Динамические системы, вып. 20 (2006), 123–132

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.98

Пространства K-непрерывных линейных операторов и функционалов

И. В. Орлов, Е. В. Божонок

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: oiv@crimea.edu; katboz@crimea.edu*

Аннотация. Введены и изучены пространства компактно-непрерывных линейных операторов и функционалов, исследована связь с классическими операторными и функциональными пространствами. Рассмотрены приложения полученных результатов к свойствам компактных производных.

Введение. Предварительные сведения

Активно ведущиеся в последние десятилетия исследования по экстремумам вариационных функционалов в пространствах Соболева (см., напр., [1]-[4]) показали, что как дифференциальные свойства, так и экстремумы интегральных функционалов в соболевском случае имеют существенно иную природу, чем в банаховом случае. В наших работах [5]-[7], с целью исследования данной задачи, введены и изучены компактная дифференцируемость (K-дифференцируемость) отображений и компактные экстремумы (K-экстремумы) функционалов. На операторном уровне эти понятия естественно оказались связанными с K-непрерывными (компактно непрерывными) линейными операторами и функционалами. Возникает необходимость в изучении сходимости в соответствующих операторных и функциональных пространствах, с чем и связана настоящая работа.

Всюду далее $(E;F)$ – пространство линейных непрерывных операторов, действующих из E в F; $(E^1;(E^2;F))$ – пространство линейных непрерывных операторов, действующих из E^1 в $(E^2;F)$; $(E^1,E^2;F)$ – пространство билинейных непрерывных операторов, действующих из $E^1 \times E^2$ в F, E^* – топологическое сопряженное к E; $(E^1,E^2)^*$ – пространство билинейных непрерывных форм на $E^1 \times E^2$. Через $\varinjlim$ и $\varprojlim$ обозначаются, соответственно, локально выпуклый индуктивный и проективный пределы.

Наконец, для заданных локально выпуклых отделимых пространств E и F, скажем, что отображение $f : E \to F$ K-дифференцируемо (дважды K-дифференцируемо) в точке $x \in E$, если для всякого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$

сужение f на подпространство $x + span\, C$ дифференцируемо (дважды дифференцируемо) по Фреше в точке x относительно нормы в $span\, C$, порожденной множеством C. Некоторые свойства K-производных и их связь с K-экстремумами рассмотрены в [7].

1. Пространство E_K. Непрерывное вложение $E_K \hookrightarrow E$

Далее E – вещественное локально выпуклое отделимое пространство (ЛВП), $K(E)$ – множество всех абсолютно выпуклых компактов в E. Для всякого $C \in K(E)$ положим $E_C := span\, C$ и введем норму $\|\cdot\|_C$ в E_C, порожденную C:

$$\|x\|_C := p_C(x),$$

где p_C – функционал Минковского множества C.

Лемма 1. *Каждое пространство* $(E_C, \|\cdot\|_C)$, $C \in K(E)$, *является банаховым.*

Доказательство. Так как C полно в исходной топологии τ_E пространства E как компакт, то оно полно и в индуцированной топологии $\tau_E\big|_{E_C}$ в E_C.

Таким образом, топология в E_C, порожденная базой окрестностей $\{\varepsilon C\}_{\varepsilon>0}$, т.е. порожденная $\|\cdot\|_C$, состоит из множеств, полных в исходной индуцированной топологии $\tau_E\big|_{E_C}$. Кроме того, так как любой $C \in K(E)$ ограничен, и следовательно поглощается некоторой окрестностью нуля из τ_E, то топология, порожденная $\|\cdot\|_C$, сильнее, чем исходная индуцированная топология $\tau_E\big|_{E_C}$. Следовательно, по теореме о полных топологиях ([8], гл.I, теорема 1.6), пространство $(E_C, \|\cdot\|_C)$ является полным нормированным, т.е. банаховым. $\square$

Лемма 2. *Система банаховых пространств* $\{(E_C, \|\cdot\|_C)\}_{C \in K(E)}$ *индуктивно упорядочена по непрерывному вложению (по возрастанию* C*).*

Доказательство. 1) Если $C_1 \subset C_2$, то E_{C_1} векторно вложено в E_{C_2}. При этом из $C_1 \subset C_2$ следует $\|\cdot\|_{C_1} \geq \|\cdot\|_{C_2}$, т.е. выполнено непрерывное вложение $E_{C_1} \overset{c}{\hookrightarrow} E_{C_2}$.

2) Если $C_1, C_2 \in K(E)$, то $C_3 = conv(C_1 \cup C_2)$ является абсолютно выпуклым компактом, т.е. $C_3 \in K(E)$ ([8], гл.I, теорема 5.2). Тогда, согласно п. 1 доказательства, из $C_1 \subset C_3$, $C_2 \subset C_3$ следуют непрерывные вложения $E_{C_1} \overset{c}{\hookrightarrow} E_{C_3}$, $E_{C_2} \overset{c}{\hookrightarrow} E_{C_3}$. $\square$

Последний результат оправдывает следующее

Определение 1. Положим

$$E_K := \varinjlim_{C \in K(E)} (E_C, \|\cdot\|_C). \tag{1.1}$$

Замечание 1. Легко видеть, что в системе $\{(E_C, \|\cdot\|_C)\}_{C\in K(E)}$ (здесь и в дальнейшем) можно ввести и более общий порядок (поглощение)

$$(C_1 \preceq C_2) :\Leftrightarrow (C_1 \subset \lambda \cdot C_2 \text{ при некотором } \lambda > 0),$$

при этом индуктивный предел (1.1) не изменится. Ясно также, что носители пространств E_K и E совпадают.

Рассмотрим связь между топологиями пространств E_K и E.

Теорема 1. *Для любого ЛВП E имеет место непрерывное вложение*

$$E_K \overset{c}{\hookrightarrow} E. \tag{1.2}$$

Доказательство. Как отмечалось в доказательстве леммы 1, топология $\|\cdot\|_C$, порожденная C, сильнее индуцированной топологии $\tau_E\big|_{E_C}$:

$$\tau_E\big|_{E_C} \preceq \|\cdot\|_C.$$

Следовательно, имеет место непрерывное вложение

$$(E_C, \|\cdot\|_C) \overset{c}{\hookrightarrow} (E_C, \tau_E\big|_{E_C}).$$

В свою очередь, имеет место строгое (изоморфное) вложение

$$(E_C, \tau_E\big|_{E_C}) \overset{c}{\hookrightarrow} (E, \tau_E).$$

Отсюда

$$(E_C, \|\cdot\|_C) \overset{c}{\hookrightarrow} (E, \tau_E). \tag{1.3}$$

Переходя слева в (1.3) к индуктивному пределу по $C \in K(E)$, получаем (1.2). $\square$

Следствие 1. *Если E – отделимое ЛВП, то E_K также отделимо.*

Доказательство. Так как E отделимо по условию, и топология E_K, в силу (1.2), сильнее топологии τ_E, то E_K также отделимо. $\square$

Замечание 2. Ясно, что если E – бесконечномерное ЛВП, то для любого $C \in K(E)$ топология $\|\cdot\|_C$ строго сильнее индуцированной топологии $\tau_E\big|_{E_C}$ в E_C (т.к. E не является локально компактным ([8], гл.I, теорема 3.6)). Однако вопрос о сохранении строгого неравенства топологий E_K и E не так очевиден. Так, например, по известной теореме о борнологиях [9], топология проективного предела

$$\varprojlim_{B\in B(E)} (E_B, \|\cdot\|_B),$$

где $B(E)$ – система всех замкнутых ограниченных абсолютно выпуклых множеств в E, совпадает с исходной топологией τ_E.

Тем не менее, нетрудно привести пример строгого неравенства для упомянутых выше топологий. Пусть, например, E – любое рефлексивное банахово пространство, E_σ – пространство E со слабой топологией, C_1 – единичный шар в E. Тогда ([8], гл.IV, теорема 5.5) C_1 компактен в E_σ, причем C_1 поглощает все остальные компакты в E_σ (ввиду их ограниченности). Следовательно, $E_{\sigma,C_1} = E$, $\|\cdot\|_{C_1} = \|\cdot\|$ – исходная норма в E, и

$$E_{\sigma,K} = \varinjlim_{C\in K(E_\sigma)} (E_{\sigma,C}, \|\cdot\|_C) = \lim_{\varepsilon\to 0}(E_{\sigma,\varepsilon C_1}, \|\cdot\|_{\varepsilon C_1}) = (E_{\sigma,C_1}, \|\cdot\|_{C_1}) = (E, \|\cdot\|).$$

Таким образом, топология $E_{\sigma,K}$ совпадает с исходной топологией $(E,\|\cdot\|)$, и, следовательно, строго сильнее слабой топологии $\sigma(E,E^*)$ в E_σ.

Отметим, в заключение этого пункта, некоторые простые свойства пространств E_K.

Предложение 1. *Для любых ЛВП E_1 и E_2 верно:*

$$1)\ (E_1 \times E_2)_K = E_{1,K} \times E_{2,K}; \tag{1.4}$$

$$2)\ (E_1 \oplus E_2)_K = E_{1,K} \oplus E_{2,K}. \tag{1.5}$$

2. Пространство $(E_K;F)$. Непрерывное вложение $(E;F) \overset{c}{\hookrightarrow} (E_K;F)$

Далее E – вещественное ЛВП с обозначения из пункта 1, $F = (F,\|\cdot\|)$ – вещественное банахово пространство, $(E;F)$ – пространство непрерывных линейных операторов, действующих из E в F; аналогично определяются пространства $(E_C;F)$ и $(E_K;F)$. Поскольку, согласно определению 1, пространство E_K есть индуктивный предел пространств $(E_C,\|\cdot\|_C)$, то вначале рассмотрим свойства пространств $(E_C;F)$.

Лемма 3. *Для любого $C \in K(E)$ введем в $(E_C;F)$ обычную операторную норму*

$$\|A_C\|^C = \sup_{\|h\|_C\le 1} \|A_C h\|.$$

Тогда система банаховых пространств $\{((E_C;F),\|\cdot\|^C)\}_{C\in K(E)}$ проективно (по возрастанию C) упорядочена по непрерывным вложениям.

Доказательство. 1) Если $C_1 \subset C_2$, то $E_{C_1} \overset{c}{\hookrightarrow} E_{C_2}$ по лемме 2. Отсюда, при вложении $A_{C_2} \mapsto A_{C_1} = A_{C_2}\big|_{E_{C_1}}$, учитывая, что $\|A_{C_1}\|^{C_1} \le \|A_{C_1}\|^{C_2} \le \|A_{C_2}\|^{C_2}$, имеем $(E_{C_2};F) \overset{c}{\hookrightarrow} (E_{C_1};F)$.

2) Для любых $C_1, C_2 \in K(E)$ и $C_3 = conv(C_1 \cup C_2)$ из непрерывных вложений $E_{C_1} \overset{c}{\hookrightarrow} E_{C_3}$ и $E_{C_2} \overset{c}{\hookrightarrow} E_{C_3}$ следуют, согласно п. 1 доказательства, вложения $(E_{C_3};F) \overset{c}{\hookrightarrow} (E_{C_1};F)$ и $(E_{C_3};F) \overset{c}{\hookrightarrow} (E_{C_2};F)$. $\square$

Это оправдывает следующее

Определение 2. Положим

$$(E_K;F) := \varprojlim_{C\in K(E)} ((E_C;F), \|\cdot\|^C). \tag{2.1}$$

Иначе говоря, $\{\|\cdot\|^C\}_{C\in K(E)}$ – определяющая система полунорм (в действительности – норм) в $(E_K;F)$.

Определение 3. Если $\{\|\cdot\|_i\}_{i\in I}$ – определяющая система полунорм в ЛВП E, то введем в $(E;F)$ хорошо известную ([10], 8.4.14) индуктивную топологию:

$$(E;F)_i = \{A \in (E;F) \,\big|\, \|A\|^i = \sup_{\|h\|_i\le 1} \|Ah\| < \infty\} \;\; (i\in I);$$

$$(E;F) = \varinjlim_{i\in I}((E;F)_i, \|\cdot\|^i). \tag{2.2}$$

Рассмотрим связь между топологиями пространств $(E_K;F)$ и $(E;F)$.

Теорема 2. *Для любого ЛВП E и банахова пространства F имеет место непрерывное вложение*

$$(E;F) \overset{c}{\hookrightarrow} (E_K;F). \tag{2.3}$$

Доказательство. Отметим сначала, что из непрерывного вложения (1.2) следует векторное вложение $(E;F) \overset{v}{\hookrightarrow} (E_K;F)$. Далее, так как каждый компакт $C\in K(E)$ поглощается любой окрестностью нуля в E, то $\|\cdot\|_C \ge M_i\cdot\|\cdot\|_i$ при любом $i\in I$, где $0 < M_i < \infty$. Следовательно, $\|\cdot\|^C \le \frac{1}{M_i}\cdot\|\cdot\|^i$ в $(E;F)_i$ для любого $i\in I$. Поэтому, при соответствии $A\mapsto A\big|_{E_C}$, имеет место непрерывное вложение:

$$((E;F)_i, \|\cdot\|^i) \overset{c}{\hookrightarrow} ((E_C;F)_i, \|\cdot\|^C), \quad (i\in I). \tag{2.4}$$

Поскольку выполняется тождественное непрерывное вложение

$$((E_C;F)_i, \|\cdot\|^C) \overset{c}{\hookrightarrow} ((E_C;F), \|\cdot\|^C),$$

то из (2.4) получаем (для любых $i\in I$, $C\in K(E)$):

$$((E;F)_i, \|\cdot\|^i) \overset{c}{\hookrightarrow} ((E_C;F), \|\cdot\|^C). \tag{2.5}$$

Переходя слева в (2.5), с учетом (2.2), к индуктивному пределу по $i\in I$, а справа, с учетом (2.1), – к проективному пределу по $C\in K(E)$, получаем вложение (2.3). □

Следствие 2. *Для любого ЛВП E справедливо вложение*

$$E^* \overset{c}{\hookrightarrow} E_K^*. \tag{2.6}$$

Замечание 3. Нетрудно показать, что вложение (2.6) (и, тем более, (2.3)) может быть неизоморфным. Рассмотрим снова, как и в примере из замечания 2, произвольное бесконечномерное рефлексивное банахово пространство E и возьмем в качестве исходного пространство E_σ (со слабой топологией $\sigma(E, E^*)$). Тогда, как было показано выше, $E_{\sigma,K} = (E, \|\cdot\|)$. Далее, в соответствии с определением 3 и определением слабой топологии,

$$(E_\sigma)^* = \varinjlim_{f\in E^*} (E_\sigma)^*_f = \varinjlim_{f\in E^*} \{g \in E^* \mid \sup_{\|f(x)\|\le 1} |g(x)| < \infty\} = \varinjlim_{f\in E^*} (span\,\{f\}).$$

Последний предел одномерных (а значит, и всех конечномерных) подпространств E^*, приводит, как известно ([10], 1.10.1), к сильнейшей локально выпуклой топологии t_∞ в E^*. Таким образом, $(E_\sigma)^* = (E^*, t_\infty)$ и, следовательно, вложение

$$(E_\sigma)^* = (E^*, t_\infty) \hookrightarrow (E^*, \|\cdot\|) = (E_{\sigma,K})^*$$

не является изоморфным, так как равномерная топология в E^* строго слабее топологии t_∞.

3. Пространства $(E^1_K, E^2_K; F)$ и $(E^1_K; (E^2_K; F))$. Непрерывное вложение $(E^1_K, E^2_K; F) \overset{c}{\hookrightarrow} (E^1, E^2; F)$. Основной канонический изоморфизм

Далее E^1, E^2 – вещественные ЛВП , $C_i \in K(E^i)$ $(i = 1, 2)$, $F = (F, \|\cdot\|)$ – вещественное банахово пространство. Рассмотрим вначале, по аналогии с пунктом 2, свойства пространств $(E^1_{C_1}, E^2_{C_2}; F)$.

Лемма 4. *Для любых $C_1 \in K(E^1)$, $C_2 \in K(E^2)$ введем в $(E^1_{C_1}, E^2_{C_2}; F)$ обычную норму билинейных операторов*

$$\|B_{C_1C_2}\|^{C_1C_2} = \sup_{\substack{\|h_1\|_{C_1}\le 1\\ \|h_2\|_{C_2}\le 1}} \|B_{C_1C_2}(h_1, h_2)\|.$$

Тогда система банаховых пространств $\{((E^1_{C_1}, E^2_{C_2}; F), \|\cdot\|^{C_1C_2})\}_{C_1\in K(E^1), C_2\in K(E^2)}$ проективно (по возрастанию C_1 и C_2) упорядочена по непрерывным вложениям.

Доказательство. 1) Если $C_1 \subset C_1', C_2 \subset C_2'$, то $E^1_{C_1} \times E^2_{C_2} \overset{c}{\hookrightarrow} E^1_{C_1'} \times E^2_{C_2'}$ по лемме 2. Отсюда, при вложении $B_{C_1'C_2'} \mapsto B_{C_1C_2} = B_{C_1'C_2'}\big|_{E^1_{C_1}\times E^2_{C_2}}$, имеем $(E^1_{C_1'}, E^2_{C_2'}; F) \overset{c}{\hookrightarrow} (E^1_{C_1}, E^2_{C_2}; F)$, поскольку $\|B_{C_1C_2}\|^{C_1C_2} \le \|B_{C_1C_2}\|^{C_1'C_2'} \le \|B_{C_1'C_2'}\|^{C_1'C_2'}$.

2) Для любых $C_1, C_1' \in K(E^1)$ и $C_2, C_2' \in K(E^2)$ положим $C_1'' = conv(C_1 \cup C_1')$, $C_2'' = conv(C_2 \cup C_2')$. Тогда из непрерывных вложений $E^1_{C_1} \times E^2_{C_2} \overset{c}{\hookrightarrow} E^1_{C_1''} \times E^2_{C_2''}$ и $E^1_{C_1'} \times E^2_{C_2'} \overset{c}{\hookrightarrow} E^1_{C_1''} \times E^2_{C_2''}$ следуют, согласно пункту 1 доказательства, вложения $(E^1_{C_1''}, E^2_{C_2''}; F) \overset{c}{\hookrightarrow} (E^1_{C_1}, E^2_{C_2}; F)$ и $(E^1_{C_1''}, E^2_{C_2''}; F) \overset{c}{\hookrightarrow} (E^1_{C_1'}, E^2_{C_2'}; F)$. □

Это оправдывает следующее

Определение 4. Положим

$$(E^1_K, E^2_K; F) := \varprojlim_{C_1\in K(E^1), C_2\in K(E^2)} ((E^1_{C_1}, E^2_{C_2}; F), \|\cdot\|^{C_1C_2}). \tag{3.1}$$

Иначе говоря, $\{\|\cdot\|^{C_1C_2}\}_{C_1\in K(E^1), C_2\in K(E^2)}$ – определяющая система норм в $(E^1_K, E^2_K; F)$.

Замечание 4. По аналогии с замечанием 1 отметим, что вводя в системе $\{((E^1_{C_1}, E^2_{C_2}; F), \|\cdot\|^{C_1C_2})\}_{C_1\in K(E^1), C_2\in K(E^2)}$ более общий порядок (поглощение)

$$((C_1, C_2) \preceq (C_1', C_2')) :\Leftrightarrow (C_1 \subset \lambda_1 \cdot C_1',\ C_2 \subset \lambda_2 \cdot C_2' \text{ при некоторых } \lambda_1, \lambda_2 > 0)$$

мы не изменим предел (3.1).

Определение 5. Пусть $\{\|\cdot\|_{i_k}\}_{i_k\in I_k}$ – определяющие системы полунорм в ЛВП E^k $(k=1,2)$. Рассмотрим в $(E^1, E^2; F)$ аналог индуктивной топологии в $(E; F)$ (см. определение 3):

$$(E^1, E^2; F)_{i_1i_2} = \{B \in (E^1, E^2; F) \mid \|B\|^{i_1i_2} = \sup_{\substack{\|h_1\|_{i_1}\le 1\\ \|h_2\|_{i_2}\le 1}} \|B(h_1, h_2)\| < \infty\};$$

$$(E^1, E^2; F) = \varinjlim_{i_1\in I_1, i_2\in I_2} ((E^1, E^2; F)_{i_1i_2}, \|\cdot\|^{i_1i_2}). \tag{3.2}$$

Рассмотрим связь между топологиями пространств $(E^1_K, E^2_K; F)$ и $(E^1, E^2; F)$.

Теорема 3. *Для любых ЛВП E^1, E^2 и банахового пространства F имеет место непрерывное вложение*

$$(E^1, E^2; F) \overset{c}{\hookrightarrow} (E^1_K, E^2_K; F). \tag{3.3}$$

Следствие 3. *Для любых ЛВП E^1 и E^2 имеет место непрерывное вложение*

$$(E^1, E^2)^* \overset{c}{\hookrightarrow} (E^1_K, E^2_K)^*. \tag{3.4}$$

Заметим, что, используя пример неизоморфного вложения $E^* \overset{c}{\hookrightarrow} E^*_K$, рассмотренный в замечании 3, нетрудно построить пример неизоморфного вложения в (3.4).

Отметим далее, что так как мы ограничиваемся здесь лишь банаховыми пространствами значений операторов, то мы не будем рассматривать вопрос о топологии пространства $(E^1; (E^2; F))$. Однако вопрос о топологии пространства $(E^1_K; (E^2_K; F))$ значительно проще, поскольку топология E^1_K – индуктивная.

Заметим сначала, что по аналогии с леммами 3 и 4, нетрудно проверить следующее утверждение.

Лемма 5. *Для любых* $C_1 \in K(E^1)$, $C_2 \in K(E^2)$ *введем в* $(E^1_{C_1}; (E^2_{C_2}; F))$ *обычную операторную норму* $\|\mathfrak{A}\|^{C_2}_{C_1} = \sup\limits_{\|h_1\|_{C_1} \le 1} \|\mathfrak{A}^{C_2}_{C_1}(h_1)\|^{C_2}$. *Тогда система банаховых пространств* $\{((E^1_{C_1}; (E^2_{C_2}; F)), \|\cdot\|^{C_2}_{C_1})\}_{C_1 \in K(E^1), C_2 \in K(E^2)}$ *проективно (по возрастанию* C_1 *и* C_2*) упорядочена по непрерывным вложениям.*

Это оправдывает следующее

Определение 6. Положим

$$(E^1_K; (E^2_K; F)) := \varprojlim_{C_1 \in K(E^1), C_2 \in K(E^2)} ((E^1_{C_1}; (E^2_{C_2}; F)), \|\cdot\|^{C_2}_{C_1}). \tag{3.5}$$

Иначе говоря, $\{\|\cdot\|^{C_2}_{C_1}\}_{C_1 \in K(E^1), C_2 \in K(E^2)}$ – определяющая система норм в $(E^1_K; (E^2_K; F))$.

Покажем теперь, что хорошо известный в случае банаховых пространств ([11], 1.9) канонический изоморфизм пространств линейных и билинейных операторов переносится на случай пространств типа E_K.

Теорема 4. *Для любых ЛВП* E^1, E^2 *и банахового пространства* F *имеет место топологический изоморфизм:*

$$(E^1_K; (E^2_K; F)) \overset{c}{\cong} (E^1_K, E^2_K; F). \tag{3.6}$$

Доказательство. Напомним, что, согласно определению 4, пространство $(E^1_K, E^2_K; F)$ есть проективный предел банаховых пространств $(E^1_{C_1}, E^2_{C_2}; F)$ с нормами $\|\cdot\|^{C_1 C_2}$. Далее, для любых фиксированных $C_1 \in K(E^1)$, $C_2 \in K(E^2)$ используем упомянутый выше ([11], 1.9) канонический изометрический изоморфизм

$$(E^1_{C_1}; (E^2_{C_2}; F)) \overset{c}{\cong} (E^1_{C_1}, E^2_{C_2}; F). \tag{3.7}$$

Переходя теперь в обеих частях (3.7) к проективному пределу по $C_1 \in K(E^1)$, $C_2 \in K(E^2)$ и используя равенства (3.1) и (3.5), мы придем к изоморфизму (3.6). □

Следствие 4. *Для любых ЛВП* E^1, E^2 *имеет место изоморфизм:*

$$(E^1_K; (E^2_K)^*) \overset{c}{\cong} (E^1_K, E^2_K)^*.$$

Отметим, что аналогичным образом, используя равенства (1.4) и (1.5), можно проверить изоморфизмы соответствующих операторных и функциональных пространств (см. также [12]).

Теорема 5. *Для любых ЛВП* E, E^1, E^2 *и банаховых пространств* F, F^1, F^2 *имеют место топологические изоморфизмы:*

$$((E^1 \oplus E^2)_K; F) \overset{c}{\cong} (E^1_K; F) \times (E^2_K; F). \tag{3.8}$$

$$(E_K; F^1 \times F^2) \overset{c}{\cong} (E_K; F^1) \times (E_K; F^2). \tag{3.9}$$

Следствие 5. *Для любых ЛВП E^1 и E^2 верно:*

$$(E^1 \oplus E^2)^*_K \overset{c}{\cong} (E^1_K)^* \times (E^2_K)^*; \quad (E_K; \mathbb{R}^2) \overset{c}{\cong} (E^*_K)^2.$$

4. Приложения к свойствам K-производных

Далее E, E^1, E^2 – вещественные ЛВП , $C_i \in K(E^i)$ $(i = 1, 2)$, $C \in K(E)$; F, F^1, F^2 – вещественные банаховы пространства.

Теорема 6. *Если отображение $f : E^1 \times E^2 \to F$ K-дифференцируемо в точке (x_1, x_2), то существуют K-производные $(\partial_1 f)_K(x_1, x_2)$ и $(\partial_2 f)_K(x_1, x_2)$, причем*

$$f'_K(x_1, x_2) \cdot (h_1, h_2) = (\partial_1 f)_K(x_1, x_2) \cdot h_1 + (\partial_2 f)_K(x_1, x_2) \cdot h_2.$$

При этом f'_K непрерывна на некотором $U \subset E^1 \times E^2$ тогда и только тогда, когда $(\partial_1 f)_K$ и $(\partial_2 f)_K$ непрерывны на U.

Доказательство. В силу канонического изоморфизма (3.8), $A =: f'_K(x_1, x_2) = A_1 \oplus A_2$, где $A_i \in (E^i_K; F)$ $(i = 1, 2)$. При этом для любых $C_i \in K(E^i)$ имеем

$$A_{C_1}\big|_{E_{C_1}} h_1 + A_{C_2}\big|_{E_{C_2}} h_2 = A\big|_{E_{C_1} \times E_{C_2}} (h_1, h_2),$$

откуда $A_{C_1}\big|_{E_{C_1}} = (\partial_1 f)_{C_1}(x_1, x_2)$, $A_{C_2}\big|_{E_{C_2}} = (\partial_2 f)_{C_2}(x_1, x_2)$, т.е. $A_i = (\partial_i f)_K(x_1, x_2)$ $(i = 1, 2)$. Поскольку изоморфизм (3.8) является топологическим, то непрерывность отображения $A : U \ni (x_1, x_2) \mapsto A(x_1, x_2)$ соответствует непрерывности каждого из отображений $A_i : (x_1, x_2) \mapsto A_i(x_1, x_2)$ $(i = 1, 2)$. □

Сформулируем ряд свойств K-производных, проверяемых на основе изоморфизма (3.6).

Теорема 7. *Отображение $f = (f_1, f_2) : E \to F^1 \times F^2$ K-дифференцируемо в точке x тогда и только тогда, когда отображения $f_i : E \to F^i$ $(i = 1, 2)$ K-дифференцируемы в точке x, причем*

$$f'_K(x)h = (f'_{1K}(x)h, f'_{2K}(x)h).$$

При этом f'_K непрерывна на некотором $U \subset E$ тогда и только тогда, когда f'_{1K} и f'_{2K} непрерывны на U.

Теорема 8. *Если отображение $f : E_K \to F$ дважды K-дифференцируемо в точке (x_1, x_2), то $f''_K(x_1, x_2)$ можно рассматривать как K-непрерывный билинейный оператор*

$$(f''_K(x_1, x_2)h_1)h_2 = \widetilde{f}''_K(x_1, x_2) \cdot (h_1, h_2)$$

с сохранением соответствующих норм.

При этом отображение $f''_K : U \to (E_K; (E_K; F))$ непрерывно на некотором $U \subset E$ тогда и только тогда, когда отображение $\widetilde{f}''_K : U \to (E_K, E_K; F)$ непрерывно на U.

Список цитируемых источников

1. *Скрыпник И.В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. — К.: Наукова думка, 1973. — 219с.
2. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — К.: Наукова думка, 1999. — 630с.
3. *Ricceri B.* Integral functionals on Sobolev spaces having multiple local minima // arXiv:math.OC/0402445 v1 26 Feb 2004.
4. *Hencl S., Kolář J., Pangrác O.* Integral functionals that are continuous with respect to the weak topology on $W_0^{1,p}(0;1)$ // North-Holland Math. Studies. — Functional Analysis and its Application. — Amsterdam-Boston-...: Elsevier. — 2005. — to appear.
5. *Орлов И.В.* Нормальная дифференцируемость и экстремумы функционалов в локально выпуклом пространстве // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — №4. — С.24-35.
6. *Orlov I.V.* Extreme problems and Scales of the Operator Spaces // North-Holland Math. Studies. Vol.197. — Functional Analysis and its Application. — Amsterdam-Boston-…: Elsevier. — 2004. — P.209-228.
7. *Орлов И.В.* K-дифференцируемость и K-экстремумы // Український математичний вісник. — 2006. — Т.3. — №1. — С.97-115.
8. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 360с.
9. *Houzel C.* Séminaire Banach // Lecture Notes in Math. — Berlin: Springer, 1972. — Vol. 227. — 240p.
10. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969. — 1072с.
11. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971. — 392с.
12. *Орлов И.В.* Нормальные индексы и шкалы операторных пространств // Український математичний конгрес – 2001. Функціональній аналіз. Праці. — К.: Ін-т математики НАНУ, 2002. — С.193-208.

Получено 21.10.2006