Динамические системы, вып. 28 (2010), 123–132

УДК 517.98

Критерий вполне приводимости непрерывных представлений групповых алгебр

В. И. Чилин, К. К. Муминов

Национальный университет Узбекистана,
Ташкент 100174, УЗБЕКИСТАН. *E-mail: chilin@ucd.uz, m.muminov@rambler.ru*

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о сохранении свойства вполне неприводимости непрерывных невырожденных представлений групповой алгебры в произвольных банаховых пространствах. Доказывается, что каждое несингулярное непрерывное представление групповой алгебры $L^1(G)$ в банаховом пространстве является вполне приводимым тогда и только тогда, когда G — компактная группа. Показывется, что свойство вполне неприводимости представления для таких алгебр эквивалентно существованию у собственного функционала для этого представления собственного элемента, на котором этот функционал не равен нулю.

Ключевые слова: локально компактная группа, групповая алгебра, непрерывное представление.

1. Введение

Одним из важных примеров банаховых иволютивных алгебр является групповая алгебра $L^1(G) = L^1(G, \mu)$, соответствующая локально компактной группе G и левоинвариантной мере Хаара μ на G (см., например, [4], гл VI, § 28).

Известно, что любое невырожденное непрерывное *-представление π инволютивной алгебры $L^1(G)$ в гильбертовом пространстве H порождается соответствующим непрерывным унитарным представлением ρ группы G в H, при этом, подпространство $L \subset H$ инвариантно относительно π в том и только в том случае, когда L инвариантно относительно ρ (см. [4], гл. VI, § 29). Поскольку любое унитарное представление группы G является вполне приводимым (см., например, [2], § 7, 7.3), то любое невырожденное непрерывное *-представление групповой *-алгебры $L^1(G)$ в гильбертовом пространстве также вполне приводимо. Естественно возникает вопрос о справедливости этого свойства для любых невырожденных непрерывных представлений алгебры $L^1(G)$ в произвольных банаховых пространствах. В этом случае, для представления алгебры $L^1(G)$ уже нельзя говорить о сохранении инволюции, и поэтому важна структура $L^1(G)$ как банаховой алгебры, без учета её иволютивных свойств.

В настоящей работе показывается, что вполне приводимость всех невырожденных непрерывных представлений групповой алгебры $L^1(G)$ в банаховые пространства равносильна компактности группы G. Устанавливается также, что свойство вполне приводимости представления π алгебры $L^1(G)$ в банаховое пространство X эквивалентно существованию у представления π такого собственного элемента $x \in X$ для собственного функционала $F \in X'$, что $F(x) \neq 0$.

Используется терминология и обозначения теории представлений из [1], [2], [4], [5].

2. Предварительные сведения

Пусть (G, τ) - локально компактная топологическая группа, μ - левоинвариантная мера Хаара на G, $(L_1(G), ||\cdot||_1)$ - банахово пространство всех интегрируемых комплексных функций на (G, τ) (равные почти всюду функции отождествляются). В дальнейшем вместо интеграла $\int_G a d\mu, a \in L^1(G)$, будем писать $\int a(g)dg$. Обозначим через $C(G)$ линейное подпространство в $L^1(G)$ всех непрерывных функций на G с компактным носителем ([3], гл. I, § 1). Ясно, что $C(G)$ - всюду плотно в $(L^1(G), ||\cdot||_1)$.

Пусть $(X, ||\cdot||_X)$ - произвольное банахово пространство над полем комплексных чисел C и $X^{'}$ - сопряженное пространство к $(X, ||\cdot||_X)$, т.е. банахово пространство всех непрерывных линейных функционалов на $(X, ||\cdot||_X)$. Обозначим через $B(X)$ банахово пространство всех непрерывных линейных отображений из X в X, а через $GL(X)$ - группу всех обратимых отображений из $B(X)$. В $B(X)$ будем рассматривать сильную операторную топологию t_s. Сходимость сети $\{T_\alpha\} \subset B(X)$ к $T \in B(X)$ в топологии t_s означает, что $||T_\alpha x - Tx||_X \to 0$ для всех $x \in X$.

Представление группы G в банаховом пространстве $(X, ||\cdot||_X)$ есть гомоморфизм ρ из группы G в группу $GL(X)$. Представление ρ называется сильно непрерывным, если из сходимости сети $g_\alpha \to g$ в (G, τ) следует, что $\rho(g_\alpha) \to \rho(g)$ в топологии t_s. Пусть ρ - сильно непрерывное представление локально компактной группы (G, τ) в банаховом пространстве $(X, ||\cdot||_X)$. Определим линейное отображение $\pi_\rho : C(G) \to B(X)$, полагая

$$\pi_\rho(\varphi)(x) = \int_G \varphi(g)\rho(g)(x)dg. \tag{2.1}$$

Последний интеграл сходится в X, поскольку отображение $g \mapsto \varphi(g)\rho(g)(x)$ из (G, τ) в $(X, ||\cdot||_X)$ является непрерывным и имеет компактный носитель. Известно, что $\pi_\rho(\varphi) \in B(X)$ для всех $\varphi \in C(G)$, при этом отображение π_ρ есть кольцевой гомоморфизм ([3], гл. I, § 1), т.е.

$$\pi_\rho(\varphi * \psi) = \pi_\rho(\varphi)\pi_\rho(\psi), \tag{2.2}$$

где $(\varphi * \psi)(g) = \int_G \varphi(h)\psi(h^{-1}g)dh$.

Предположим, что представление ρ - ограничено, т.е. существует такое положительное число λ , что $||\rho(g)||_{B(X)} \leq \lambda$ для всех $g \in G$. Тогда отображение π_ρ продолжается на $(L^1(G), ||\cdot||_1)$, при этом сохраняется равенство (2.2) и $||\pi_\rho(f)||_{B(X)} \leq \lambda||f||_1$ для всех $f \in L^1(G)$ ([3], гл. I, § 1). Следовательно, π_ρ есть непрерывный линейный гомоморфизм из банаховой алгебры $(L^1(G), ||\cdot||_1)$ в банахову алгебру $(B(X), ||\cdot||_{B(X)})$, т.е. π_ρ - непрерывное представление алгебры $L^1(G)$ в банаховом пространстве X.

Пусть ρ - сильно непрерывное представление (G,τ) в $(X, ||\cdot||_X)$. Замкнутое линейное подпространство Y в X называется ρ - инвариантным (соответственно, π_ρ - инвариантным), если $\rho(g)(Y) \subset Y$ (соответственно, $\pi_\rho(\varphi)(Y) \subset Y$) для всех $g \in G$ (соответственно, $\varphi \in C(G)$). Известно ([3], гл. I, § 1), что замкнутое линейное подпространство Y является ρ - инвариантным в том и только в том случае, когда оно π_ρ - инвариантно.

Ненулевой элемент $x \in X$ $(F \in X')$ называется собственным вектором (функционалом) для ρ, если $\rho(g)x = \lambda(g)x$ (соответственно, $F(\rho(g)y) = \lambda(g)F(y))$) для всех $g \in G,\ y \in X$, где $\lambda(g) \in C$. Ясно, что $\lambda(g)$ есть непрерывный гомоморфизм из G в единичную окружность $\{\lambda \in C : |\lambda| = 1\}$.

Сильно непрерывное представление $\rho : (G,\tau) \to (GL(X), t_s)$ назовем B - представлением, если для любого его собственного функционала $F \in X'$ существует такой собственный элемент $x \in X$ для ρ, что $F(x) \neq 0$. Будем говорить, что локально компактная группа (G,τ) есть B - группа, если любое её ограниченное сильно непрерывное представление является B - представлением.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*
(i) (G,τ) *- B - группа;*
(ii) (G,τ) *- компактная группа.*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$ Зададим левое регулярное представление ρ группы G в банаховом пространстве $L^1(G)$, полагая $(\rho(g)\varphi)(t) = \varphi(gt),\ \varphi \in L^1(G),\ g,t \in G$. В силу равенства $||\rho(g)\varphi||_1 = \int_G |\varphi(gt)|dt = ||\varphi||_1$, имеем, что $\rho(g)$ - изометрия пространства $L^1(G)$, в частности, ρ - ограниченное представление. Покажем, что ρ - сильно непрерывное представление. Пусть сначала $\varphi \in C(G)$ и K - компактный носитель φ. Поскольку функция φ - равномерно непрерывна на K, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такая компактная окрестность U единичного элемента $e \in G$, что $|\varphi(h) - \varphi(g)| < \varepsilon$, если $gh^{-1} \in U$. Если $g_1 \in Ug_0$, то $(g_1t)(g_0t)^{-1} \in U$, и потому

$$||\rho(g_0)(\varphi) - \rho(g_1)(\varphi)||_1 = \int_{(g_0^{-1}K)\bigcup(g_1^{-1}K)} |\varphi(g_0t) - \varphi(g_1t)|dt \leq 2\varepsilon\mu(K).$$

Следовательно, для $g_\alpha \to g_0$ получим, что $||\rho(g_\alpha)(\varphi) - \rho(g_0)(\varphi)||_1 \to 0$.

Поскольку $C(G)$ всюду плотно в $(L^1(G), ||\cdot||_1)$, то ρ - ограниченное сильно непрерывное представление группы (G,τ) в $(L^1(G), ||\cdot||_1)$.

Рассмотрим ненулевой непрерывный линейный функционал F на $(L^1(G), ||\cdot||_1)$, определенный равенством $F(\varphi) = \int \varphi(g)dg$. Ясно,что F - собственный функционал для представления ρ . Так как (G,τ) - B - группа, то существует собственный вектор $\varphi_0 \in L^1(G)$, для которого $F(\varphi_0) \neq 0$. Из равенства $\rho(g)\varphi_0 = \lambda(g)\varphi_0$, следует, что $\lambda(g)F(\varphi_0) = F(\rho(g)(\varphi_0)) = F(\varphi_0)$, т.е. $\lambda(g) = 1$ для всех $g \in G$. Это означает, что $\varphi_0(gt) = \varphi_0(t)$, т.е. $\varphi_0 \equiv const$, что влечет компактность группы (G,τ).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть (G,τ) - компактная группа, $\rho : (G,\tau) \to (B(X), t_s)$ - сильно непрерывное представление G в банаховом пространстве X, F - собственный функционал для ρ, т.е. $F(\rho(g)y) = \lambda(g)F(y)$ для всех $g \in G$, $y \in X$. Выберем такое $x_1 \in X$, для которого $F(x_1) \neq 0$. Поскольку $\lambda(g)$ - непрерывная функция на компактной группе (G, τ), то существует интеграл $\int\limits_G \overline{\lambda(h)}\rho(h)(x_1)dh = x_0 \in X$, при этом

$$\rho(g)x_0 = \rho(g)\int\limits_G \overline{\lambda(h)}\rho(h)(x_1)dh = \int\limits_G \overline{\lambda(h)}\rho(gh)(x_1)dh$$

$$= \int\limits_G \overline{\lambda(g^{-1}h)}\rho(t)(x_1)dh = \overline{\lambda(g^{-1})}x_0.$$

Так как $|\lambda(h)| \equiv 1$, то

$$F(x_0) = \int\limits_G \overline{\lambda(h)}F(\rho(h)(x_1))dh = \int\limits_G \overline{\lambda(h)}\lambda(h)F(x_1) = F(x_1)\mu(G) \neq 0,$$

т.е. $x_0 \neq 0$, и поэтому x_0 есть собственный вектор для ρ, при этом, $F(x_0) \neq 0$. Следовательно, ρ является B - представлением, и поэтому (G, τ) есть B - группа. □

Пусть (G, τ) - произвольная локально компактная группа и X - любое банахово пространство. Сильно непрерывное представление $\rho : (G, \tau) \to (GL(X), t_s)$ назовем D - представлением или вполне приводимым представлением, если для всякого ρ - инвариантного замкнутого линейного подпространства в X существует ρ - инвариантное замкнутое дополнение.

Будем говорить, что локально компактная группа (G, τ) есть D - группа, если любое её ограниченное сильно непрерывное представление является D - представлением.

Известно ([6]), что сильно непрерывное представление компактной группы в банаховом пространстве всегда обладает свойством вполне приводимости. В следующей теореме устанавливается, что D - группа обязательно является компактной.

Теорема 2. *Для локально компактной группы* (G, τ) *следующие условия эквивалентны:*

(i) (G, τ) *- компактная группа;*

(ii) (G, τ) *-* D *- группа;*

(iii) (G, τ) *-* B *- группа.*

Доказательство. Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ установлена в [6] , а импликация $(iii) \Rightarrow (i)$ получена в теореме 1.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Пусть G - D - группа и $\rho : (G, \tau) \to (GL(X), t_s)$ - ограниченное сильно непрерывное представление G в банаховом пространстве X. Пусть F - собственный функционал для ρ. Ясно, что замкнутое линейное подпространство $V = kerF = \{x \in X : F(x) = 0\}$ является ρ - инвариантным. Поскольку G - D -

группа, то существует такое замкнутое ρ - инвариантное линейное подпространство $W = \{\lambda x_0\}_{\lambda \in C}$, что $X = V \oplus W$, где $0 \neq x_0 \in X$ и $F(x_0) \neq 0$. Из включения $\rho(g)(W) \subset W$ следует, что $\rho(g)(x_0) = \lambda(g)(x_0)$, где $\lambda(g) \in C$, т.е. x_0 есть собственный элемент для ρ, при этом $F(x_0) \neq 0$. Это означает, что ρ есть B - представление, и потому G - B - группа. $\square$

3. Вполне приводимые непрерывные представления групповых алгебр

Пусть (G, τ) - локально компактная группа $\rho : (G, \tau) \to (GL(X), t_s)$ - ограниченное сильно непрерывное представление G в банаховом пространстве X. Как уже отмечалось, равенство (2.1) определяет гомоморфизм, т.е. представление π_ρ алгебры $C(G)$ в алгебру $B(X)$, при этом π_ρ продолжается до непрерывного гомоморфизма банаховой алгебры $(L^1(G), ||\cdot||_1)$ в банахову алгебры $(B(X), ||\cdot||_{B(X)})$. Обозначим это продолжение также через π_ρ и будем называть его ассоциированным представлением алгебры $L^1(G)$ для представления ρ группы (G, τ).

Лемма 1. *Построенное представление π_ρ обладает следующим свойством невырожденности: множество $\{\pi_\rho(\varphi)(x) : \varphi \in C(G),\ x \in X\}$ плотно в X.*

Доказательство. Зафиксируем $x \in X$ и $\varepsilon > 0$, и используя сильную непрерывность представления ρ, выберем компактную окрестность U единицы в (G, τ), для которой $||\rho(g)(x) - x||_X < \varepsilon$ для всех $g \in U$. Выберем неотрицательную функцию $\varphi \in C(G)$ с носителем $supp\varphi \subset U$, для которой $\int\limits_G \varphi(g)dg = 1$. Тогда $\pi_\rho(\varphi)(x) - x = \int\limits_G \varphi(g)\rho(g)(x)dg - x = \int\limits_U \varphi(g)(\rho(g)x - x)dg$, и поэтому $||\pi_\rho(\varphi)(x) - x||_X \leq \int\limits_U \varphi(g)||\rho(g)x - x||_X dg \leq \varepsilon$. Это означает, что множество $\{\pi_\rho(\varphi)(x) : \varphi \in C(G),\ x \in X\}$ плотно в X. $\square$

В дальнейшем, произвольное представление π из алгебры $L^1(G)$ в алгебру $B(X)$ будем называть невырожденным, если множество $\{\pi(\varphi)(x) : \varphi \in C,\ x \in X\}$ плотно в X.

Теорема 3. *Пусть π - невырожденное непрерывное представление банаховой алгебры $L^1(G)$ в алгебру $(B(X), ||\cdot||_{B(X)})$. Тогда существует единственное ограниченное сильно непрерывное представление $\rho : (G, \tau) \to (GL(X), t_s)$, для которого $\pi = \pi_\rho$.*

Доказательство. Мы используем метод доказательства теоремы 1 из ([2], § 10, 10.2). Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - базис компактных окрестностей единичного элемента $e \in (G, \tau)$. Зададим на A частичный порядок, считая $\alpha \leq \beta$, если $U_\beta \subset U_\alpha$. Пусть $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - такая сеть неотрицательных функций из $C(G)$, что носитель $supp\varphi_\alpha \subset U_\alpha$ и $\int\limits_G \varphi_\alpha(g)dg = 1$. Обозначим через $(L_g\varphi)(h) = \varphi(g^{-1}h)$ левый сдвиг функции

$\varphi \in L^1(G)$ на элемент g^{-1} и покажем, что $\{\pi(L_g\varphi_\alpha)(x)\}_{\alpha\in A}$ сходится в $(X, ||\cdot||_X)$ для любого $x \in X$. Так как $||L_g\varphi_\alpha||_1 = 1$ и $||\pi(L_g\varphi_\alpha)||_1 \le ||\pi||$ для всех $\alpha \in A$, то достаточно показать сходимость сети $\{\pi(L_g\varphi_\alpha)(x)\}_{\alpha\in A}$ для элементов x из всюду плотного подмножества $M = \{\pi(\varphi)(y) : \varphi \in C(G),\ y \in X\}$.

Пусть $\varphi \in C(G),\ y \in X$. В силу равномерной непрерывности функции φ, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\alpha(\varepsilon) \in A$, что $|\varphi(h) - \varphi(g)| < \varepsilon$ при всех $h, g \in G$, для которых $hg^{-1} \in U_{\alpha(\varepsilon)}$. Так как $supp\varphi_\alpha \subset U_\alpha \subset U_{\alpha(\varepsilon)}$ для всех $\alpha \ge \alpha(\varepsilon)$, то

$$|((L_g\varphi_\alpha) * \varphi)(h) - (L_g\varphi)(h)| \le \int\limits_{U_{\alpha(\varepsilon)}} \varphi_\alpha(s)|\varphi(s^{-1}(g^{-1}h)) - \varphi(g^{-1}h)|ds \le \varepsilon$$

для всех $\alpha \ge \alpha(\varepsilon)$.

Ясно, что значение функции $((L_g\varphi_\alpha) * \varphi)(h)$ равно нулю вне компактного множества

$$(gsupp\varphi_\alpha) \cdot supp\varphi \subset (gU_{\alpha(\varepsilon)}) \cdot supp\varphi := K(\varepsilon)$$

при $\alpha \ge \alpha(\varepsilon)$.

Таким образом,

$$||(L_g\varphi_\alpha) * \varphi - (L_g\varphi)||_1 = \int\limits_{K(\varepsilon)\cup suppL_g\varphi} |((L_g\varphi_\alpha) * \varphi)(h) - (L_g\varphi)(h)|dh \le$$

$$\varepsilon\left[\mu(K(\varepsilon)) + \mu(suppL_g\varphi)\right].$$

Следовательно,

$$\pi(L_g\varphi_\alpha)(\pi(\varphi)(y)) = \pi((L_g\varphi_\alpha) * \varphi)(y) \to \pi(L_g\varphi)(y).$$

Обозначим через $\rho(g)(x)$ предел сети $\{\pi(L_g\varphi_\alpha)(x)\}_{\alpha\in A}$. Очевидно, что $\rho(g)$ есть линейный оператор в X. Если $x = \pi(\varphi)(y),\ \varphi \in C(G),\ y \in X$, то

$$||\rho(g)(x)||_X = ||\pi((L_g\varphi(y)||_X \le \limsup_{\alpha\in A} ||\pi((L_g\varphi_\alpha)|| \cdot ||x||_X \le ||\pi||\ ||x||_X,$$

т.е. $\rho(g) \in B(X)$ и $||\rho(g)||_{B(X)} \le ||\pi||$ для всех $g \in G$. Следовательно, ρ есть ограниченное представление группы G в X.

Покажем теперь, что ρ - сильно непрерывное представление. В силу ограниченности ρ, достаточно показать, что сходимость $g_\alpha \to g$ влечет сходимость $\rho(g_\alpha)(\pi(\varphi)(y)) \to \rho(g)(\pi(\varphi)(y))$ для всех $\varphi \in C(G),\ y \in X$. Поскольку $g_\alpha \to g$, то для любой компактной окрестности U единицы e существует такое $\alpha(U)$, что $g_\alpha^{-1}g \in U$ при $\alpha \ge \alpha(U)$. Следовательно, $|\varphi(g_\alpha^{-1}h) - \varphi(g^{-1}h)| < \varepsilon$, если U выбрано так, чтобы $|\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon$ при $t^{-1}s \in U$. Таким образом, при $\alpha \ge \alpha(U)$ имеем, что

$$||L_{g_\alpha}\varphi - L_g\varphi||_1 \le \int\limits_{(g_\alpha supp\varphi)\cup(gsupp\varphi)} |\varphi(g_\alpha^{-1}h) - \varphi(g^{-1}h)|dh \le 2\varepsilon\mu(supp\varphi),$$

Следовательно,

$$\rho(g_\alpha)(\pi(\varphi)(y)) = \pi(L_{g_\alpha}\varphi)(y) \to \pi(L_g\varphi)(y) = \rho(g)(\pi(\varphi)(y)).$$

Покажем теперь, что $\pi_\rho = \pi$, где $\pi_\rho(\varphi)(x) = \int\limits_G \varphi(g)\rho(g)(x)dg,\ \varphi \in C(G)$. Если $\psi \in C(G),\ y \in X$, то

$$\pi_\rho(\varphi)(\pi(\psi)y) = \int\limits_G \varphi(g)\pi(L_g\psi)(y)dg.$$

С другой стороны,

$$\pi(\varphi)(\pi(\psi)(y)) = \pi(\varphi * \psi)(y) = \pi(\int\limits_G \varphi(g)\psi(g^{-1}h)dg)(y) =$$

$$\int\limits_G \varphi(g)\pi(L_g\psi)(y)dg.$$

Таким образом, линейные непрерывные операторы $\pi_\rho(\varphi)$ и $\pi(\varphi)$ совпадают на всюду плотном множестве M, и потому $\pi_\rho = \pi$.

Осталось показать единственность представления ρ, для которого $\pi = \pi_\rho$. Пусть $\rho_1 : (G, \tau) \to (GL(X), t_s)$ - другое сильно непрерывное ограниченное представление и $\pi(\varphi)(x) = \pi_{\rho_1}(\varphi)(x) = \int\limits_G \varphi(g)\rho_1(g)(x)dg$ для всех $\varphi \in C(G)$ и $x \in X$. Взяв $g = e$, имеем,

$$\pi(\varphi_\alpha)(\pi(\varphi)(y)) = \pi(L_e\varphi_\alpha)(\pi(\varphi)(y)) \to \pi(\varphi)(y)$$

для всех $\varphi \in C(G),\ y \in X$. Поскольку π - ограниченное представление и M плотно в X, то $\pi(\varphi_\alpha(x)) \to x$ для всех $x \in X$. Следовательно, $\rho_1(g)\pi(\varphi_\alpha(x)) \to \rho_1(g)(x)$. С другой стороны,

$$\rho_1(g)\pi(\varphi_\alpha)(x) = \rho_1(g)\int\limits_G \varphi_\alpha(h)\rho_1(h)(x)dh = \int\limits_G \varphi_\alpha(h)\rho_1(gh)(x)dh =$$

$$= \int\limits_G \varphi_\alpha(g^{-1}s)\rho_1(s)(x)ds = \pi(L_g\varphi_\alpha)(x).$$

Поэтому $\pi(L_g\varphi_\alpha)(x) \to \rho_1(g)(x)$. Аналогично, $\pi(L_g\varphi_\alpha)(x) \to \rho(g)(x)$. Следовательно, $\rho = \rho_1$. $\square$

Из леммы 1 и теоремы 3 вытекают следующие

Следствие 1. *Между ограниченными сильно непрерывными представлениями*

$$\rho : (G, \tau) \to (GL(X), t_S)$$

и невырожденными непрерывными представлениями

$$\pi : (L^1(G), ||\cdot||_1) \to (B(X), ||\cdot||_{B(X)})$$

существует взаимно однозначное соответствие, определяемое формулой

$$\pi_\rho(\varphi)(x) = \int\limits_G \varphi(g)\rho(g)(x)dg,$$

где $\varphi \in C(G),\ x \in X$.

Следствие 2. *Пусть* ρ *- ограниченное сильно непрерывное представление из* (G, τ) *в* $(GL(X), t_s)$*,* Y *- замкнутое линейное подпространство в* X*. Тогда* Y *-* ρ *- инвариантно в том и только в том случае, когда* Y *-* π_ρ *- инвариантно.*

Рассмотрим теперь свойства представлений π алгебры $L^1(G)$, связанные с наличием собственных векторов и функционалов для π. Для представления π алгебры $L^1(G)$ в $B(X)$ точно также, как и для представления группы G, определяются понятия собственного вектора и собственного функционала. Будем говорить, что ненулевой элемент $x \in X$ (соответственно, ненулевой функционал $F \in X'$) является собственным для π, если $\pi(f)(x) = \lambda(f)x$ (соответственно, $F(\pi(f)(y)) = \lambda(f)F(y))$ для всех $f \in L^1(G),\ y \in X$, где $\lambda(f) \in C$.

Алгебру $L^1(G)$ назовем B - алгеброй, если для любого невырожденного непрерывного представления π алгебры $L^1(G)$ в $B(X)$ и для любого собственного функционала $F \in X'$ для π существует такой собственный элемент $x \in X$ для π, что $F(x) \neq 0$.

Теорема 4. *Групповая алгебра* $L^1(G)$ *локально компактной группы* (G, τ) *является* B *- алгеброй тогда и только тогда, когда группа* (G, τ) *есть* B *- группа.*

Доказательство. Пусть (G, τ) - B - группа, и π - произвольное невырожденное непрерывное представление $L^1(G)$ в $B(X)$. В силу теоремы 3, существует такое ограниченное сильно непрерывное представление $\rho : (G, \tau) \to (GL(X), t_s)$, что $\pi = \pi_\rho$.

Пусть F - собственный линейный функционал для представления π, т.е. $F(\pi(f)(x)) = \lambda(f)F(x)$, для любых $f \in L^1(G)$, $x \in X$. В частности, $F(\pi(L_g\varphi_\alpha)(x)) = \lambda(L_g\varphi_\alpha)F(x)$, где сеть $\{\varphi_\alpha\}$ взята из доказательства теоремы 3. Поскольку функционал F непрерывен и $\pi(L_g\varphi_\alpha)(x)$ сходится в X к элементу $\rho(g)(x)$ (см. доказательство теоремы 3), то существует предел $F(\rho(g)(x)) = \lim\limits_\alpha \lambda(L_g\varphi_\alpha)F(x)$. Поэтому существует также предел $\lambda(g) := \lim\limits_\alpha \lambda(L_g\varphi_\alpha)$, для которого имеет место равенство $F(\rho(g)(x)) = \lambda(g)F(x)$.

Поскольку G - B -группа, то существует такой собственный вектор $x_0 \in X$ для ρ, что $F(x_0) \neq 0$. Так как $\rho(g)(x_0) = \gamma(g)x_0$ для всех $g \in G$, где γ - непрерывный характер на (G, τ), то $f\gamma \in L^1(G)$ для всех $f \in L^1(G)$, при этом

$$\pi(f)(x_0) = \int f(g)\rho(g)(x_0)dg = \int f(g)\gamma(g)(x_0)dg =$$

$$(\int f(g)\gamma(g)dg)x_0 = \nu(f)x_0,$$

где $\nu(f) = \int f(g)\gamma(g)dg$. Это означает, что x_0 - собственный вектор для представления π. Таким образом, $L^1(G)$ - B - алгебра. Обратная импликация доказывается аналогично.

□

Из теорем 1 и 4 вытекает следующее

Следствие 3. *Групповая алгебра $L^1(G)$ является B - алгеброй, тогда и только тогда, когда G - компактная группа.*

Алгебру $L^1(G)$ назовем D - алгеброй, если любое невырожденное непрерывное представление $\pi : L^1(G) \to (B(X), ||\cdot||_{B(X)})$ является вполне приводимым, т.е. для каждого π - инвариантного замкнутого линейного подпространства в X существует π - инвариантное замкнутое дополнение.

Теорема 5. *Групповая алгебра $L^1(G)$ локально компактной группы (G, τ) является D - алгеброй тогда и только, тогда, когда группа (G, τ) есть D - группа.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4 с использованием теоремы 3 и следствия 2.

Таким образом, согласно теоремам 2 , 4 и 5, получаем следующее

Следствие 4. *Для групповой алгебры $L^1(G)$ локально компактной группы (G, τ) следующие условия эквивалентны:*

1) $L^1(G)$ - B- алгебра;
2) $L^1(G)$ - D - алгебра;
3) (G, τ) - компактная группа.

Приведем еще один пример нормированной алгебры, для которой сохраняется эквивалентность свойств 1) и 2) из следствия 4. Рассмотрим подалгебру $C(G)$ в алгебре $L^1(G)$. Также, как и для алгебры $L^1(G)$, определяются невырожденные непрерывные представления π из $C(G)$ в $(B(X), ||\cdot||_{B(X)})$, а также понятия собственного вектора и собственного функционала для π. Повторяя доказательства теорем 3, 4 и 5 получим следующую характеризацию компактности группы (G, τ).

Теорема 6. *Для локально компактной группы* (G, τ) *следующие условия эквивалентны:*

1) $C(G)$ *-* B *- алгебра;*

2) $C(G)$ *-* D *- алгебра;*

3) (G, τ) *- компактная группа.*

Список цитируемых источников

1. *Желобенко Д. П., Штерн А. И.* Представления групп Ли — Москва: Наука, 1983. — 360 с.
2. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений — Москва: Наука, 1978. — 343 с.
3. *Ленг С.* $SL_2(R)$ — Москва: Мир, 1977. — 430 с.
4. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца — Москва: Наука, 1968. — 664 с.
5. *Наймарк М. А.* Теория представлений групп — Москва: Наука, 1976. — 560 с.
6. *Shiga K.* Representations of a compact group on a Banach space // Journal Math. Soc. Japan — 1955. — V. 7. — P. 224 - 258.

Получена 02.06.2010