Динамические системы, вып. 22 (2007), 140–144

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.98

Пример K-непрерывного, разрывного вариационного функционала в пространстве Соболева

Е. В. Божонок
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: katboz@crimea.edu*

Аннотация. Построен пример компактно-непрерывного вариационного функционала в пространстве Соболева W_2^1, который не является непрерывным по норме пространства.

1. Введение. Предварительные сведения

Хорошо известно ([1] – [3]), что основной вариационный функционал Эйлера-Лагранжа

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx \tag{1.1}$$

в пространствах Соболева типа W_2^1 обладает существенно иными аналитическими свойствами, чем в классических пространствах типа C^n. В частности, в работе [4] нами были найдены специальные условия "псевдоквадратичности при которых вариационный функционал (1.1) является K-непрерывным, K-дифференцируемым и т.д.

В настоящей работе исследован конкретный пример вариационного функционала, который является K-непрерывным, не будучи непрерывным в обычном смысле слова. Нетривиальность примера подчеркивается тем обстоятельством, что, как показано ниже (теорема 2), для линейных операторов (и, в частности, функционалов) свойства K-непрерывности и непрерывности равносильны.

Приведем некоторые необходимые в дальнейшем определения и результаты.

Всюду далее H – полное бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство (вещественное или комплексное), E – произвольное локально выпуклое пространство.

Определение 1. [5] Абсолютно выпуклый компакт $C \subset H$ назовем гильбертовым компактом в H, если пространство $H_C = span\, C$, снабженное банаховой [6] нормой $\| \cdot \|_C$, порожденной C, изоморфно гильбертову пространству и плотно в H. Множество всех гильбертовых компактов в H обозначим $K(H)$.

Определение 2. [5] Индуктивную (по поглощению C) шкалу банаховых пространств $\{(H_C, \|\cdot\|_C)\}_{C\in K(H)}$ обозначим $\overrightarrow{H}_K$, а ее индуктивный предел — H_K. Таким образом

$$\overrightarrow{H}_K = \{(H_C, \|\cdot\|_C)\}_{C\in K(H)}; \qquad H_K = \varinjlim_{C\in K(H)} (H_C, \|\cdot\|_C) = \varinjlim \overrightarrow{H}_K.$$

Теорема 1. *([5, т. 8]) Пространство H_K и H изоморфны.*

Определение 3. [7] Назовем отображение $f : H \to E$ K-непрерывным на H, если все его сужения $f : H_C \to E$ непрерывны на H_C относительно $\|\cdot\|_C$, $\forall\, C \in K(H)$.

2. Пример K-непрерывного функционала

Вначале покажем, что для линейных операторов K-непрерывность и непрерывность совпадают.

Теорема 2. *Линейный оператор $A : H \to E$ непрерывен тогда и только тогда, когда он K-непрерывен.*

Доказательство. Так как $H \cong H_K = \varinjlim_{C\in K(H)} (H_C, \|\cdot\|_C)$ (по теореме 1), то из теоремы об индуктивном пределе [6] вытекает, что любой линейный оператор $A : H_K \to E$ непрерывен тогда и только тогда, когда непрерывны все его сужения $A : H_C \to E$, $\forall\, C \in K(H)$, откуда следует K-непрерывность оператора $A : H \to E$. □

Отметим, однако, что для нелинейных отображений K-непрерывность не влечет, вообще говоря, непрерывность в H. Рассмотрим пример интегрального функционала, который является K-непрерывным в W_2^1, но при этом разрывным в нуле в обычном смысле.

Пример 1. Пусть $u = \varphi(t)$, $t \geq 0$ – произвольная непрерывная вещественная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\varphi(0) = 0;\ \varphi(t) > 0 \text{ при } 0 < t < 6\pi;$$
$$\varphi(t) < 0 \quad \text{и убывает при } (7\pi)^{1-\delta} > t > 6\pi;$$
$$\varphi(t) \leq -m < 0 \quad \text{и убывает при } t < (7\pi)^{1-\delta}, \quad \text{где } \delta > 0 \text{ – достаточно мало;}$$
$$\varphi(t) = O(t^2) \text{ при } t \to +\infty. \tag{2.1}$$

Рассмотрим вариационный функционал:

$$\Phi(y) = \int_{2\pi}^{4\pi} \varphi(|y' \ln y'|^{1-\delta})dx; \quad y(\cdot) \in W_2^1([2\pi; 4\pi], \mathbb{C}). \tag{2.2}$$

(Здесь ln означает главную ветвь логарифма; при $y' = 0$ функция φ доопределяется по непрерывности: $\varphi(+0) = 0$).

Проверим K-непрерывность функционала (2.2).

Определение 4. [4] Отображение $f : \Omega \times Y \times Z =: T \to F$, где Ω – пространство с конечной мерой, Y, Z, F– вещественные банаховы пространства, назовем вейерштрассовским псевдоквадратичным по z ($f \in WK_2(z)$), если для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ представление

$$f(x, y, z) = P_C(x, y, z) + Q_C(x, y, z) \cdot \|z\| + R_C(x, y, z) \cdot \|z\|^2, \tag{2.3}$$

можно выбрать таким образом, что P_C, Q_C, и R_C равномерно непрерывны и ограничены на $T_C = \Omega \times C_Y \times Z$.

Предложение 1. *Функционал (2.2) K-непрерывен на $W_2^1([2\pi; 4\pi], \mathbb{C})$.*

Доказательство. По теореме 2.1 ([4]) для доказательства K-непрерывности функционала (2.2) нам необходимо доказать, что подынтегральная функция $f(x, y, z) = \varphi(|z \ln z|^{1-\delta})$, определенная на $[2\pi; 4\pi] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, является вейерштрассовской псевдоквадратичной по z.

Так как функция f не зависит от переменной y, то представление (2.3) следует выбирать независимо от C_Y.

Из

$$\lim_{|z|\to\infty} |z \ln z|^{1-\delta} = \infty$$

следует, что

$$\forall\, \varepsilon_0\, \exists\, \delta_0\ (|z| > \delta_0) \Rightarrow (|z \ln z|^{1-\delta} > \varepsilon_0).$$

Фиксируем ε_0 и δ_0, выберем разложение единицы в $\mathbb{C}$:

$$1 = \psi_1(z) + \psi_2(z),\ \text{ где } 0 \le \psi_1(z) \le 1,\ 0 \le \psi_2(z) \le 1,\ \ supp\, \psi_1(z) \subset (|z| \le \frac{\delta_0}{2}),$$

$$supp\, \psi_2(z) \subset (|z| \ge \delta_0),\ \ \psi_1(z) \text{ и } \psi_2(z) \text{ равномерно непрерывны в } \mathbb{C}\ \ ([8]).$$

Имеем:

$$f(z) = f(z)[\psi_1(z) + \psi_2(z)] = f(z)\psi_1(z) + \frac{f(z)\psi_2(z)}{|z|^2} \cdot |z|^2 = P_C(z) + R_C(z) \cdot |z|^2$$

Здесь $P_C(z)$ равномерно непрерывна и ограничена (по теореме Кантора и Вейерштрасса), так как является непрерывной и $supp\, P_C(z) \subset supp\, \psi_1(z) \subset [0; \frac{\delta_0}{2}]$; $R_C(z)$ непрерывна, так как $supp\, f(z)\psi_2(z) \subset [\delta_0; +\infty)$.

Далее:

$$|f_2(z)| = \frac{\varphi(|z \ln z|^{1-\delta})}{(|z \ln z|^{1-\delta})^2} \cdot \frac{(|z \ln z|^{1-\delta})^2}{|z|^2} \cdot |\psi_2(z)| \le C \cdot \frac{|\ln z|^{2-2\delta}}{|z|^2} \to 0 \text{ при } z \to \infty,$$

откуда $f_2(z)$ равномерно непрерывна и ограничена на $[\delta_0; +\infty)$. □

Теперь докажем, что функционал (2.2) не является непрерывным в обычном смысле.

Фиксируем $k \in \mathbb{Z}$ и положим $y(x) = \varepsilon \cdot (e^{ikx}/\sqrt{2\pi(k^2+1)})$, $\varepsilon > 0$.

Отсюда

$$y'(x)\ln y'(x) = \frac{\varepsilon k}{\sqrt{2\pi(k^2+1)}} \cdot \left(\ln \frac{\varepsilon k}{\sqrt{2\pi(k^2+1)}} + i(kx + \frac{\pi}{2})\right). \qquad (2.4)$$

Тогда

$$|y'(x)\ln y'(x)| \geq \frac{\varepsilon|k|}{\sqrt{2\pi(k^2+1)}} \cdot \left((2|k|\pi - \frac{\pi}{2}) - \left|\ln \frac{\varepsilon|k|}{\sqrt{2\pi(k^2+1)}}\right|\right).$$

Рассмотрим функцию $\lambda(t) = t\left((2|k|\pi - \pi/2) + \ln t\right)$ для $|k| \geq 2$. Производная $\lambda'(t) = (2|k|\pi - \pi/2) + \ln t + 1$ положительна, если $\ln t > \pi/2 - 2|k|\pi - 1$, т.е. $t > e^{\pi/2 - 2|k|\pi - 1}$.

В нашем случае

$$t = \frac{\varepsilon|k|}{\sqrt{2\pi(k^2+1)}},$$

т.е. для требования $\lambda'(t) > 0$ необходимо, чтобы того,

$$\varepsilon > \frac{e^{\pi/2-1}\sqrt{2\pi(k^2+1)}}{e^{2|k|\pi}|k|},$$

откуда функция $\lambda(t)$ будет возрастающей.

Рассмотрим

$$\widetilde{\varepsilon_k^-} = \frac{e^{\pi/2-1}\sqrt{2\pi(k^2+1)}}{e^{2|k|\pi}|k|} \leq \frac{2\sqrt{2\pi(k^2+1)}}{2|k|\pi \cdot |k|} = \frac{\sqrt{2\pi(k^2+1)}}{\pi k^2} < \frac{9\sqrt{2\pi(k^2+1)}}{2k^2}.$$

Таким образом, для

$$\varepsilon > \varepsilon_k^- = \frac{9\sqrt{2\pi(k^2+1)}}{2k^2}$$

функция $\lambda(t)$ возрастает, кроме того оценка снизу модуля выражения (2.4) дает:

$$|y'(x)\ln y'(x)| \geq \frac{9}{2|k|} \cdot \left((2|k|\pi - \frac{\pi}{2}) - \left|\ln \frac{9}{2|k|}\right|\right) > \frac{9}{2|k|} \cdot \left((2|k|\pi - \frac{\pi}{2}) - \ln \frac{2|k|}{9}\right) >$$

$$> \frac{9}{2|k|} \cdot \left((2|k|\pi - \frac{\pi}{2}) - \frac{2|k|}{9}\right) > 7\pi, \text{ для } \ |k| \geq 5.$$

Тогда $|y_k'(x)\ln y_k'(x)|^{1-\delta} > (7\pi)^{1-\delta}$ для $y_k(x) = \varepsilon_k^- \cdot (e^{ikx}/\sqrt{2\pi(k^2+1)}) \to 0$ при $|k| \to \infty$ в $W_2^1([2\pi; 4\pi], \mathbb{C})$.

Отсюда $\varphi(|y_k'(x)\ln y_k'(x)|^{1-\delta}) \leq -m < 0$ п.в. на $[2\pi;4\pi]$ для каждого фиксированного $k \in \mathbb{Z}$, и, следовательно,

$$\Phi(y_k) = \int\limits_{2\pi}^{4\pi} \varphi(|y_k' \ln y_k'|^{1-\delta})dx \leq -m\cdot 2\pi \to 0 \text{ для } \ y_k(x) \to 0 \text{ в } W_2^1([2\pi;4\pi],\mathbb{C}),$$

откуда функционал (2.2) не является непрерывным в обычном смысле.

Список цитируемых источников

1. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. — М.: Наука, 1972. — 415 с.
2. *Скрыпник И.В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. — К.: Наукова думка, 1973. — 219 с.
3. *Орлов И.В.* К-дифференцируемость и К-экстремумы // Український математичний вісник. — 2006. — Т. 3, № 1. — С. 97-115.
4. *Орлов И.В., Божонок Е.В.* Условия существования K–непрерывности и K–дифференцируемости функционала Эйлера–Лагранжа в пространстве Соболева W_2^1 // Ученые Записки ТНУ. — 2006. — Т. 19(58), № 2. — С. 121-136.
5. *Орлов И. В.* Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — в печати.
6. *Orlov I.V.* Extreme problems and Scales of the Operator Spaces // North-Holland Math. Studies. Vol.197. — Functional Analysis and its Application. — Amsterdam-Boston-...: Elsevier. — 2004. — P. 209-228.
7. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 360 с.
8. *Berezansky Yu.M., Sheftel Z.G., Us G.F.* Functional Analysis. — Vol. 1 — Birkhäuser Verlag. Basel–Boston–Berlin, 1996.

Получена 31.05.2007