Динамические системы, вып. 25 (2008), 135–144

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 539.3

Об улучшении сходимости рядов для бигармонической задачи в прямоугольнике

В. Н. Чехов, А. В. Пан
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: tsah2@ukr.net*

Аннотация. Исследование решения краевой задачи для бигармонического уравнения в прямоугольной области усложняется недостаточной сходимостью производных от тригонометрических рядов в окрестности границы области. Предлагается способ улучшения сходимости рядов в аналитических представлениях решений для задачи изгиба тонкой защемленной прямоугольной пластины и для плоской задачи теории упругости в прямоугольной области. Обнаружен колебательный характер поведения решений вблизи углов прямоугольной границы.

Ключевые слова: улучшение сходимости, бигармоническая задача в прямоугольнике, прямоугольная упругая пластина, линейные бесконечные системы.

1. Некоторые краевые бигармонические задачи

Рассмотрим неоднородное бигармоническое уравнение в области $|x| < a, |y| < b$

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{q_0}{D} \tag{1.1}$$

с однородными краевыми условиями на границе области

$$w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } |x| = a; \qquad w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } |y| = b. \tag{1.2}$$

Краевая задача (1.1), (1.2) позволяет найти распределение прогибов $w(x, y)$ в тонкой прямоугольной пластине с защемленными краями при действии равномерного поперечного давления q_0. Здесь D - параметр изгибной жесткости пластины.

Еще одна краевая задача с однородным бигармоническим уравнением в области $|x| < a, |y| < b$

$$\nabla^2\nabla^2 F = 0 \tag{1.3}$$

и с неоднородными граничными условиями

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = p(y),\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{при } |x| = a; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } |y| = b \tag{1.4}$$

© *В. Н. ЧЕХОВ, А. В. ПАН*

соответствует плоской задаче теории упругости для упругой прямоугольной призмы, которая растягивается в направлении оси Ox внешними напряжениями $p(y)$ на гранях $x = a$ и $x = -a$. Для симметрии полагаем $p(y)$ четной функцией.

Представление решения краевой задачи (1.1), (1.2), полученное методом суперпозиции, впервые опубликовано в работах [8], [3]. Его можно преобразовать [16] к следующей форме:

$$w = \frac{q_0}{24D}\left\{(b^2-y^2)^2 + A_0 - b\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{X_n}{\alpha_n^2}B(y,\alpha_n,b)\cos\alpha_n x + \right.$$
$$\left. + a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{Y_n}{\beta_n^2}B(x,\beta_n,a)\cos\beta_n y\right\}, \quad (1.5)$$

где первое слагаемое в правой части является частным решением неоднородного уравнения (1.1)); A_0, X_n, Y_n – произвольные постоянные, позволяющие выполнить граничные условия (1.2); $\alpha_n = n\pi/a$, $\beta_n = n\pi/b$;

$$B(z,\lambda,h) = \left(\frac{h}{\operatorname{th}\lambda h} + \frac{1}{\lambda}\right)\frac{\operatorname{ch}\lambda z}{\operatorname{sh}\lambda h} - z\frac{\operatorname{sh}\lambda z}{\operatorname{sh}\lambda h}\ . \quad (1.6)$$

После подстановки выражения (1.5) в граничные условия (1.2) с помощью известных [16] разложений в тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned}(b^2-y^2)^2 &= \frac{8}{15}b^4 - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{48}{\beta_n^4}\cos\beta_n y, \qquad y\in[-b,\ b\ ];\\ B(y,\alpha_n,b) &= \frac{2}{\alpha_n^2 b} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4\alpha_n^2}{b(\beta_k^2+\alpha_n^2)^2}\cos\beta_k y\end{aligned} \quad (1.7)$$

выводится [16] бесконечная система ($k = 1, 2, \dots$) линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных X_n, Y_n

$$b\Delta(\alpha_k b)X_k = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\alpha_k^3 Y_n}{(\alpha_k^2+\beta_n^2)^2}\ , \quad a\Delta(\beta_k a)Y_k = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\beta_k^3 X_n}{(\alpha_n^2+\beta_k^2)^2} + \frac{48}{\beta_k}, \quad (1.8)$$

где $\Delta(\xi) = \operatorname{cth}\xi + \xi/\operatorname{sh}^2\xi$. Постоянная A_0 выражается через решение системы

$$A_0 = -2\sum_{n=1}^{\infty}Y_n/\beta_n^4\ . \quad (1.9)$$

Представление решения бигармонической задачи (1.3), (1.4) запишем [14] в сходной с (1.5) форме

$$F = C_0\frac{y^2}{2} - b\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\tilde{X}_n}{\alpha_n^2}B(y,\alpha_n,b)\cos\alpha_n x + a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\tilde{Y}_n}{\beta_n^2}B(x,\beta_n,a)\cos\beta_n y, \quad (1.10)$$

где $C_0, \tilde{X}_n, \tilde{Y}_n$ — произвольные постоянные, позволяющие выполнить граничные условия (1.4). Соответствующая бесконечная система ($k = 1, 2, \dots$) отличается от системы (1.8) только свободными членами

$$b\Delta(\alpha_k b)\tilde{X}_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\alpha_k^3 \tilde{Y}_n}{(\alpha_k^2 + \beta_n^2)^2}\ , \quad a\Delta(\beta_k a)\tilde{Y}_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\beta_k^3 \tilde{X}_n}{(\alpha_n^2 + \beta_k^2)^2} - \beta_k p_k. \tag{1.11}$$

Здесь p_k — коэффициенты разложения заданной четной функции $p(y)$ в ряд Фурье $p(y) = p_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k(-1)^k \cos\beta_k y,\ y \in [-b,\ b\ ]$. Постоянная C_0 принимает значение: $C_0 = p_0$.

В частном случае параболического распределения [16] внешней нагрузки

$$p(y) = \frac{3}{2}p_0(1 - \frac{y^2}{b^2}) = p_0 - p_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{\beta_k^2 b^2}(-1)^k \cos\beta_k y, \tag{1.12}$$

свободные члены в бесконечных системах (1.8), (1.11) оказываются пропорциональными. Поэтому между решениями систем (1.8), (1.11) при нагрузке (1.12) устанавливается взаимно однозначное соответствие

$$\tilde{X}_k = \frac{p_0}{8b^2} X_k, \qquad \tilde{Y}_k = \frac{p_0}{8b^2} Y_k.$$

Получилось, что задача об изгибе защемленной прямоугольной тонкой пластины под действием равномерного давления и плоская задача об одноосном растяжении прямоугольной призмы под действием напряжений, распределенных по параболическому закону, приводятся к одной парной бесконечной системе (1.8).

2. Улучшение сходимости рядов в представлениях решений

Основные положения теории парных регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений рассмотрены в работе [9]. Доказаны достаточные условия существования ограниченного решения. Найдены и доказаны достаточные условия существования ненулевого предела для решения. В частности, для решения бесконечной системы (1.8) справедлив асимптотический закон

$$\lim_{k\to\infty} X_k = \lim_{k\to\infty} Y_k = G > 0. \tag{2.1}$$

При этом производные выше второго порядка от рядов в представлении (1.5) нельзя вычислить в малой окрестности границы без улучшения сходимости соответствующих рядов. Разные приемы улучшения сходимости рядов представлены в работах [4], [5], [10], [14] – [16] и др. Приемы достаточно трудоемкие и позволяют улучшить сходимость только на границе прямоугольника. Между тем, именно для асимптотического закона (2.1) имеется радикальное средство улучшения сходимости, опубликованное в 1914 г. И. Г. Бубновым [4] в форме тождества:

$$a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\beta_n^2}B(x,\beta_n,a)\cos\beta_n y-b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha_n^2}B(y,\alpha_n,b)\cos\alpha_n x\equiv$$
$$\equiv\frac{1}{45}(b^4-a^4)+\frac{1}{24}(a^2-x^2)^2-\frac{1}{24}(b^2-y^2)^2,\quad(2.2)$$

которое справедливо на границе и всюду внутри прямоугольника.

Метод улучшения сходимости, основанный на асимптотическом законе (2.1), продемонстрируем на формуле (1.9) подробно

$$A_0=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n}{\beta_n^4}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G-Y_n}{\beta_n^4}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G}{\beta_n^4}=2\sum_{n=1}^{p}\frac{G-Y_n}{\beta_n^4}-G\frac{b^4}{45}.\qquad(2.3)$$

Здесь сумма ряда с множителем G найдена точно $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\pi^4/90\right)$, а ряд с разностями $G-Y_n$ приближенно заменен суммой с достаточно большим количеством p слагаемых. В силу асимптотического закона (2.1) можно уменьшать погрешность приближенной формулы (2.3), увеличивая количество p слагаемых.

Точно также полностью избавляемся от сумм рядов в представлениях решений (1.5) и (1.10), заменяя ряды при множителях G и $\tilde{G}$ посредством тождества (2.2)

$$\frac{24D}{q_0}w\ =\ (b^2-y^2)^2+A_0+\frac{G}{45}(b^4-a^4)+\frac{G}{24}(a^2-x^2)^2-\frac{G}{24}(b^2-y^2)^2-$$
$$-b\sum_{n=1}^{p}(-1)^n\frac{X_n-G}{\alpha_n^2}B(y,\alpha_n,b)\cos\alpha_n x+a\sum_{n=1}^{p}(-1)^n\frac{Y_n-G}{\beta_n^2}B(x,\beta_n,a)\cos\beta_n y.\quad(2.4)$$

$$F\ =\ C_0\frac{y^2}{2}+\frac{\tilde{G}}{45}(b^4-a^4)+\frac{\tilde{G}}{24}(a^2-x^2)^2-\frac{\tilde{G}}{24}(b^2-y^2)^2-$$
$$-b\sum_{n=1}^{p}(-1)^n\frac{\tilde{X}_n-\tilde{G}}{\alpha_n^2}B(y,\alpha_n,b)\cos\alpha_n x+a\sum_{n=1}^{p}(-1)^n\frac{\tilde{Y}_n-\tilde{G}}{\beta_n^2}B(x,\beta_n,a)\cos\beta_n y.\quad(2.5)$$

Существование асимптотического закона (2.1) определяется только свойствами элементов матрицы бесконечной системы (1.8). Поэтому для бесконечной системы (1.11) тоже справедлив аналогичный асимптотический закон

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{X}_k=\lim_{k\to\infty}\tilde{Y}_k=\tilde{G}>0,$$

и предельное значение $\tilde{G}$ неизвестных фигурирует в представлении (2.5).

Представления (2.4), (2.5) содержат конечные суммы. Их можно дифференцировать сколько угодно раз. Элементарно проверяется, что решения удовлетворяют своим дифференциальным уравнениям (1.1), (1.3) тождественно. Выпишем выражение $\nabla^2 w$ пропорциональное сумме изгибающих моментов

$$\frac{12D}{q_0}\nabla^2 w\ =\ -\frac{12}{q_0}\frac{(M_x+M_y)}{1+\nu}\ =\ 6y^2-2b^2+\frac{G}{12}(3x^2-3y^2-a^2+b^2)+$$

$$+b\sum_{n=1}^{p}(-1)^n\frac{X_n-G}{\alpha_n}\frac{\operatorname{ch}\alpha_n y}{\operatorname{sh}\alpha_n b}\cos\alpha_n x-a\sum_{n=1}^{p}(-1)^n\frac{Y_n-G}{\beta_n}\frac{\operatorname{ch}\beta_n x}{\operatorname{sh}\beta_n a}\cos\beta_n y. \tag{2.6}$$

Здесь M_x, M_y- изгибающие моменты; ν- коэффициент Пуассона.

Принципиально важными являются выражения для перерезывающих сил Q_x, Q_y

$$\begin{aligned} Q_x &= -\left. D\frac{\partial\nabla^2 w}{\partial x}\right|_{x=a} = \frac{q_0 a}{12}\left(\sum_{n=1}^{p}(-1)^n(Y_n-G)\cos\beta_n y-\frac{G}{2}\right),\\ Q_y &= -\left. D\frac{\partial\nabla^2 w}{\partial y}\right|_{y=b} = \frac{q_0 b}{12}\left(\sum_{n=1}^{p}(-1)^n(G-X_n)\cos\alpha_n x+\frac{G}{2}-12\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Без улучшения сходимости их вычисление приводит к расходящимся рядам. Легко проверить, что выражения (2.7) тождественно удовлетворяют условию равновесия пластины в поперечном направлении.

3. О методах решения бесконечной системы (1.8)

Доказательство единственности ограниченного решения регулярной бесконечной системы (1.8) опубликовано Бондаренко П. С. [2] в предположении $b \geq a$. Варианты достаточных условий единственности решений бесконечных систем линейных алгебраических уравнений представлены в [7], [1].

Полезная дискуссия о неединственности ограниченных решений сопряженных бесконечных систем и об условиях, обеспечивающих существование решений, опубликована совсем недавно в работах [13], [17]. В работе [11] найден вариант достаточных условий неединственности ограниченного решения регулярной системы.

Первые оценки [8], [3], [4] ограниченного решения системы (1.8) были найдены методом простой редукции, когда определяются первые $2p$ неизвестных из конечной системы уравнений, матрица которой взята из левого верхнего угла бесконечной системы. Остальные неизвестные полагаются нулевыми.

Оригинальный метод вычисления верхних и нижних оценок решения регулярной системы, удовлетворяющего асимптотическому закону (2.1), разработан Кояловичем Б.М. [9]. Его называют методом лимитант. Он оказался не очень популярным из-за большого количества последовательных приближений при фиксированном количестве $2p$ основных неизвестных. Более популярным оказался улучшенный метод редукции [5], в котором все неизвестные, начиная с номера $p+1$ полагаются равными предельному значению ($X_k = Y_k = G \quad \forall k \geq p+1$). Решается только одна конечная система алгебраических уравнений. Но при этом не оценивается погрешность такого приближенного численного решения.

С другой стороны в работе [12] предлагается модификация метода лимитант, в которой вычисляются верхние и нижние оценки посредством решения всего двух вспомогательных систем, отличающихся только свободными членами. Утверждение, доказанное в [12], запишем в форме теоремы.

Теорема 1. *Для регулярной парной бесконечной системы с неотрицательными коэффициентами и неотрицательными свободными членами*

$$X_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} Y_n + b_k \ , \qquad Y_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k,n} X_n + \beta_k \ , \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.1}$$

которая удовлетворяет условиям существования и единственности ограниченного решения, существуют предельные выражения лимитант

$$V_k^{*p} = \frac{b_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{k,n} \breve{Y}_n}{\rho_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{k,n}(1 - \tilde{Y}_n)}, \quad W_k^{*p} == \frac{\beta_k + \sum\limits_{n=1}^{p} \alpha_{k,n} \breve{X}_n}{r_k + \sum\limits_{n=1}^{p} \alpha_{k,n}(1 - \tilde{X}_n)} \ , \quad k = p+1, p+2, \ldots.$$

Здесь $\rho_k = 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k,n}$; $r_k = 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_{k,n}$; $\{\breve{X}_n, \breve{Y}_n\}$ *и* $\{\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n\}$ *- решения вспомогательных конечных систем*

$$\breve{X}_k = \sum_{n=1}^{p} a_{k,n} \breve{Y}_n + b_k \ , \qquad \breve{Y}_k = \sum_{n=1}^{p} \alpha_{k,n} \breve{X}_n + \beta_k \ , \qquad k = \overline{1,p} \ ;$$

$$\tilde{X}_k = \sum_{n=1}^{p} a_{k,n} \tilde{Y}_n + \tilde{b}_k \ , \qquad \tilde{Y}_k = \sum_{n=1}^{p} \alpha_{k,n} \tilde{X}_n + \tilde{\beta}_k \ , \qquad k = \overline{1,p} \ ,$$

где $\tilde{b}_k = \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_{k,n}$, $\tilde{\beta}_k = \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} \alpha_{k,n}$.

При этом точные нижние и верхние грани предельных лимитант

$$h^{*p} = \inf_{k \geq p+1} \{V_k^{*p}, W_k^{*p}\}, \qquad H^{*p} = \sup_{k \geq p+1} \{V_k^{*p}, W_k^{*p}\}$$

оценивают ограниченное решение бесконечной системы (3.1) следующими неравенствами:

$$\breve{X}_k + h^{*p} \tilde{X}_k \leq X_k \leq \breve{X}_k + H^{*p} \tilde{X}_k, \quad \breve{Y}_k + h^{*p} \tilde{Y}_k \leq Y_k \leq \breve{Y}_k + H^{*p} \tilde{Y}_k, \qquad k = \overline{1,p} \ ;$$

$$h^{*p} \leq X_k \leq H^{*p}, \qquad h^{*p} \leq Y_k \leq H^{*p}, \qquad k = p+1, p+2, \ldots \ . \tag{3.2}$$

Особенно эффективны оценки (3.2) для бесконечных систем, решения которых подчиняются асимптотическому закону (2.1).

4. Некоторые особенности решений краевых задач

Воспользуемся теоремой 1 для оценок ограниченного решения регулярной бесконечной системы (1.8). Ограничимся здесь случаем квадратной пластины ($b = a$). Тогда система (1.8) приводится к относительно простому виду ($k = 1, 2, \dots$)

$$\Delta(k\pi)X_k = \frac{4}{\pi}k^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{(n^2+k^2)^2} \ , \quad \Delta(k\pi)Y_k = \frac{4}{\pi}k^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{(n^2+k^2)^2} + \frac{48}{k\pi} \ . \qquad (4.1)$$

Складывая соответствующие члены уравнений (4.1), приходим к регулярной бесконечной системе относительно сумм $X_k + Y_k$

$$\Delta(k\pi)(X_k + Y_k) = \frac{4}{\pi}k^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n + Y_n}{(n^2+k^2)^2} + \frac{48}{k\pi} \ , \qquad k = 1, 2, \dots \ . \qquad (4.2)$$

Сопоставим (4.2) с последовательностью тождеств

$$\Delta(k\pi) = \quad \frac{4}{\pi}k^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+k^2)^2} \quad + \frac{2}{k\pi} \ , \qquad k = 1, 2, \dots \ ,$$

выводимых из разложения (1.6), (1.7) при $y = b$. Очевидно, что система (4.2) превращается в эти тождества после подстановки зависимости

$$X_k + Y_k = 24 \ , \qquad k = 1, 2, \dots \ . \qquad (4.3)$$

Это единственное ограниченное решение регулярной бесконечной системы (4.2).

Зависимость вида (4.3) была опубликована в [6]. Там же был сделан и следующий шаг. Из асимптотического закона (2.1) и зависимости (4.3) найдено точное предельное значение неизвестных $G = 12$ до решения бесконечной системы (4.1). Очевидно, что значение G зависит от выбора множителей при неизвестных X_n, Y_n в представлении (1.5).

Однако численные оценки ограниченного решения бесконечной системы (4.1) не очень-то облегчаются знанием точного значения $G = 12$. Более того, о наибольших погрешностях приближенных значений решения как раз удобно судить по погрешностям приближенных значений для G, ибо замечено, что погрешности убывают с уменьшением номеров неизвестных.

Для обеспечения достаточно высокой точности решения бесконечной системы (4.1) здесь было выбрано значение $p = 466$. При этом о наибольших погрешностях неизвестных можно судить по значениям точных граней для предельных лимитант, вошедших в неравенства (3.2): $h^{*p} = 11.999843 < G < 12.000157 = H^{*p}$. Интересно, что среднее значение оценок для G оказывается равным G.

Отметим, что попытка исключения неизвестных X_k с помощью зависимости (4.3) приводит к более простой регулярной системе, но с отрицательными элементами матрицы, что не позволяет воспользоваться методом лимитант для нахождения оценок неизвестных. Поэтому здесь в соответствии с теоремой 1 оценивалось решение парной системы (4.1). Удовлетворение зависимости (4.3) служило одной из проверок точности решения. При вычислениях компонент напряженно-деформированного состояния в качестве неизвестных выбирались средние арифметические значения их нижних и верхних оценок.

На рисунке 1 представлены графики перерезывающей силы Q_y (2.7) на защемленном крае $y = a$. Чтобы показать подробности левого графика в малой окрестности угловой точки $(x = a, y = a)$, построены еще два графика в пределах отмеченных малыми прямоугольниками окрестностей. Масштабы этих двух дополнительных графиков изменяются для удобства наблюдения.

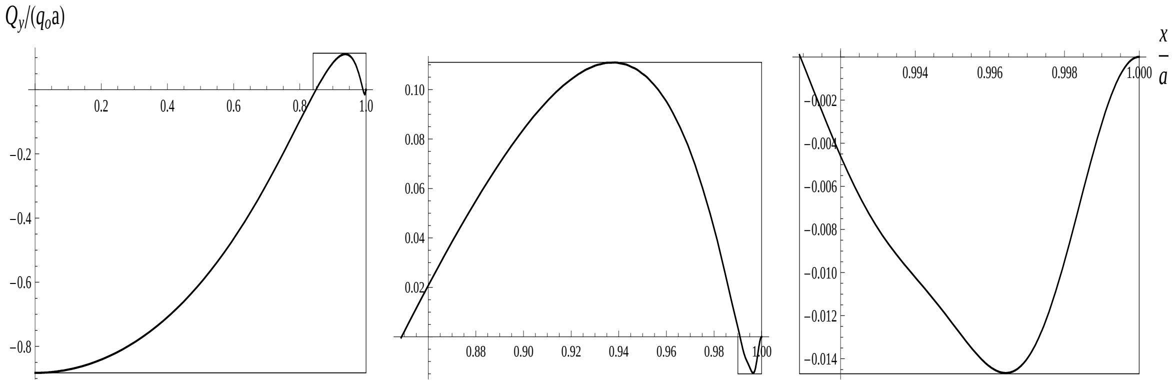

Рис. 1. Перерезывающая сила $Q_y(x)$ на краю $y = a$.

Наибольшее по абсолютной величине значение перерезывающей силы достигается в серединах защемленных сторон $Q_y(0) = -0.8826\ q_o a$. В малой окрестности угловой точки функция $Q_y(x)$ имеет 3 нуля при $x/a = \{0.8486, 0.9909, 1\}$. Между нулями достигаются 2 экстремальных значения: $Q_y = 0.111\ q_o a$ и $Q_y = -0.0147\ q_o a$.

Затухающие колебания в поведении перерезывающих сил с приближением к угловой точке были предсказаны в работе [15] на основании вида построенного там второго члена асимптотики, уточняющего асимптотический закон (2.1). В работе [18] этот дополнительный асимптотический член был использован для вывода сходящихся рядов и асимптотических формул для перерезывающих сил. Вычисления выполнены в случае пластины с отношением длин сторон равным двум $(b = 2a)$. Графики для перерезывающих сил в работе [18] и построенные на рисунке 1 качественно совпадают. Можно предположить, что объединение этих двух подходов к улучшению сходимости приведет к уменьшению объема вычислений и к повышению качества результатов.

Еще показано поведение вдоль диагонали квадрата $y = x$ в малой окрестности угловой точки для крутящих моментов $M_{xy}(x, y) = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ и для прогиба $w(x, y)$ (рис.2 , рис.3). Размерные множители на этих рисунках имеют вид $m_M = (1 - \nu) q_o a^2/24, \quad m_w = q_o a^4/(12D)$. Затухающие осцилляции при подходе к угловым точкам наблюдаются и у частных производных от $w(x, y)$, связанных с изгибающими моментами, например (2.6). Однако эти рисунки здесь не представлены.

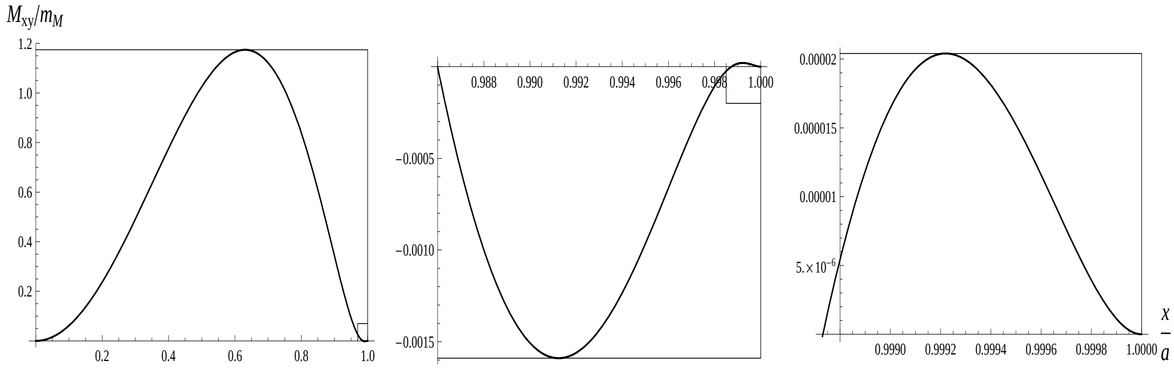

Рис. 2. Крутящий момент $M_{xy}(x, y)$ вдоль диагонали $y = x$.

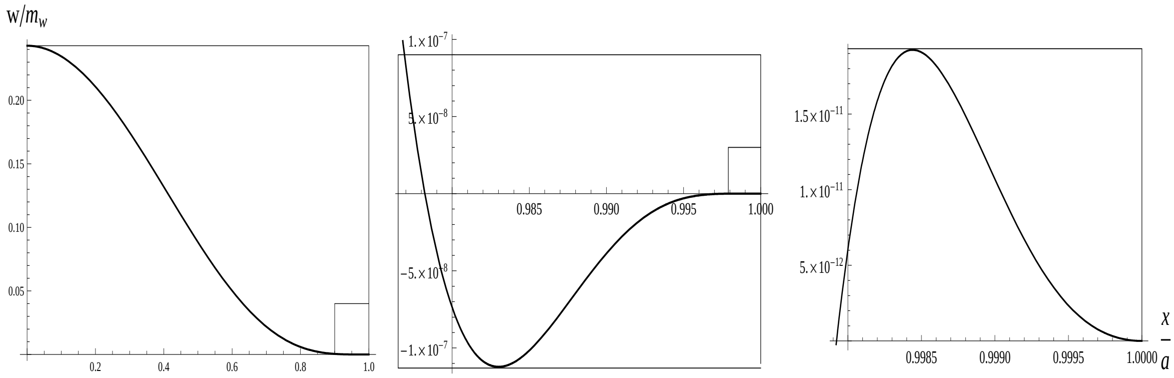

Рис. 3. Прогиб $w(x, y)$ вдоль диагонали $y = x$.

Колебательное поведение прогибов и частных производных от прогибов в окрестности угловой точки обнаруживается благодаря улучшению сходимости рядов во всей области, включая границу, и при достаточно высокой точности оценок решений бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

5. Заключение

Установлено, что классическая задача об изгибе защемленной прямоугольной пластины под действием равномерного поперечного давления и плоская задача об одноосном растяжении прямоугольной призмы под действием напряжений, распределенных по параболическому закону (1.12), приводятся к одной и той же регулярной парной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

С помощью тождества, опубликованного Бубновым И. Г. [4], удалось найти аналитические значения сумм всех рядов в представлениях решений для изгиба защемленной прямоугольной пластины и для плоской задачи о растяжении призмы.

Обнаружено, что в окрестностях углов прямоугольной области прогиб пластины и его частные производные имеют колебательное поведение с убывающей амплитудой. Прежде такой характер решения был отмечен [15], [16], [18] только для перерезывающих сил на границе пластины.

Список цитируемых источников

1. *Бондаренко П.С.* К вопросу об единственности для бесконечных систем линейных уравнений // Математ. сб. — 1951. — Т. 29 (71). — № 2. — С. 403–418.
2. *Бондаренко П.С.* Зауваження до чисельного розв'язання крайових задач рівняння Лапласа і бігармонічного рівняння методом нескінченних систем // Математ. збірник, Київськ. ун-т. — 1954. — № 5. — С. 39–49.
3. *Бубнов И.Г.* Напряжения в обшивке судов от давления воды // Морск. сборник. — 1902. — Т. 312. — № 10. — С. 119–138.
4. *Бубнов И.Г.* Строительная механика корабля.— СПб.: Изд-во Морского Мин-ва, 1914. — Ч. 2. — С. 331–640.
5. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. — К.: Наук. думка,1978. — 264 с.
6. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Об изгибе жестко защемленной квадратной пластинки // Прикладная механика. — 1965. — Т. 1. — № 9. — С. 134–136.
7. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближённые методы высшего анализа. — М.-Л.: Физматгиз, 1962. — 708 с.
8. *Коялович Б.М.* Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка. —СПб.: Изд-во Имп. Акад. Наук, 1902. — 125 с.
9. *Коялович Б.М.* Исследование о бесконечных системах линейных уравнений // Известия Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1930. — Т. 3. — С. 41–167.
10. *Мелешко В.В.* Метод суперпозиции в задачах о тепловых напряжениях в прямоугольных пластинах // Прикладная механика. — 2005. — Т. 41. — № 9. — С. 101–117.
11. *Чехов В.М., Пан А.В.* Достатні умови неєдиності розв'язків регулярної нескінченної системи алгебраїчних рівнянь // Доповіді НАН України. — 2005. — № 8. — С. 32–36.
12. *Чехов В.М., Пан А.В.* Про граничні вирази лімітант Кояловича // Доповіді НАН України. — 2007. — № 3. — С. 31–36.
13. *Davis A.M.J.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: discussion of non-uniqueness // Proc. Roy. Soc. London. — 2003. — A**459**. — P. 409–412.
14. *Meleshko V.V.* Equilibrium of elastic rectangle: Mathieu-Inglis-Pickett solution revisited // J. Elasticity. — 1995. — **40**. — № 1. — P. 207–238.
15. *Meleshko V.V.* Bending of an elastic rectangular clamped plate: exact versus 'engineering' solutions // J. Elasticity. — 1997. — **48**. — № 1. — P. 1–50.
16. *Meleshko V.V., Gomilko A.M.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle // Proc. Roy. Soc. London. — 1997. — A**453**. — P. 2139–2160.
17. *Meleshko V.V., Gomilko A.M.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: further discussion // Proc. Roy. Soc. London. — 2004. — A**460**. — P. 807–819.
18. *Meleshko V.V., Gomilko A.M., Gourjii A.A.* Normal reactions in a clamped elastic rectangular plate // J. Engng Math. — 2001. — **40**. — № 1. — P. 377–398.

Получена 26.09.2008