах [3, 4] при условии, что матрица при производной — единичная. При этом было установлено, что в случае простых корней соответствующего характеристического уравнения на эти системы распространяется теорема Дж.Биркгофа [6], относящаяся к системам без запаздывания, согласно которой их частные решения можно построить в виде

$$x(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (\lambda_0(\tau) + \lambda(\tau, \varepsilon)) d\tau \right), \quad (3)$$

где $\lambda_0(t)$ — один из корней характеристического уравнения, а n -мерный вектор $u(t, \varepsilon)$ и функция $\lambda(t, \varepsilon)$ представляются в виде разложений по степеням ε , аналогичным (2). Попытки распространить этот результат на случай кратных корней характеристического уравнения натолкнулись на весьма существенные трудности, обусловленные тем, что разложения для вектора $u(t, \varepsilon)$ и функции $\lambda(t, \varepsilon)$ в этом случае необходимо строить по дробным степеням параметра, показатели которых зависят не только от кратности $\lambda_0(t)$, но и от структуры матриц $A_k(t), C_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$. Применение метода неопределённых коэффициентов ввиду его чрезвычайной громоздкости позволило некоторым авторам изучить лишь отдельные частные случаи [4, 5], и то лишь при условии, что кратность корня характеристического уравнения равна двум.

В данной статье, используя идеи работ [1, 2, 3], для изучения структуры частных асимптотических решений системы (1) в случае кратного корня характеристического уравнения применяется метод диаграмм Ньютона, что позволило преодолеть трудности выбора дробных показателей степеней параметра ε , по которым следует вести разложения искомых $u(t, \varepsilon)$ и $\lambda(t, \varepsilon)$ и определения коэффициентов этих разложений. При этом задача решается в наиболее общей постановке, без ограничений на кратность корня $\lambda_0(t)$.

Предложенный метод определения структуры асимптотических разложений не зависит от того, какой является матрица $B(t)$ — вырожденной или невырожденной. Значение имеет лишь стабильность её поведения на рассматриваемом промежутке $[0; T]$. Вырожденность матрицы $B(t)$ существенно влияет лишь на обоснование асимптотического характера построенных решений. Поэтому полученные результаты переносятся и на тот случай, когда $B(t)$ — единичная матрица и из них, как следствие, вытекают частные результаты, полученные ранее другими авторами.

В начале статьи приводятся некоторые вспомогательные сведения, которые используются в дальнейших выкладках.

Основная часть работы посвящена выводу уравнения разветвления, которому должна удовлетворять искомая функция $\lambda(t, \varepsilon)$. Проводится анализ этого уравнения и устанавливается применимость метода диаграмм Ньютона для определения

вида разложений функции $\lambda(t, \varepsilon)$ и соответствующих условий, которые необходимо наложить на коэффициенты системы, чтобы эти разложения формально удовлетворяли уравнению разветвления. Указывается также алгоритм нахождения коэффициентов разложений для $\lambda(t, \varepsilon)$ и $u(t, \varepsilon)$ при выполнении найденных условий.

В заключительной части статьи приводится замечание по поводу асимптотического характера формальных решений, строящихся по указанной схеме.

2. Некоторые вспомогательные утверждения и результаты

Прежде чем перейти к вопросу о построении решений системы (1), приведём некоторые вспомогательные утверждения, которые будут использоваться в дальнейших выкладках.

Пусть $F(\lambda) = \|f_{ij}(\lambda)\|_1^n$ — квадратная функциональная матрица, элементы которой зависят от комплексного параметра λ . Используя идеи [4, с. 123-127], можно доказать следующее утверждение.

Лемма. *Если уравнение $\det F(\lambda) = 0$ имеет изолированный корень λ_0 кратности $p < \infty$, $\text{rank} F(\lambda_0) = n - 1$ и матричная функция $F(\lambda)$ p раз дифференцируема в окрестности точки λ_0 , то корню λ_0 соответствует жорданова цепочка длины p , состоящая из векторов $\varphi_i, i = \overline{1, p}$, которые удовлетворяют соотношениям*

$$F(\lambda_0) \varphi_1 = 0;$$

$$F(\lambda_0) \varphi_2 + F'(\lambda_0) \varphi_1 = 0;$$

$$F(\lambda_0) \varphi_3 + \frac{1}{1!} F'(\lambda_0) \varphi_2 + \frac{1}{2!} F''(\lambda_0) \varphi_1 = 0;$$

.....

$$F(\lambda_0) \varphi_p + \frac{1}{1!} F'(\lambda_0) \varphi_{p-1} + \frac{1}{2!} F''(\lambda_0) \varphi_{p-2} + \dots + \frac{1}{(p-1)!} F^{(p-1)}(\lambda_0) \varphi_1 = 0,$$

а уравнение

$$F(\lambda_0) y + \sum_{i=1}^p \frac{1}{i!} F^{(i)}(\lambda_0) \varphi_{p+1-i} = 0$$

неразрешимо относительно вектора y .

Рассмотрим теперь матричный квазиполином

$$F(t, \lambda) = A_0(t) - \lambda B(t) + e^{-\lambda \Delta(t)} C_0(t),$$

который определяет свойства системы (1). Предположим, что выполняются условия:

5°. Характеристическое уравнение

$$\det F(t, \lambda) = 0 \tag{4}$$

имеет на заданном отрезке $[0; T]$ изолированный корень $\lambda_0(t)$ постоянной кратности $p < \infty$;

6°. $\text{rank} F(t, \lambda_0(t)) = n - 1, \forall t \in [0; T]$.

Тогда согласно лемме этому корню соответствует жорданова цепочка длины p , векторы которой $\varphi_i(t), i = \overline{1, p}$ удовлетворяют соотношениям

$$F(t, \lambda_0(t)) \varphi_1(t) = 0; \quad (5)$$

$$F(t, \lambda_0(t)) \varphi_k(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i!} F_{\lambda}^{(i)}(t, \lambda_0(t)) \varphi_{k-i}(t) = 0, k = \overline{2, p}. \quad (6)$$

Векторы $\varphi_i(t), i = \overline{1, p}$ из этих соотношений определяются неоднозначно. Эту неоднозначность можно устранить, определив их следующим образом. Поскольку все элементы матриц $A_0(t), B(t), C_0(t)$ и функция $\lambda(t)$ бесконечно дифференцируемы на заданном отрезке $[0; T]$, то согласно лемме 3.1 из [4, с. 117] функция $\lambda_0(t)$ также бесконечно дифференцируема на этом отрезке. Следовательно, все элементы матрицы $F(t, \lambda_0(t))$ бесконечно дифференцируемы на $[0; T]$, и, значит [7], вектор $\varphi_1(t)$ можно определить так, чтобы он имел производные любого порядка. Обозначив его $\varphi(t)$, последующие векторы данной цепочки определим по формулам

$$\varphi_k(t) = - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i!} H(t) F_{\lambda}^{(i)}(t, \lambda_0(t)) \varphi_{k-i}(t), k = \overline{2, p}, \quad (7)$$

где $H(t)$ — полуобратная матрица к матрице $F(t, \lambda_0(t))$, которую определим так, чтобы все её элементы были бесконечно дифференцируемы на заданном отрезке [3, §1.2].

Учитывая рекуррентный характер формулы (7), преобразуем её к виду

$$\varphi_k(t) = \sum_{i=1}^k (-1)^i \tilde{P}_i^k(HF_{\lambda}) \varphi(t), k = \overline{1, p}, \quad (8)$$

где символом $\tilde{P}_i^k(HF_{\lambda})$ обозначена сумма всех возможных произведений i множителей

$$\frac{1}{s_1!} H(t) F_{\lambda}^{(s_1)}(t, \lambda_0(t)), \frac{1}{s_2!} H(t) F_{\lambda}^{(s_2)}(t, \lambda_0(t)), \dots, \frac{1}{s_i!} H(t) F_{\lambda}^{(s_i)}(t, \lambda_0(t))$$

таких, что $s_1 + s_2 + \dots + s_i = k$.

Обозначим через $\psi(t)$ элемент нуль-пространства матрицы $F^*(t, \lambda_0(t))$, сопряженной к $F(t, \lambda_0(t))$, который, как и вектор $\varphi(t)$, определим так, чтобы он был бесконечно дифференцируемым на $[0; T]$. Тогда из разрешимости уравнений (6) следует, что

$$\sum_{i=1}^k (-1)^i (P_i^k(HF_{\lambda}) \varphi, \psi) = 0, k = \overline{1, p-1}, \quad (9)$$

а так как при $k = p + 1$ это уравнение неразрешимо, то

$$\sum_{i=1}^p (-1)^i (P_i^k(HF_\lambda) \varphi, \psi) \neq 0, \forall t \in [0; T].$$

Символы $\tilde{P}_i^k(HF_\lambda)$ и $P_i^k(HF_\lambda)$ связаны соотношением $HP_i^k(HF_\lambda) = \tilde{P}_i^k(HF_\lambda)$, т.е. выражение $P_i^k(HF_\lambda)$ отличается от $\tilde{P}_i^k(HF_\lambda)$ тем, что во всех его слагаемых отсутствует первый множитель H .

Поскольку вектор $\psi(t)$ определяется с точностью до произвольного скалярного множителя, то за счёт его выбора можно добиться, чтобы

$$\sum_{i=1}^p (-1)^i (P_i^k(HF_\lambda) \varphi, \psi) = 1, \tag{10}$$

что и предполагается в дальнейшем.

3. Вывод уравнения разветвления

Перейдём к построению решений системы (1), которые, следуя [4], будем искать в виде (3). Подставив вектор (3) в систему (1), будем иметь

$$(A_0 - \lambda_0 B) u = \lambda B u - \tilde{A} u + \varepsilon B u' - \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t-\varepsilon\Delta} (\lambda_0 + \lambda) dt\right) C u(t - \varepsilon\Delta, \varepsilon), \tag{11}$$

где

$$\tilde{A}(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k A_k(t)$$

(дифференцирование здесь и в дальнейшем ведётся по переменной t).

Разложив функции $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t-\varepsilon\Delta} \lambda_0(\tau) d\tau\right)$, $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t-\varepsilon\Delta} \lambda(\tau, \varepsilon) d\tau\right)$ и вектор-функцию $u(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon)$ формально в ряд по степеням ε , получим

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t-\varepsilon\Delta(t)} \lambda_0(\tau) d\tau\right) = e^{-\lambda_0(t)\Delta(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{i+k}}{i!} \Delta^{i+k}(t) P_i^k(\alpha);$$

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t-\varepsilon\Delta(t)} \lambda(\tau, \varepsilon) d\tau\right) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+k}}{k!} \Delta^{s+k}(t) P_k^s(\beta);$$

$$u(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{(-1)^k}{k!} \Delta^k \frac{d^k}{dt^k} u(t, \varepsilon),$$

где

$$P_i^k(\alpha) = \sum_{j_1+\dots+j_i=k} \alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\dots\alpha_{j_i}, \alpha_j(t) = \frac{1}{(j+1)!}\lambda_0^{(j)}(t), j=1,2,\dots,$$

$$P_k^s(\beta) = \sum_{j_1+\dots+j_k=s} \beta_{j_1}\beta_{j_2}\dots\beta_{j_k}, \beta_j(t,\varepsilon) = \frac{1}{(j+1)!}\lambda^{(j)}(t,\varepsilon), j=0,1,\dots,$$

причём по определению полагаем $P_0^0(\alpha) = P_0^0(\beta) = 1, P_0^s(\alpha) = P_0^s(\beta) = 0$ при $s > 0$.

Подставив эти разложения в правую часть равенства (11) и перегруппировав слагаемые, преобразуем его к виду

$$F(t, \lambda_0(t))u(t, \varepsilon) = \lambda(t, \varepsilon)B(t)u(t, \varepsilon) - \tilde{A}(t, \varepsilon)u(t, \varepsilon) + \varepsilon B(t)u'(t, \varepsilon) +$$

$$+ \sum_{k+s \geq 1} Q_{ks}[\lambda^k(t, \varepsilon)]\varepsilon^s u(t, \varepsilon),$$

где

$$Q_{ks}[\lambda^k] = -\frac{(-1)^{s+k}\Delta^{s+k}}{k!}e^{-\lambda_0\Delta} \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^{s-i} \sum_{m=0}^{s-i-j} \sum_{r=0}^i \frac{(-1)^{r-m}\Delta^{r-m}}{r!(s-i-j-m)!} \times$$

$$\times P_r^i(\alpha)P_k^j(\beta)C_m \frac{d^{s-i-j-m}}{dt^{s-i-j-m}},$$

$k+s \geq 1$.

Присоединив к операторным выражениям $Q_{ks}[\lambda^k]$ остальные слагаемые, будем иметь

$$F(t, \lambda_0)u = R(\lambda, \varepsilon)u, \quad (12)$$

где

$$R(\lambda, \varepsilon) = \sum_{k+s \geq 1} \varepsilon^s R_{ks}[\lambda^k], \quad (13)$$

$$R_{k0}[\lambda^k] = \lambda\delta_{k,1}B + Q_{k0}[\lambda^k] = -\lambda^k \left[-\delta_{k,1}B + \frac{(-1)^k}{k!}\Delta^k e^{-\lambda_0\Delta}C_0 \right] =$$

$$= -\frac{1}{k!}F_\lambda^{(k)}(t, \lambda_0)\lambda^k, k=1,2,\dots, \quad (14)$$

$$R_{0s}[\lambda^k] = -A_s + \delta_{s,1}B \frac{d}{dt} - Q_{0s}[\lambda^k] = -A_s + \delta_{s,1}B \frac{d}{dt} - e^{-\lambda_0\Delta} \sum_{i=0}^s \frac{(-1)^{s-i}\Delta^{s-i}}{(s-i)!} C_i \frac{d^{s-i}}{dt^{s-i}} -$$

$$- e^{-\lambda_0\Delta} \sum_{i=1}^s \sum_{r=1}^i \sum_{j=0}^{s-i} \frac{(-1)^{r+s-j}\Delta^{r+s-j}}{(s-i-j)!} P_r^i(\alpha) C_j \frac{d^{s-i-j}}{dt^{s-i-j}}, s=1,2,\dots, \quad (15)$$

$$R_{ks}[\lambda^k] = (-1)^{k+1} \frac{\Delta^k}{k!} e^{-\lambda_0\Delta} \sum_{j=0}^s \sum_{i=0}^{s-j} \frac{(-1)^{s-i}\Delta^{s-i}}{(s-i-j)!} P_k^j(\beta) C_i \frac{d^{s-i-j}}{dt^{s-i-j}} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{\Delta^k}{k!} e^{-\lambda_0 \Delta} \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{s-i} \sum_{m=0}^{s-i-j} \sum_{r=1}^i \frac{(-1)^{r+s-m} \Delta^{r+s-m}}{r! (s-i-j-m)!} P_r^i(\alpha) P_k^j(\beta) C_m \frac{d^{s-i-j-m}}{dt^{s-i-j-m}},$$

$$k \geq 1, s \geq 1. \tag{16}$$

Вектор $u(t, \varepsilon)$ будет удовлетворять уравнению (12) тогда и только тогда, когда

$$(R(\lambda, \varepsilon) u, \psi) = 0. \tag{17}$$

При выполнении этого условия имеем

$$u = HRu + c\varphi,$$

где c — произвольный скалярный множитель. Поскольку этот множитель является лишь тем множителем, с точностью до которого определяется решение системы (1), то положим $c = 1$, получим

$$(E - HR(\lambda, \varepsilon)) u = \varphi,$$

где E — единичная матрица. Легко убедиться, что это равенство формально удовлетворяется, если вектор u представить в виде формального разложения

$$u = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} (HR(\lambda, \varepsilon))^k. \tag{18}$$

Подставив (18) в (17), получим искомое уравнение разветвления

$$L(\lambda, \varepsilon) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (R(\lambda, \varepsilon) (HR(\lambda, \varepsilon))^k \varphi, \psi) = 0, \tag{19}$$

которому должна удовлетворять функция $\lambda(t, \varepsilon)$.

Учитывая (13), представим операторное выражение $L(\lambda, \varepsilon)$ в виде разложения

$$L(\lambda, \varepsilon) = \sum_{k+s \geq 1} \varepsilon^s L_{ks} [\lambda^k], \tag{20}$$

где k — суммарный степень функции λ в записи операторного выражения $L_{ks} [\lambda^k]$. Обозначив

$$\tilde{L}(\lambda, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda, \varepsilon) (HR(\lambda, \varepsilon))^k \tag{21}$$

и приняв во внимание (13), имеем

$$H\tilde{L}(\lambda, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} (HR(\lambda, \varepsilon))^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i+j \geq 1} HR_{ij} [\lambda^i] \varepsilon^j \right)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i+j \geq k} \tilde{P}_k^{i,j} (HR) [\lambda^i] \varepsilon^j. \quad (22)$$

Изменив порядок суммирования и поменяв индексы, получим

$$H\tilde{L}(\lambda, \varepsilon) = \sum_{k+s \geq 1} \sum_{i=1}^{k+s} \tilde{P}_i^{k,s} (HR) [\lambda^k] \varepsilon^s, \quad (23)$$

где символом $\tilde{P}_i^{k,s} (HR) [\lambda^k]$ обозначена сумма всевозможных произведений i операторных "множителей" $HR_{k_1 s_1} [\lambda^{k_1}]$, $HR_{k_2 s_2} [\lambda^{k_2}]$, ..., $HR_{k_i s_i} [\lambda^{k_i}]$ таких, что $k_1 + k_2 + \dots + k_i = k$, $s_1 + s_2 + \dots + s_i = s$ (k_j, s_j — целые неотрицательные числа, которые одновременно не равны нулю).

Сравнив (19) с (22), приходим к выводу, что

$$L_{ks} [\lambda^k] = \sum_{i=1}^{k+s} \left(P_i^{k,s} (HR) [\lambda^k] \varphi, \psi \right), k+s \geq 1, \quad (24)$$

где выражение $P_i^{k,s} (HR) [\lambda^k]$ связано с $\tilde{P}_i^{k,s} (HR) [\lambda^k]$ соотношением

$$HP_i^{k,s} (HR) [\lambda^k] = \tilde{P}_i^{k,s} (HR) [\lambda^k].$$

Используя (14), (9), (10), в частности, будем иметь

$$\begin{aligned} L_{k0} [\lambda^k] &= \sum_{i=1}^k \left(P_i^{k,0} (HR) [\lambda^k] \varphi, \psi \right) = \sum_{i=1}^k (-1)^i \left(P_i^k (HF\lambda) \varphi, \psi \right) \lambda^k = \\ &= \delta_{k,p} \lambda^k, k = \overline{1, p}; \end{aligned} \quad (25)$$

$$L_{0s} = \sum_{i=1}^s \left(P_i^{0,s} (HR) \varphi, \psi \right) = \sum_{s_1+s_2+\dots+s_i=s} \left(R_{0s_1} HR_{0s_2} \dots HR_{0s_i} \varphi, \psi \right), s = 1, 2, \dots \quad (26)$$

С учётом (20), (25), (26) уравнение разветвления (19) запишется в виде

$$\lambda^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} L_{k0} \lambda^k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{ks} [\lambda^k] = 0. \quad (27)$$

Подставив (22), (23) в (18), получим соответствующее выражение для вектора $u(t, \varepsilon)$:

$$u(t, \varepsilon) = \varphi + H\tilde{L}(\lambda, \varepsilon) = \varphi + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H\tilde{L}_{0s} \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s H\tilde{L}_{ks} [\lambda^k] \varphi, \quad (28)$$

где

$$\tilde{L}_{ks} [\lambda^k] = \sum_{i=1}^{k+s} P_i^{k,s} (HR) [\lambda^k], k+s \geq 1. \quad (29)$$

В итоге доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются условия $1^\circ - 6^\circ$. Тогда для того, чтобы вектор (3) был формальным решением системы уравнений (1), необходимо и достаточно, чтобы функция $\lambda(t, \varepsilon)$ формально удовлетворяла уравнению (27), операторные коэффициенты $L_{ks}[\lambda^k]$ которого определяются формулами (24) – (26). Соответствующая вектор-функция $u(t, \varepsilon)$ представляется в виде формального разложения (28), коэффициенты которого выражаются формулами (29).

4. Исследование уравнения разветвления

Уравнение (27) по своей форме подобно уравнению разветвления задачи о возмущении собственных значений и собственных элементов фредгольмовых операторов, которая изучалась в [7] и где для анализа структуры его решений применялся метод диаграмм Ньютона. И хотя, в отличие от уравнения разветвления, которое рассматривалось в [7], операторные коэффициенты $L_{ks}[\lambda^k]$ уравнения (27) зависят от искомой функции $\lambda(t, \varepsilon)$ и содержат неограниченные операторы дифференцирования, как показано в [2, 3], для анализа решений таких уравнений также можно эффективно применять метод диаграмм Ньютона.

Согласно [3, с. 130], чтобы найти решения уравнения (27), каждому отличному от нуля коэффициенту $L_{ks}[\lambda^k]$ необходимо поставить в соответствие точку $(k; s)$ на координатной плоскости O_{ks} . Затем вокруг ближайшей к оси O_k точки $A_0(0; s_0)$ против часовой стрелки вращаем прямую, пока она не встретится с некоторой точкой $A_1(k_1; s_1)$. Далее прямую в том же направлении вращаем вокруг точки $A_1(k_1; s_1)$, пока она не встретится со следующей точкой $A_2(k_2; s_2)$, и т.д. (рис.1).

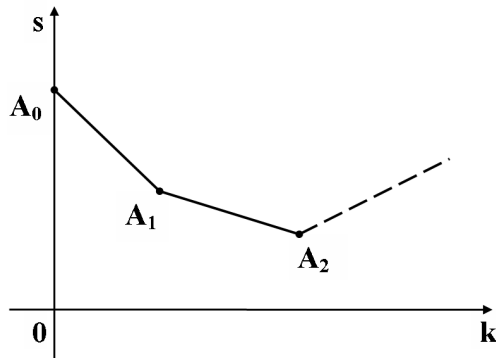


Рис. 1.

Соединив найденные точки, и получим соответствующую диаграмму Ньютона. Пусть $\frac{l}{m}$ — тангенс угла наклона к отрицательному направлению оси O_k некоторого звена $A_{i-1}A_i$ построенной диаграммы. Тогда этому звену соответствует решение уравнения (27), которое представляется в виде формального разложения

$$\lambda(t, \varepsilon) = \lambda_1(t) \varepsilon^{\frac{l}{m}} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{l+i}{m}} \lambda_i(t), \quad (30)$$

если определяющее уравнение

$$\sum L_{ks} [\lambda_1^k] = 0$$

(из которого находится коэффициент $\lambda_1(t)$) имеет простой отличный от нуля корень. Символом \sum' здесь обозначено суммирование по тем точкам $(k; s)$, которые принадлежат данному звену диаграммы.

Если $\lambda_1(t)$ — тождественно кратный корень определяющего уравнения, то в разложении (30) сохраняется только первый член, а для определения последующих необходимо использовать другое уравнение разветвления, сделав в (27) замену $\lambda = \lambda_1 \varepsilon^{\frac{1}{m}} + \eta$, и т.д. Как показано в [2], при отсутствии точек поворота этот процесс конечен и на определённом этапе соответствующее разложение стабилизируется. При этом для каждого звена диаграммы Ньютона можно построить столько линейно независимых решений уравнения (27), какова длина проекции этого звена на ось абсцисс.

Исходя из этого метода, проанализируем уравнение (27). Прежде всего заметим, что из наличия в нём слагаемого λ^p сразу следует, что на координатной плоскости всегда присутствует точка $(p; 0)$, так как $L_{p0} = 1$.

Рассмотрим коэффициент $L_{1s}[\lambda]$, выделяя в нём слагаемые с наивысшим порядком производной от функции λ . Так как согласно (15), (16)

$$R_{0s} = -\frac{1}{s!} F_\lambda^{(s)}(t, \lambda_0) \frac{d^s}{dt^s} + \dots, s = 1, 2, \dots,$$

$$R_{1s}[\lambda] = -(-1)^{s+1} \Delta^{s+1} e^{-\lambda_0 \Delta} \beta_s C_0 + \dots = -\frac{1}{(s+1)!} \lambda^{(s)} F_\lambda^{s+1}(t, \lambda_0(t)) + \dots,$$

$$s = 0, 1, \dots,$$

где троеточием обозначены слагаемые, продуцирующие в составе $L_{1s}[\lambda]$ производные от λ , порядок которых ниже чем s , то

$$P_i^{1,s}(HR)[\lambda] = \sum_{s_1+s_2+\dots+s_i=s} R_{0s_1} H R_{0s_2} \dots H R_{0s_{i-1}} H R_{1s_i} + \dots =$$

$$= (-1)^i \lambda^{(s)} \sum_{s_1+s_2+\dots+s_i=s} \frac{1}{s_1!} F_\lambda^{(s_1)} \frac{1}{s_2!} H F_\lambda^{(s_2)} \dots \frac{1}{s_{i-1}!} H F_\lambda^{(s_{i-1})} \frac{1}{(s_i+1)!} H F_\lambda^{(s_i+1)} + \dots,$$

где индексы s_1, \dots, s_{i-1} принимают натуральные значения, а s_i — целые неотрицательные. Приняв во внимание последнее обстоятельство, получим

$$P_i^{1,s}(HR)[\lambda] = (-1)^i \lambda^{(s)} P_i^{s+1}(HF_\lambda) + \dots$$

Следовательно,

$$L_{1s}[\lambda] = \sum_{i=1}^{s+1} (-1)^i (P_i^{s+1}(HF_\lambda) \varphi, \psi) \lambda^{(s)} + \dots,$$

откуда, учитывая (9), (10), имеем

$$L_{1,p-1}[\lambda] = \frac{d^{p-1} \lambda}{dt^{p-1}} + \dots$$

Аналогично, выделяя слагаемые с наивысшим порядком производной от функции λ в выражении $L_{ks}[\lambda^k]$, установим, что

$$L_{k,p-k}[\lambda^k] = D^{p-k}[\lambda^k] + \dots, k = \overline{3, p-1},$$

где $D^s[\lambda^k]$ — сумма всех возможных "произведений" s "множителей" $D = \frac{d}{dt}$ и k множителей λ , причем дифференциальный оператор D во всех этих слагаемых действует на всё выражение справа от него и последним множителем является λ .

Таким образом, независимо от вида коэффициентов системы (1) на координатной плоскости O_{ks} всегда присутствуют точки $(k; p - k)$, $k = \overline{0, p - 1}$, откуда следует, что уравнение (27) может иметь не более одного нулевого решения (когда все выражения $L_{0s} \equiv 0$), а общее число линейно независимых решений равно кратности p корня $\lambda_0(t)$ характеристического уравнения (4).

Учитывая эти выводы, можно рассматривать самые разнообразные случаи расположения точек на диаграмме, определяя структуру и вид частных формальных решений системы (1). В этом смысле формулы (24) – (26) содержат полную информацию о структуре частных решений системы (1), соответствующих данному корню $\lambda_0(t)$ её характеристического уравнения, при условии стабильного поведения коэффициентов $L_{ks}[\lambda^k]$ на всём рассматриваемом промежутке изменения независимой переменной.

Рассмотрим некоторые конкретные ситуации.

Предположим, что

$$L_{01} = -(A_1\varphi, \psi) + (B\varphi', \psi) + \Delta e^{-\lambda_0\Delta} (C_0\varphi', \psi) - e^{-\lambda_0\Delta} (C_1\varphi, \psi) - \frac{1}{2}\Delta^2\lambda_0'e^{-\lambda_0\Delta} (C_0\varphi, \psi) \neq 0, \forall t \in [0; T]. \tag{31}$$

Тогда соответствующая диаграмма представляет собой отрезок, соединяющий точки $(0; 1)$ и $(p; 0)$ (рис.2).

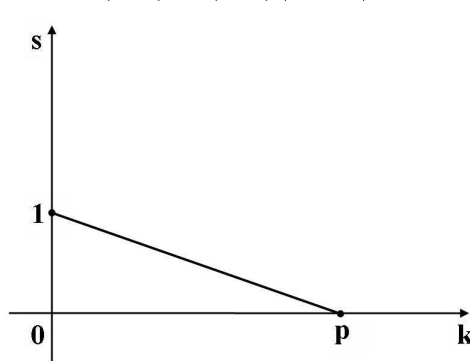


Рис. 2.

Тангенс угла наклона этого отрезка к отрицательному направлению оси O_k равен $\frac{1}{p}$, а определяющее уравнение

$$L_{01} + \lambda^p = 0 \tag{32}$$

имеет p простых отличных от нуля корней:

$$\lambda_1^{(j)} = \sqrt[p]{|L_{01}(t)|} \exp\left(i \frac{\arg(-L_{01}) + 2\pi(j-1)}{p}\right), \tag{33}$$

$$j = \overline{1, p}.$$

Следовательно, уравнение (27) имеет p различных решений, которые представляются в виде формальных разложений по степеням $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$:

$$\lambda_j(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k^{(j)}(t), j = \overline{1, p}. \tag{34}$$

Коэффициенты этого разложения можно найти методом неопределённых коэффициентов, подставив его в уравнение (27). Действительно, опустив для упрощения индекс j , подставим (34) в (27). Будем иметь

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \lambda_i(t) \right)^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \lambda_i(t) \right)^k + \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{ps} L_{0s} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \mu^{ps} L_{ks} \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \lambda_i(t) \right)^k \right] = 0. \end{aligned}$$

Осуществив формальное умножение рядов и собрав выражения с одинаковыми степенями μ , после несложных преобразований путём изменения порядка суммирования и замены индексов получим

$$\begin{aligned} & \sum_{r=p}^{\infty} \mu^r P_p^r(\lambda) + \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{k=p+1}^r \mu^r P_k^r(\lambda) L_{k0} + \sum_{r=p}^{\infty} \mu^r L_{0, \frac{r}{p}} + \\ & + \sum_{r=p+1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{r-1}{p} \rfloor} \sum_{k=1}^{r-sp} \mu^r L_{ks} [P_k^{r-sp}(\lambda)] = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где $P_k^r(\lambda)$ — сумма всевозможных произведений k множителей $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_k}$ с натуральными индексами, сумма которых $i_1 + i_2 + \dots + i_k = r$, а оператор L_{ks} действует на все слагаемые выражения $P_k^{r-sp}(\lambda)$ по тому же правилу, что и на λ^k в формуле (24).

Приравняв в (35) выражения при μ^k к нулю, приходим к бесконечной системе уравнений:

$$P_p^r(\lambda) + \sum_{k=p+1}^r P_k^r(\lambda) L_{k0} + L_{0, \frac{r}{p}} + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{r-1}{p} \rfloor} \sum_{k=1}^{r-sp} L_{ks} [P_k^{r-sp}(\lambda)] = 0, \quad r = p, p+1, \dots \quad (36)$$

(символом $[a]$ обозначена целая часть числа a , а $L_{0, \frac{r}{p}} = 0$, если r не является кратным p).

Легко усмотреть, что при $r = p$ уравнение (36) совпадает с (32), а при $r = p+1$ имеем

$$P_p^{p+1}(\lambda) + P_{p+1}^{p+1}(\lambda) L_{p+1,0} + L_{11} [P_1^1(\lambda)] = 0,$$

или

$$p\lambda_2\lambda_1^{p-1} + \lambda_1^{p+1}L_{p+1,0} + L_{11}[\lambda_1] = 0,$$

откуда

$$\lambda_2(t) = -\frac{\lambda_1^{p+1}L_{p+1,0} + L_{11}[\lambda_1]}{p\lambda_1^{p-1}}.$$

Если $\lambda_i(t)$ известны при $i < k$, то для определения $\lambda_k(t)$ необходимо использовать уравнение (36) при $r = p + k - 1$. Выделяя в нём уже известные слагаемые, найдём

$$\lambda_k(t) = -\frac{1}{p\lambda_1^{p-1}} \left[\tilde{P}_p^{p+k-1}(\lambda) + \sum_{j=p+1}^{p+k-1} P_j^{p+k-1}(\lambda) L_{j0} + L_{0, \frac{p+k-1}{p}} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{p+k-2}{p} \rfloor} \sum_{j=1}^{p+k-1-ip} L_{ji} \left[P_j^{p+k-ip}(\lambda) \right] \right] = 0, \tag{36}$$

где $\tilde{P}_p^{p+k-1}(\lambda)$ — та часть выражения $P_p^{p+k-1}(\lambda)$, которая не содержит λ_k .

Подставив ряд (34) в (28) и сгруппировав выражения с одинаковыми степенями μ , получим соответствующее разложение для вектора $u(t, \varepsilon)$:

$$u(t, \varepsilon) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k(t), \tag{37}$$

где

$$u_k(t) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{p} \rfloor} \sum_{j=1}^{k-ip} H\tilde{L}_{ji} \left[P_j^{k-ip}(\lambda) \right] \varphi + H\tilde{L}_{0, \frac{k}{p}} \varphi, k = 1, 2, \dots \tag{38}$$

В результате приходим к такой теореме.

Теорема 2. Если выполняются условия 1° – 6° и (31), то система (1) имеет p частных формальных решений вида (3), где вектор $u(t, \varepsilon)$ и функция $\lambda(t, \varepsilon)$ представляются разложениями (34), (37) по степеням параметра $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$, коэффициенты которых определяются с помощью рекуррентных формул (33), (36), (38).

Заметим, что, как следствие, из этой теоремы вытекает аналогичный результат, полученный в [4] при $p = 2$.

Допустим теперь, что $p > 2$ и условие (31) тождественно не выполняется, т.е.

$$-(A_1\varphi, \psi) + (B\varphi', \psi) + \Delta e^{-\lambda_0\Delta} (C_0\varphi', \psi) - e^{-\lambda_0\Delta} (C_1\varphi, \psi) - \frac{1}{2}\Delta^2\lambda_0' e^{-\lambda_0\Delta} (C_0\varphi, \psi) \equiv 0. \tag{39}$$

Но

$$\begin{aligned} L_{11} &= (A_1 H F'_\lambda(t, \lambda_0) \varphi, \psi) + (F'_\lambda(t, \lambda_0) H A_1 \varphi, \psi) + \\ &+ \frac{1}{2} \lambda_0' [(F''_\lambda(t, \lambda_0) H F'_\lambda(t, \lambda_0) \varphi, \psi) + (F'_\lambda(t, \lambda_0) H F''_\lambda(t, \lambda_0) \varphi, \psi)] + \\ &+ (F'_\lambda(t, \lambda_0) (H F'_\lambda(t, \lambda_0) \varphi)', \psi) + \end{aligned}$$

$$+e^{-\lambda_0 \Delta} \left[-\Delta^2 (C_0 \varphi', \psi) + \Delta (C_1 \varphi, \psi) + \frac{1}{2} \Delta^3 \lambda'_0 (C_0 \varphi, \psi) \right] \neq 0, \forall t \in [0; T] \quad (40)$$

и

$$L_{0s_0} \neq 0, \forall t \in [0; T], s_0 \geq 2. \quad (41)$$

Тогда соответствующая диаграмма состоит из двух звеньев: отрезка с концами в точках $(1; 1), (p; 1)$ и отрезка, соединяющего точки $(0; s_0)$ и $(1; 1)$ (рис.3).

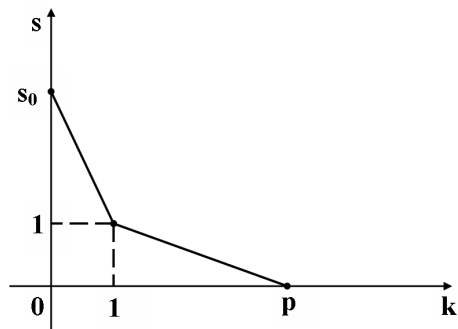


Рис. 3.

Первому звену, наклон которого равен $\frac{1}{p-1}$, соответствует $p-1$ решений уравнения (27), которые представляются в виде разложений

$$\lambda_j(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{p-1}} \lambda_k^{(j)}(t), j = \overline{1, p-1} \quad (42)$$

по дробным степеням ε , а второму звену — одно решение в виде формального ряда по целым степеням ε :

$$\lambda(t, \varepsilon) = \sum_{k=s_0-1}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k(t). \quad (43)$$

Аналогичными разложениями будут представляться и соответствующие векторы:

$$u_j(t, \varepsilon) = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{p-1}} u_k^{(j)}(t), j = \overline{1, p-1}; \quad (44)$$

$$u(t, \varepsilon) = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t). \quad (45)$$

При этом первые коэффициенты разложений (42), (43) находятся из определяющих уравнений

$$L_{11} + \lambda_1^{p-1} = 0; L_{0s_0} + \lambda_1 L_{11} = 0,$$

а остальные можно определить методом неопределённых коэффициентов по той же схеме, что и в предыдущем случае.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если выполняются условия $1^\circ - 6^\circ$ и (39)–(41), то система уравнений (1) имеет p частных формальных решений вида (3), где функция $\lambda(t, \varepsilon)$ и вектор $u(t, \varepsilon)$ представляются разложениями вида (42) – (45).

Используя методы работ [3, 4] и результаты асимптотического анализа общего решения вырожденных сингулярно возмущённых линейных систем обыкновенных

дифференциальных уравнений, проведенного в [3], можно показать, что строящиеся по описанной схеме формальные решения системы (1) имеют асимптотический характер при $\varepsilon \rightarrow 0$. А именно, если вырожденная система

$$\varepsilon B(t) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon) x$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условиям теоремы о приводимости к центральной канонической форме [3, с. 62] и элементы спектра матричных пучков $A(t, \varepsilon) - \lambda B(t)$, $B(t) - \omega A(t, \varepsilon)$ таковы, что их действительные части не меняют знак на заданном отрезке $[0; T]$, то для каждого формального решения системы (1) существует такое точное решение $x(t, \varepsilon)$, что

$$\|x_m(t, \varepsilon) - x(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^\alpha),$$

где $x_m(t, \varepsilon)$ — приближение, которое получается, если соответствующие формальные ряды оборвать на m -м члене, α — некоторое положительное число.

Список цитируемых источников

1. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
2. *Жукова Г.С.* Методы возмущений в задаче асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных линейных систем. — К., 1983. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; №80.38).
3. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — К.: Вища школа, 2000. — 294 с.
4. *Фещенко С.Ф., Шкіль Н.И., Пидченко Ю.П., Сотниченко Н.А.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — К.: Наук. думка, 1981. — 294 с.
5. *Шкіль Н.И.* Асимптотическое решение системы линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вопросы теории и истории дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1968. — С. 165–182.
6. *Birkhoff G.D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. — 1908. — V. 9. — P. 219–231.
7. *Sibuya Y.* Some global properties of functions of one variable // Math. Anal. — 1965. — V. 161, № 1. — P. 67–77.

Получена 09.06.2009