Динамические системы, том 3(31), No. 1-2, 151–158

УДК 517.9

Периодическая задача для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса[1]

С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко, П. В. Кулиш
Донбасский государственный педагогический университет,
Славянск 84116. *E-mail: chujko-slav@inbox.ru*

Аннотация. Найдены необходимые и достаточные условия существования решений нелинейной неавтономной периодической задачи для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса. Характерной особенностью поставленной задачи является необходимость нахождения, как искомого решения, так и соответствующей собственной функции, обеспечивающей разрешимость периодической задачи для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса. Для построения решений периодической задачи для уравнения типа Хилла и соответствующей собственной функции в случае параметрического резонанса предложена итерационная схема, построенная по методу простых итераций.

Ключевые слова: периодическая краевая задача, параметрический резонанс, уравнение типа Хилла, метод простых итераций.

1. Постановка задачи

Актуальность изучения периодических краевых задач в случае параметрического резонанса связана с многочисленными приложениями в электронике [6], геодезии [4] и станкостроении [3]. Традиционное изучение краевых задач в случае параметрического резонанса было связано с исследованием прежде всего вопросов устойчивости [13, 15]. Как правило, при изучении краевых задач в случае параметрического резонанса дифференциальное уравнение предполагалось фиксированным. Таким образом, основным отличием данной статьи является изучение вопросов разрешимости периодических краевых задач в случае параметрического резонанса в зависимости от собственной функции дифференциального уравнения. Нами исследована задача о нахождения 2π-периодического решения [16]

$$y(t,\varepsilon): y(\cdot,\varepsilon) \in C^2[0,2\pi],\ y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\ \mu(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$$

уравнения типа Хилла [2, 14]

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = f(t) + \varepsilon Y(y,\mu,t,\varepsilon), \tag{1}$$

Решение 2π-периодической задачи для уравнения (1) ищем в малой окрестности нетривиального периодического решения $y_0(t) \in C^2[0,2\pi]$ порождающего уравнения

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + y_0 = f(t). \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0112U000372.

Здесь $Y(y, \mu, t, \varepsilon)$ нелинейная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по первому и второму аргументу в малой окрестности решения порождающего решения и точки $\mu_0 := \mu(0)$, а также непрерывная по $t \in [0, 2\pi]$ и по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Согласно традиционной классификации периодических краевых задач поставленная задача для уравнения (1) является критической [1, 5, 16]. Для произвольной функции $f(t) \in C[0, 2\pi]$ периодическая задача для уравнения (2) разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{bmatrix} f(s)\, ds = 0; \tag{3}$$

в этом случае при соответствующей фиксации начала отсчета независимой переменной общее решение 2π-периодической задачи для уравнения (2) имеет вид

$$y_0(t, c_0) = c_0 \cdot \cos t + g[f(s)](t), \ c_0 \in \mathbb{R}^1.$$

Здесь

$$g[f(s)](t) = \int_0^t \sin(t - s) f(s)\, ds$$

оператор Грина 2π-периодической задачи для уравнения (2).

2. Необходимое условие существования решения

Предположим периодическую задачу для уравнения (2) разрешимой; при этом условие разрешимости 2π-периодической задачи для уравнения (1)

$$\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{bmatrix} Y(y(s, \varepsilon), \mu(\varepsilon), s, \varepsilon)\, ds = 0 \tag{4}$$

приводит к уравнению для порождающих амплитуд 2π-периодической задачи для уравнения типа Хилла

$$F(c_0, \mu_0) := \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{bmatrix} Y(y_0(s, c_0), \mu_0, s, 0)\, ds = 0. \tag{5}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение, которое является обобщением соответствующих утверждений [9, 11, 12].

Лемма. *Если выполнено условие* (3) *и* 2π*-периодическая задача для уравнения типа Хилла* (1) *имеет решение*

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in C^2[0, 2\pi], \ y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \ \mu(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0],$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее*

$$y_0(t, c_0) = c_0 \cdot \cos t + g[f(s)](t), \ \mu(0) = \mu_0 \in \mathbb{R}^1,$$

то вектор

$$\check{c}_0 := \mathrm{col}\ (c_0, \ \mu_0) \in \mathbb{R}^2$$

удовлетворяет уравнению для порождающих амплитуд 2π*-периодической задачи для уравнения типа Хилла* (5).

3. Достаточное условие существования решения

Фиксируя одно из решений $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^2$ уравнения (5), приходим к задаче об отыскании 2π-периодического решения уравнения типа Хилла (1)

$$y(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0) + x(t,\varepsilon)$$

в окрестности порождающего решения $y_0(\tau,c_0)$, а также собственной функции

$$\mu(\varepsilon) := \mu_0 + \zeta(\varepsilon)$$

в малой окрестности точки μ_0. Возмущение порождающего решения

$$x(t,\varepsilon): \ x(\cdot,\varepsilon) \in C^2[0,2\pi], \ x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

а также функцию $\zeta(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$ определяет 2π-периодическая задача для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon Y(y_0(t,c_0) + x(t,\varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon). \tag{6}$$

В малой окрестности порождающего решения $y_0(t,c_0)$ и точки μ_0 имеет место следующее разложение

$$Y(y_0(t,c_0) + x(t,\varepsilon), \mu_0 + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon) = Y(y_0(t,c_0), \mu_0, t, 0) + \mathcal{A}_1(y_0(t,c_0),\mu_0)x(t,\varepsilon) +$$
$$+ \mathcal{A}_2(y_0(t,c_0),\mu_0)\zeta(\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{A}_3(y_0(t,c_0),\mu_0) + \mathcal{R}(y_0(t,c_0) + x(t,\varepsilon), \mu_0 + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1(y_0(t,c_0),\mu_0) = \left.\frac{\partial Y(y,\mu,t,\varepsilon)}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_0(t,c_0)\\ \mu=\mu_0\\ \varepsilon=0}}, \quad \mathcal{A}_2(y_0(t,c_0),\mu_0) = \left.\frac{\partial Y(y,\mu,t,\varepsilon)}{\partial \mu}\right|_{\substack{y=y_0(t,c_0)\\ \mu=\mu_0\\ \varepsilon=0}},$$

$$\mathcal{A}_3(y_0(t,c_0),\mu_0) = \left.\frac{\partial Y(y,\mu,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{y=y_0(t,c_0)\\ \mu=\mu_0\\ \varepsilon=0}}.$$

Решение 2π-периодической задачи для уравнения (6) при соответствующей фиксации начала отсчета независимой переменной представимо в виде

$$x(t,\varepsilon) = \nu(\varepsilon)\cdot\cos t + x^{(1)}(t,\varepsilon), \ \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1,$$

где

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\cdot g[Y(y_0(s,c_0) + x(s,\varepsilon), \mu_0 + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon)](t).$$

Обозначим (2×2)-мерную матрицу

$$D_0 = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{bmatrix} [\mathcal{A}_1(y_0(s,c_0),\mu_0)\cos s; \ \mathcal{A}_2(y_0(s,c_0),\mu_0)] \ ds.$$

Условие разрешимости (4) приводит к уравнению

$$D_0 \cdot \begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} = -\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{bmatrix} [\mathcal{A}_1(y_0(s,c_0),\mu_0)x^{(1)}(s,\varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon\mathcal{A}_3(y_0(s,c_0),\mu_0) + \mathcal{R}(y_0(s,c_0) + x(s,\varepsilon), \mu_0 + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon)] \ ds.$$

Таким образом, при условии $\det D_0 \neq 0$ единственное решение 2π-периодической задачи для уравнения (6) определяет операторная система

$$\begin{gathered} x(t,\varepsilon) = \nu(\varepsilon)\cdot\cos t + x^{(1)}(t,\varepsilon), \\ x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\cdot g[Y(y_0(s,c_0)+x(s,\varepsilon),\mu(\varepsilon),s,\varepsilon)](t), \\ \left[\begin{array}{c} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{array}\right] = -D_0^+\cdot\int_0^{2\pi}\left[\begin{array}{c} \cos s \\ -\sin s \end{array}\right][\mathcal{A}_1(y_0(s,c_0),\mu_0)x^{(1)}(s,\varepsilon)+ \\ +\,\varepsilon\mathcal{A}_3(y_0(s,c_0),\mu_0)+\mathcal{R}(y_0(s,c_0)+x(s,\varepsilon),\mu_0+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)]\,ds. \quad (7) \end{gathered}$$

Для построения решения операторной системы (7) в случае простоты ($\det D_0 \neq 0$) корней уравнения для порождающих амплитуд (5) применим метод простых итераций [1, 16]. Таким образом, доказано следующее утверждение, которое является обобщением соответствующих утверждений [9, 11, 12].

Теорема. *Для любого простого* ($\det D_0 \neq 0$) *корня* $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^2$ *уравнения* (5) *периодическая задача для уравнения* (1) *имеет единственное решение*

$$y(t,\varepsilon): y(\cdot,\varepsilon)\in C^2[0,2\pi],\ y(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0],\ \mu(\varepsilon)\in C[0,\varepsilon_0],\ \mu(0)=\mu_0,$$

определенное операторной системой (7), *и при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $y_0(t,c_0)$. *Для нахождения этого решения* $y(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0)+x(t,\varepsilon)$, *а также собственной функции* $\mu(\varepsilon) = \mu_0 + \zeta(\varepsilon)$ *применима итерационная схема*

$$\begin{gathered} x_{k+1}(t,\varepsilon) = \nu_{k+1}(\varepsilon)\cdot\cos t + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \\ x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = x_1^{(1)}(t,\varepsilon)+x_{k+1}^{(2)}(t,\varepsilon),\ x_1^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\cdot g[Y(y_0(s,c_0),\mu_0,s,0)](t), \\ x_{k+1}^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\cdot g[\mathcal{A}_1(y_0(s,c_0),\mu_0)\nu_k(\varepsilon)+ \\ +\,\varepsilon\mathcal{A}_3(y_0(s,c_0),\mu_0)+\mathcal{R}(y_0(s,c_0)+x_1^{(k)}(s,\varepsilon),\mu_0+\zeta_k(\varepsilon),s,\varepsilon)](t); \\ \left[\begin{array}{c} \nu_{k+1}(\varepsilon) \\ \zeta_{k+1}(\varepsilon) \end{array}\right] = -D_0^+\int_0^{2\pi}\left[\begin{array}{c} \cos s \\ -\sin s \end{array}\right][\mathcal{A}_1(y_0(s,c_0),\mu_0)x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_3(y_0(s,c_0),\mu_0)+ \\ +\,\mathcal{R}(y_0(s,c_0)+x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon),\mu_0+\zeta_k(\varepsilon),s,\varepsilon)]\,ds,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \dots\,. \quad (8) \end{gathered}$$

Длина отрезка $[0,\varepsilon_*]$, на котором применима итерационная схема (8), может быть оценена, как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [1, 16], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого системой (7) аналогично [7, 17].

Пример. Условия доказанной теоремы выполняются в случае 2π-периодической задачи для уравнения

$$y'' + y = \sin 3t + \varepsilon\left(\frac{1-\sqrt{\varepsilon+\cos\varepsilon}}{\varepsilon}+\mu(\varepsilon)\right)y + \varepsilon y^3. \quad (9)$$

Поскольку выполнено условие (3), постольку порождающая 2π-периодическая задача для уравнения (9) разрешима, и при соответствующей фиксации начала отсчета независимой переменной имеет общее вида

$$y_0(t,c_0) = c_0\cdot\cos t - \frac{1}{8}(2\sin t + \sin 3t),\ c_0\in\mathbb{R}^1.$$

Действительно, положив

$$y_0(t, c_{oa}, c_{ob}) = c_{oa} \cdot \sin t + c_{ob} \cdot \cos t - \frac{1}{8}(2 \sin t + \sin 3t), \ c_{oa}, c_{ob} \in \mathbb{R}^1,$$

находим корни уравнения для порождающих амплитуд

$$+c_{ob} = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1 - 8c_{oa} + 16 + c_{oa}^2}, \ \mu_0 = \frac{1}{128}(31 + 216 \ c_{oa} - 384 \ c_{oa}^2),$$

зависящие от произвольной константы $c_{oa} \in \mathbb{R}^1$. При $c_{oa} = 0$ уравнение для порождающих амплитуд (5) приводится к виду

$$F(c_0, \mu_0) := \frac{\pi}{256}\left[\begin{array}{c} 2c_0(96 \ c_0^2 + 128 \ \mu_0 - 49) \\ 72 \ c_0^2 + 64 \ \mu_0 - 29 \end{array}\right] = 0,$$

при этом корню

$$c_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \ \mu_0 = \frac{31}{128}$$

соответствует невырожденная матрица

$$D_0 = \pi \begin{pmatrix} \frac{9}{32} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{9\sqrt{3}}{64} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

функция

$$Y(y_0(t, c_0), \mu_0, t, 0) = (\mu_0 - \frac{1}{2})y_0(t, c_0) + y_0^3(t, c_0)$$

и производные

$$\mathcal{A}_1(y_0(t, c_0), \mu_0) = \mu_0 - \frac{1}{2} + 3y_0^2(t, c_0),$$

$$\mathcal{A}_2(y_0(t, c_0), \mu_0) = y_0(t, c_0), \ \mathcal{A}_3(y_0(t, c_0), \mu_0) = 0.$$

Таким образом, согласно доказанной теореме периодическая задача для уравнения (9) имеет единственное решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $y_0(t, c_0)$, для нахождения которого котором применима итерационная схема (8). Первое приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения (9)

$$x_1(t, \varepsilon) = \nu_1(\varepsilon) \cdot \cos t + x_1^{(1)}(t, \varepsilon),$$

определяет функция

$$\nu_1(\varepsilon) = -\frac{21\ 409\ 295\ \varepsilon^2}{216\ 318\ 619} + \frac{49\ 165\ 127\ \varepsilon^3}{1\ 016\ 025\ 026} - \frac{24\ 929\ 285\ \varepsilon^4}{672\ 845\ 779} + \frac{23\ 241\ 645\ \varepsilon^5}{633\ 051\ 089} -$$
$$- \frac{82\ 037\ 300\ \varepsilon^6}{2\ 218\ 571\ 043} + \frac{26\ 658\ 735\ \varepsilon^7}{680\ 011\ 168} - \frac{9\ 380\ 769\ \varepsilon^8}{218\ 146\ 084};$$

здесь

$$x_1^{(1)}(t, \varepsilon) := \varepsilon \cdot g[Y(y_0(s, c_0), \mu_0, s, 0)](t) =$$
$$= \frac{\varepsilon}{163\ 840}(-110\sqrt{3}\cos t + 100\sqrt{3}\cos 5t + 10\sqrt{3}\cos 7t - 3\ 331 \sin t + .$$
$$+ 970 \sin 3t + 100 \sin 5t - 10 \sin 7t - \sin 9t).$$

Первое приближение к собственной функции согласно итерационной схеме (8)

$$\mu_1(\varepsilon) := \mu_0 + \zeta_1(\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned}\zeta_1(\varepsilon) = &-\frac{168\ 884\ 986\ 026\ 391\ \varepsilon}{450\ 359\ 962\ 737\ 043} + \frac{104\ 756\ 068\ \varepsilon^2}{414\ 683\ 279} - \frac{29\ 158\ 534\ \varepsilon^3}{166\ 465\ 533} + \\ &+ \frac{18\ 293\ 293\ 423\ \varepsilon^4}{109\ 951\ 020\ 553} - \frac{3\ 534\ 661\ 174\ \varepsilon^5}{21\ 143\ 549\ 593} + \frac{31\ 349\ 321\ \varepsilon^6}{178\ 168\ 562} - \\ &- \frac{38\ 870\ 963\ \varepsilon^7}{202\ 339\ 609} + \frac{1\ 672\ 097\ \varepsilon^8}{7\ 760\ 651}.\end{aligned}$$

Второе приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения (9)

$$x_2(t,\varepsilon) \approx x_2^{(1)}(t,\varepsilon) := x_1^{(1)}(t,\varepsilon) + x_2^{(2)}(t,\varepsilon),$$

определяет функция

$$\begin{aligned}x_2^{(2)}(t,\varepsilon) := \varepsilon \cdot g[&\mathcal{A}_1(y_0(s,c_0),\mu_0)\nu_1(\varepsilon) + \\ &+ \varepsilon\mathcal{A}_3(y_0(s,c_0),\mu_0) + \mathcal{R}(y_0(s,c_0) + x_1^{(1)}(s,\varepsilon), \mu_0 + \zeta_1(\varepsilon), s, \varepsilon)](t);\end{aligned}$$

таким образом

$$\begin{aligned}x_2^{(1)}(t,\varepsilon) = &-\frac{1\ 014\ 413\ \varepsilon^2}{12\ 765\ 187\ 498}\cos t - \frac{4\ 400\ 281\ \varepsilon^3}{4\ 938\ 933\ 902}\cos t + \frac{1\ 956\ 450\ \varepsilon^4}{4\ 566\ 462\ 193}\cos t - \\ &- \frac{2\ 060\ 658\ \varepsilon^5}{6\ 281\ 337\ 143}\cos t + \frac{964\ 095\ \varepsilon^6}{2\ 965\ 734\ 044}\cos t - \frac{1\ 169\ 504\ \varepsilon^7}{3\ 571\ 940\ 109}\cos t + \\ &+ \frac{1\ 093\ 848\ \varepsilon^8}{3\ 151\ 185\ 431}\cos t + \frac{1\ 469\ 522\ \varepsilon^3}{1\ 248\ 481\ 597}\cos 3t - \frac{8\ 067\ 663\ \varepsilon^4}{14\ 227\ 407\ 965}\cos 3t + \\ &+ \frac{1\ 380\ 803\ \varepsilon^5}{3\ 180\ 212\ 514}\cos 3t - \frac{1\ 680\ 034\ \varepsilon^6}{3\ 904\ 888\ 867}\cos 3t + \frac{1\ 657\ 063\ \varepsilon^7}{3\ 824\ 016\ 104}\cos 3t - \\ &- \frac{1\ 758\ 987\ \varepsilon^8}{3\ 828\ 757\ 390}\cos 3t + \frac{770\ 991\ \varepsilon^2}{8\ 840\ 572\ 225}\cos 5t - \frac{6\ 571\ 544\ \varepsilon^3}{25\ 134\ 925\ 997}\cos 5t + \\ &+ \frac{559\ 311\ \varepsilon^4}{4\ 425\ 705\ 475}\cos 5t - \frac{1\ 039\ 568\ \varepsilon^5}{10\ 743\ 292\ 877}\cos 5t + \frac{1\ 055\ 857\ \varepsilon^6}{11\ 011\ 736\ 320}\cos 5t - \\ &- \frac{807\ 787\ \varepsilon^7}{8\ 364\ 454\ 913}\cos 5t + \frac{575\ 238\ \varepsilon^8}{5\ 618\ 273\ 519}\cos 5t - \frac{166\ 657\ \varepsilon^2}{20\ 958\ 062\ 029}\cos 7t - \\ &- \frac{228\ 367\ \varepsilon^3}{9\ 241\ 934\ 690}\cos 7t + \frac{399\ 114\ \varepsilon^4}{32\ 618\ 821\ 633}\cos 7t - \frac{1\ 135\ 681\ \varepsilon^5}{121\ 320\ 646\ 695}\cos 7t + \\ &+ \frac{151\ 775\ \varepsilon^6}{16\ 362\ 316\ 359}\cos 7t - \frac{48\ 573\ \varepsilon^7}{5\ 199\ 116\ 585}\cos 7t + \frac{403\ 952\ \varepsilon^8}{40\ 782\ 976\ 333}\cos 7t + \\ &+ \frac{10\ 564\ \varepsilon^3}{156\ 159\ 472\ 669}\cos 9t - \frac{31\ 271\ \varepsilon^4}{19\ 756\ 127\ 724\ 292}\cos 9t + \frac{17\ 464\ \varepsilon^2}{88\ 105\ 244\ 873}\cos 11t - \\ &- \frac{11\ 625\ \varepsilon^3}{782\ 277\ 062\ 033}\cos 11t + \frac{7\ 037\ \varepsilon^2}{681\ 627\ 054\ 334}\cos 13t - \frac{8\ 312\ \varepsilon^3}{3\ 776\ 934\ 432\ 405}\cos 13t - \\ &- \frac{2\ 088\ 061\ \varepsilon^2}{500\ 901\ 992}\sin t + \frac{5\ 680\ 913\ \varepsilon^3}{490\ 376\ 452}\sin t - \frac{4\ 034\ 353\ \varepsilon^4}{713\ 877\ 149}\sin t + \frac{4\ 434\ 955\varepsilon^5}{1\ 024\ 798\ 536}\sin t -\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{21\ 058\ 561\ \varepsilon^6}{4\ 910\ 708\ 522}\sin t+\frac{5\ 409\ 256\ \varepsilon^7}{1\ 252\ 400\ 079}\sin t-\frac{4\ 467\ 324\ \varepsilon^8}{975\ 590\ 423}\sin t+\\
&+\frac{8\ 839\ 168\ \varepsilon^2}{6\ 871\ 788\ 457}\sin 3t-\frac{4\ 752\ 563\ \varepsilon^3}{1\ 444\ 933\ 504}\sin 3t+\frac{4\ 181\ 578\ \varepsilon^4}{2\ 607\ 819\ 545}\sin 3t-\\
&-\frac{14\ 672\ 953\ \varepsilon^5}{11\ 948\ 323\ 149}\sin 3t+\frac{1\ 279\ 808\ \varepsilon^6}{1\ 051\ 720\ 747}\sin 3t-\frac{3\ 927\ 772\ \varepsilon^7}{3\ 204\ 733\ 907}\sin 3t+\\
&+\frac{5\ 713\ 839\ \varepsilon^8}{4\ 397\ 321\ 614}\sin 3t+\frac{1\ 093\ 881\ \varepsilon^2}{21\ 725\ 099\ 515}\sin 5t-\frac{1\ 237\ 181\ \varepsilon^3}{3\ 587\ 026\ 767}\sin 5t+\\
&+\frac{3\ 193\ 355\ \varepsilon^4}{18\ 946\ 424\ 452}\sin 5t-\frac{912\ 852\ \varepsilon^5}{7\ 077\ 406\ 825}\sin 5t+\frac{1\ 087\ 487\ \varepsilon^6}{8\ 508\ 716\ 434}\sin 5t-\\
&-\frac{812\ 527\ \varepsilon^7}{6\ 312\ 012\ 679}\sin 5t+\frac{1\ 077\ 593\ \varepsilon^8}{7\ 895\ 858\ 353}\sin 5t+\frac{3\ 081\ \varepsilon^2}{671\ 088\ 640}\sin 7t+\\
&+\frac{45\ 880\ \varepsilon^3}{41\ 691\ 791\ 491}\sin 7t-\frac{20\ 884\ \varepsilon^4}{85\ 937\ 445\ 791}\sin 7t+\frac{14\ 646\ 737\ \varepsilon^5}{80\ 421\ 208\ 476\ 281}\sin 7t-\\
&-\frac{14\ 513\ 597\ \varepsilon^6}{80\ 421\ 275\ 825\ 819}\sin 7t+\frac{6\ 587\ \varepsilon^7}{36\ 238\ 786\ 560}\sin 7t-\frac{13\ 967\ \varepsilon^8}{72\ 477\ 573\ 120}\sin 7t+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{4\ 011\ 877\ \varepsilon^2}{1\ 465\ 450\ 184\ 943}\sin 9t-\frac{19\ 999\ \varepsilon^3}{369\ 348\ 146\ 607}\sin 9t-\frac{34\ 589\ \varepsilon^4}{2\ 251\ 310\ 974\ 295}\sin 9t+\\
&+\frac{11\ \varepsilon^5}{1\ 006\ 632\ 960}\sin 9t-\frac{567\ 035\ \varepsilon^6}{52\ 366\ 616\ 557\ 211}\sin 9t+\frac{6\ 587\ \varepsilon^7}{603\ 979\ 776\ 000}\sin 9t-\\
&-\frac{8\ 235\ \varepsilon^8}{712\ 217\ 864\ 303}\sin 9t+\frac{3\ \varepsilon^2}{26\ 214\ 400}\sin 11t-\frac{7\ 891\ \varepsilon^3}{598\ 418\ 598\ 536}\sin 11t+\\
&+\frac{1\ 166\ \varepsilon^4}{4\ 217\ 292\ 291\ 967}\sin 11t-\frac{30\ 678\ 337\ \varepsilon^2}{5\ 146\ 970\ 863\ 697\ 919}\sin 13t+\\
&+\frac{5\ 107\ \varepsilon^3}{4\ 529\ 393\ 734\ 716}\sin 13t-\frac{3\ \varepsilon^2}{9\ 395\ 240\ 960}\sin 15t+\frac{740\ \varepsilon^3}{3\ 568\ 322\ 075\ 959}\sin 15t.
\end{aligned}
$$

Найденные приближения к 2π-периодическому решению уравнения (9) и его собственной функции $\mu(\varepsilon)$ характеризуют невязки

$$
\begin{aligned}
\Delta_k(\varepsilon)=||y_k''(t,\varepsilon)+y_k(t,\varepsilon)-\sin 3t\left(1-\sqrt{\varepsilon+\cos\varepsilon}\,\right)\cdot y_k(t,\varepsilon)-\\
-\varepsilon\mu_k(\varepsilon)\cdot y_k(t,\varepsilon)-\varepsilon\cdot y_k^3(t,\varepsilon)||_{C[0;2\pi]},\ k=0,\ 1,\ 2\ .
\end{aligned}
$$

В частности

$$
\begin{gathered}
\Delta_0(0,1)\approx 0,00\ 830\ 078,\ \Delta_1(0,1)\approx 0,0000\ 862\ 938,\ \Delta_2(0,1)\approx 0,0000\ 105\ 963,\\
\Delta_0(0,01)\approx 0,000\ 830\ 078,\ \Delta_1(0,01)\approx 1,16\ 547\times 10^{-6},\ \Delta_2(0,01)\approx 1,13\ 986\times 10^{-8}.
\end{gathered}
$$

Заметим, что, в отличие от соответствующего утверждения статьи [10], доказанная теорема не предполагает линейности относительно собственной функции $\mu(\varepsilon)$ нелинейности $Y(y,\mu,t,\varepsilon)$ уравнения типа Хилла (1).

Список цитируемых источников

1. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

2. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. — М.: Изд.-во иностр. лит., 1961. — 778 с.
3. *Копелев Ю.Ф.* Параметрические колебания станков. — Металлорежущие станки: респ меж-вед. науч. – техн. сб. — Киев, 1984. Вып. 12. — С. 3 — 8.
4. *Люлько Н.А.* Основной и комбинационный резонансы в нелинейной системе двух осциляторов. Новосибирск, 2012. — 33 с. (Препринт / РАН Сиб. отд-ние. Инст. математики; № 281).
5. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
6. *Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д.* О параметрическом возбуждении электрических колебаний. // Журн. техн. физики. — 1934. — № 3. — С. 5–29.
7. *Чуйко А.С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания.– 2005.— **8**, № 2.– С. 278–288.
8. *Чуйко С.М., Чуйко Ан.С.* Периодическая задача для уравнения типа Хилла // Вiсник Слов'янського державного педагогiчного унiверситету. Математика. — 2010. — № 4. — С. 141–181.
9. *Чуйко С.М., Кулиш П.В.* Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Труды Инст. прикладной математики и механики НАН Украины. — 2012. — № 24. — С. 243 — 252.
10. *Чуйко С.М., Кулиш П.В., Белущенко А.В.* Слабонелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Науковий вiсник Ужгородського унiверситету. Сер. матем. i iнформатика. — **24**. № 1. — 2013. С. 185 — 194.
11. *Чуйко С.М., Старкова О.В.* Двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье // Науковий вiсник Ужгородського унiверситету. Сер. матем. i iнформатика. — **22**. № 1. — 2011. С. 157 — 172.
12. *Чуйко С.М., Старкова О.В.* Модифицированная двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье // Комп. исследов. и моделирование, 2012, **4**, №1, С. 31 — 43.
13. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
14. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 720 с.
15. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. — М.: Наука, 1987. — 328 с.
16. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.
17. *Chuiko S.M.* Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary value problem // Nonlinear Oscillations.– 2006.— Issue 9, **3**.– P. 405 — 422.

Получена 16.04.2013