Динамические системы, вып. 23 (2007), 113–122

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.9

Об устойчивости разностных уравнений с запаздыванием[1]

О. В. Анашкин*, **Й. Диблик****
* Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: anashkin@crimea.edu*
** Brno University of Technology,
Brno 61600, Czech Republic. *E-mail: diblik@feec.vutbr.cz*

Аннотация. В статье рассматривается задача об устойчивости для одного класса линейных неавтономных разностных уравнений с запаздыванием. В терминах второго метода Ляпунова формулируются достаточные условия равномерной асимптоической устойчивости и неустойчивости. Приводится пример исследования устойчивости уравнения с переменным запаздыванием, которое можно итерпретировать как модель гибридной системы — системы с переключениями. В предположении периодичности запаздывания получены зависящие от запаздывания условия устойчивости и неустойчивости.

1. Введение

В настоящее время в теории разностных уравнений сформировалось новое направление — разностные уравнения с запаздыванием [1] – [4], [9] – [15]. Уравнения этого типа являются по сути обыкновенными разностными уравнениями высокого порядка или сравнительно легко сводятся к последним [4]. Другое дело, что такое сведение в большинстве случаев не упрощает поставленную проблему. Величина запаздывания является существенным фактором, влияющим на поведение решения разностного уравнения, в частности, на его устойчивость. Переход от уравнения с запаздыванием к соответствующему уравнению без запаздывания, но более высокого порядка, предполагает фиксацию величины запаздывания. Это затрудняет получение выводов о зависимости свойств решений от величины и характера запаздывания. Не говоря уже о том, что при таком подходе трудно получить функциональную зависимость от величины запаздывания условия наличия

[1]Первый автор получил поддержку Программы развития Министерства образования Чешской республики No 256 "Systematic support of international academic staff at Faculty of Electrical Engineering and Communication, Brno University of Technology".

Второй автор был поддержан грантами 201/07/0145 of Czech Grant Agency (Prague) и MSM 00216 30503 of the Council of Czech Government.

того или иного свойства. Поэтому для разностных уравнений с запаздыванием целесообразно развивать специальные методы исследования.

Метод функций Ляпунова является эффективным методом исследования устойчивости дискретных процессов и находит широкие приложения в теории управления [5] – [8]. Большинство работ, посвященных исследованию устойчивости решений разностных уравнений с запаздыванием средствами второго метода Ляпунова, представляет собой распространение известных результатов, полученных для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа (см., например, [9] — [15]).

В настоящей статье предлагается метод исследования на устойчивость для неавтономного разностного уравнения с переменным запаздыванием, записанного в специальной форме, охватывающей все возможные типы зависимости от запаздывания. Этот способ описания дискретных процессов аналогичен принятому в теории функционально-дифференциальных уравнений и применялся рядом авторов (см. [10] – [14] и др.).

Во втором разделе статьи приведены фориулировки теорем о достаточных условиях устойчивости из [14]. В третьем разделе подробно рассматривается пример уравнения, который можно интерпретировать как модель системы с переключениями, подсистемы которой описываются разностными уравнениями с различными постоянными запаздываниями. Эволюцию такой системы с переключениями естественным образом моделирует уравнение с переменным запаздыванием. Переменное запазлывание играет роль функции переключения.

2. Достаточные условия устойчивости

Пусть $\mathbb{Z}$ есть множество всех целых чисел, $J[a,b] \subset \mathbb{Z}$ — множество целых чисел на сегменте $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Обозначим $\mathfrak{M}_p$ пространство отображений множества $J[-p,0]$ в $\mathbb{R}^n$. Такое отображение задается вещественной $n \times (p+1)$-матрицей $\varphi = (\varphi(-p), \dots, \varphi(0))$. Введем в линейном пространстве $\mathfrak{M}_p$ норму $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)| : s \in J[-p,0]\}$, где $|\cdot|$ есть некоторая норма в $\mathbb{R}^n$. Для данной последовательности $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$, $k \mapsto x(k)$, обозначим $x[k]$ элемент пространства $\mathfrak{M}_p$, определенный как $x[k](s) = x(k+s)$, $s = -p, \dots, 0$.

Рассмотрим неавтономное линейное разностное уравнение *запаздывающего типа*,

$$\Delta x(k) = \varepsilon L(k, x[k]), \quad k = \sigma, \sigma+1, \dots, \tag{2.1}$$

где $\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$, ε — малый неотрицательный параметр, функция $L : \mathbb{Z} \times \mathfrak{M}_p \times [0, \varepsilon^*] \to \mathbb{R}^n$ линейна по второму аргументу и существует постоянная $L_0 > 0$ такая, что

$$|L(k,\varphi)| \le L_0 \|\varphi\|, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi \in \mathfrak{M}_p. \tag{2.2}$$

Обозначим $x(\sigma, \varphi, \varepsilon) : k \mapsto x(k; \sigma, \varphi, \varepsilon)$ решение уравнения (2.1) с начальной функцией $\varphi \in \mathfrak{M}_p$. При наших предположениях любое решение уравнения (2.1) неограниченно продолжаемо вправо.

Пусть заданы натуральное $q \geq p$ и действительное $R \geq 1$. Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{A}_R^q = \{\varphi \in \mathfrak{M}_q : \|\varphi\| \leq R|\varphi(0)|\}.$$

В [14] показано, что траектория уравнения (3.1), попавшая в множество $\mathfrak{A}_R^q$ с $R > 1$ уже не покидает его. Это позволяет расширить класс допустимых функций Ляпунова. Исследование устойчивости разностного уравнения будем проводить путем конструирования функции Ляпунова V, определенной в пространстве $\mathfrak{M}_p$, точнее, $V : \mathbb{Z} \times \mathfrak{M}_p \times [0,1] \to \mathbb{R}$.

Для формулировки условий теорем об устойчивости введем следующие обозначения:

$\Delta v|_{(2.1)}(\sigma,\varphi,\varepsilon) = v(\sigma+1, x(\sigma,\varphi,\varepsilon)[\sigma+1],\varepsilon) - v(\sigma,\varphi,\varepsilon)$ — первая разность вперед функции v в силу уравнения (2.1);

$\mathfrak{B}_H^p$ — шар радиуса H с центром в нуле в пространстве $\mathfrak{M}_p$;

$\mathcal{K}$ — множество всех строго возрастающих непрерывных функций $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, уничтожающихся в нуле, $a(0) = 0$;

e_x — функция-константа из $\mathfrak{M}_p$, тождественно равная $x \in \mathbb{R}^n$, т.е. $e_x(s) = x$, $-p \leq s \leq 0$.

Достаточные условия равномерной устойчивости уравнения (2.1) дает следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что для некоторых $q \geq p$, $H > 0$ и $R > 1$ существуют функции $v(\sigma,\varphi,\varepsilon)$, $\Phi(\sigma,\varphi,\varepsilon)$, непрерывные по ε в точке $\varepsilon = 0$ равномерно относительно σ и φ, и такие, что для $\sigma \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathfrak{A}_R^q \cap \mathfrak{B}_H^q$ и $\varepsilon \in [0,\varepsilon^*]$ выполнены условия:*

1) *существуют функции $a, b, c \in \mathcal{K}$ такие, что*

   a) $\Delta v|_{(2.1)}(\sigma,\varphi,\varepsilon) \leq c(\varepsilon)\Phi(\sigma,\varphi,\varepsilon)$,

   b) $a(|\varphi(0)|) \leq v(\sigma,\varphi,\varepsilon) \leq b(\|\varphi\|)$;

2) *существуют постоянные $M_0 > 0$ и $d > 1$ такие, что $|\Phi(\sigma,\varphi,\varepsilon)| \leq M_0\|\varphi\|^d$ и $|\Phi(\sigma,\varphi,\varepsilon) - \Phi(\sigma,\psi,\varepsilon)| \leq M_0 r^{d-1}\|\varphi - \psi\|$ для $\varphi,\psi \in \mathfrak{A}_R^q \cap \mathfrak{B}_r^q$, $0 < r < H$;*

3) *существуют постоянные $T \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ такие, что для любых $k_0 \in \mathbb{Z}$, $\varphi(0) \in B_H \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon^*]$ и $N \geq T$*

$$\sum_{s=k_0}^{k_0+N-1} \Phi(s, e_{\varphi(0)}, \varepsilon) \leq -2\delta|\varphi(0)|^d N.$$

Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ уравнение (2.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Достаточные условия неустойчивости дает следующий аналог теоремы Ляпунова.

Теорема 2. *Предположим, что для некоторых* $q \geq p$, $H > 0$, $\sigma \in \mathbb{Z}$ *и* $R > 1$ *существуют функции* $v(k, \varphi, \varepsilon)$, $\Phi(k, \varphi, \varepsilon)$, *непрерывные по* ε *в точке* $\varepsilon = 0$ *равномерно относительно* $k \geq \sigma$ *и* $\varphi \in \mathfrak{A}_R^q \cap \mathfrak{B}_H^q$, *и такие, что для* $\sigma \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathfrak{A}_R^q \cap \mathfrak{B}_H^q$ *и* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ *выполнены условия:*

1) *существуют функции* $b, c \in \mathcal{K}$ *такие, что*

   a) $\Delta v|_{(2.1)}(k, \varphi, \varepsilon) \geq c(\varepsilon)\Phi(k, \varphi, \varepsilon)$,

   b) *для каждого* $k \geq \sigma$ *и* $\eta \in (0, H)$ *существует* $\varphi \in \mathfrak{A}_R^q \cap \mathfrak{B}_\eta^q$ *такое, что* $v(k, \varphi, 0) > 0$,

   c) $v(\sigma, \varphi, \varepsilon) \leq b(\|\varphi\|)$;

2) *функция* $\Phi(k, \varphi, \varepsilon)$ *удовлетворяет условию* 2) *теоремы* 1;

3) *существуют постоянные* $T \in \mathbb{N}$ *и* $\delta > 0$ *такие, что для любых* $k_0 \geq \sigma$, $\varphi(0) \in B_H \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon^0]$ *и* $N \geq T$

$$\sum_{s=k_0}^{k_0+N-1} \Phi(s, e_{\varphi(0)}, \varepsilon) \geq 2\delta|\varphi(0)|^d N.$$

Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *уравнение* (2.1) *неустойчиво.*

3. Разностные уравнения с переменным запаздыванием

Для числовой функции $\Phi : \mathbb{Z} \times \mathfrak{M}_p \to \mathbb{R}$, $(t, \varphi) \mapsto \Phi(t, \varphi)$ обозначим

$$\widehat{\Phi}(x) = \mathcal{M}_k\{\Phi\}(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(k, e_x)$$

среднее значение функции Φ по k на $\mathbb{Z}_+$ при постоянном значении второго аргумента, если указанный предел существует. Среднее $\widehat{\Phi}$ есть числовая функция, заданная в $\mathbb{R}^n$, или константа, если Φ зависит только от k. Нетрудно убедиться, что

$$\mathcal{M}_k\{\exp(i\nu k)\} = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu/2\pi \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим скалярное разностное уравнение

$$\Delta x(k) = \varepsilon a(k) x(k - h(k)), \tag{3.1}$$

где $a(k)$ — вещественнозначная функция, $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_+$ — неотрицательная целочисленная функция, определяющая величину запаздывания, ε — неотрицательный малый параметр.

Если среднее $\widehat{a}$ функции $a(k)$ отлично от нуля, то легко показать, что уравнение (3.1) асимптотически устойчиво при $\widehat{a} < 0$ и неустойчиво при $\widehat{a} > 0$. В частности, это следует из сформулированных выше теорем с функцией $V(\varphi) = \varphi^2(0)$.

Предположим, что $\widehat{a} = 0$. Желая получить условия, при которых уравнение (3.1) устойчиво, возьмем за основу конструкции подходящей вспомогательной функции квадратичную функцию $V_0 = x^2$. Вычисляя первую разность этой функции в силу уравнения (3.1), получим

$$\Delta V_0|_{(3.1)} = 2x(k)\Delta x(k) + (\Delta x(k))^2 = \\ = \varepsilon 2a(k)x(k)x(k-h(k)) + \varepsilon^2[a(k)x(k-h(k))]^2 = \\ = \varepsilon\Phi_0(k, x[k]) + \varepsilon^2 \ldots, \quad (3.2)$$

где $\Phi_0(k, x[k]) = 2a(k)x(k)x(k-h(k))$. Среднее $\widehat{\Phi}_0(x_0) = 2\widehat{a}x_0^2 = 0$. Чтобы уничтожить в (3.2) слагаемое $\varepsilon\Phi_0(k, x[k])$ с нулевым средним, построим возмущенную функцию

$$V_1(k, x[k]) = V_0(x(k)) + \varepsilon u(k, x[k]),$$

где $u(k, x[k]) = U(k)x(k)x(k-h(k))$, а коэффициент $U(k)$ удовлетворяет условию: $\Delta U(k) = -2a(k)$. Возьмем $U(k) = -2A(k)$, где $A(k) = \sum\limits_{s=0}^{k-1} a(k)$.

Вычисляя первую разность возмущения u, получим

$$\Delta[U(k)x(k)x(k-h(k))] = \Delta U(k)x(k)x(k-h(k)) + \\ + U(k+1)[x(k-h(k))\Delta x(k) + x(k)\Delta x(k-h(k))] + \\ + U(k+1)\Delta x(k-h(k))\Delta x(k).$$

Теперь нетрудно выписать главный член первой разности возмущенной функции в силу уравнения (3.1)

$$\Delta V_1|_{(3.1)} = \Delta V_0|_{(3.1)} + \varepsilon\, \Delta u(k, x[k])|_{(3.1)} = \\ = \varepsilon^2\big\{ \big[a^2(k) + U(k+1)a(k)\big]\, x^2(k-h(k)) + \\ + U(k+1)a(k-h(k))x(k)x(k-h(k)-h(k-h(k)))\big\} + \varepsilon^3 \ldots = \\ = \varepsilon^2\Phi_1(k, x[k]) + \varepsilon^3 \ldots \quad (3.3)$$

Для вычисления среднего

$$\widehat{\Phi}_1(x_0) = x_0^2\mathcal{M}_k\{a^2(k) + U(k+1)[a(k) + a(k-h(k))]\}$$

конкретизируем функции $a(k)$, $h(k)$ и получим некоторые оценки.

Зададим функцию $h(k)$. Предположим, что $h(k)$ — p-периодическая:

$$h(0) = h_0,\ h(1) = h_1,\ \ldots\ h(p-1) = h_{p-1},\ h(p) = h_0,\ \ldots$$

Пусть $\mathcal{N}$ — конечное множество вещественных чисел, удовлетворяющее следующим требованиям: $-\mathcal{N} = \mathcal{N}$; множества чисел $\mathcal{N}$, $p\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}+\mathcal{N}$ не содержат отличных от нуля элементов, кратных 2π. Положим

$$a(k) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu \exp(i\nu k), \quad a_\nu \in \mathbb{C}, \quad a_{-\nu} = \overline{a_\nu}, \tag{3.4}$$

где черта над символом означает комплекное сопряжение.

Найдем формулу суммы для экспоненты $\exp(i\alpha s)$, используя известный прием [16]: если $\Delta F(t) = f(t)$, то

$$f(0)+f(1)+\dots+f(k) = F(1)-F(0)+F(2)-F(1)+\dots+F(k+1)-F(k) = F(k+1)-F(0).$$

Пусть $\alpha/(2\pi) \notin \mathbb{Z}$, тогда

$$\Delta e^{i\alpha t} = e^{i\alpha(t+1)} - e^{i\alpha t} = e^{i\alpha t}\left(e^{i\alpha}-1\right)$$

или

$$\Delta \frac{e^{i\alpha t}}{e^{i\alpha}-1} = e^{i\alpha t} \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

поэтому

$$\sum_{s=0}^{k} e^{i\alpha s} = \frac{e^{i\alpha(k+1)}-1}{e^{i\alpha}-1}, \text{ если } \alpha/(2\pi) \notin \mathbb{Z}. \tag{3.5}$$

Заметим, что в наших предположениях $U(k+1)$ есть функция того же класса, что и функция $a(k)$: $U(k+1) = \sum\limits_{\nu\in\mathcal{N}} U_\nu e^{i\nu k}$. В самом деле, учитывая (3.4), (3.5) имеем

$$\sum_{s=0}^{k} a(s) = \sum_{s=0}^{k}\sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu e^{i\nu s} = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu \sum_{s=0}^{k} e^{i\nu s} =$$
$$= \sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu \frac{e^{i\nu(k+1)}-1}{e^{i\nu}-1} = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} \frac{a_\nu e^{i\nu}}{e^{i\nu}-1} e^{i\nu k} - \sum_{\nu\in\mathcal{N}} \frac{a_\nu}{e^{i\nu}-1}. \tag{3.6}$$

Следовательно,

$$U(k+1) = -2A(k+1) = -2\sum_{s=0}^{k} a(s) = -2\sum_{\nu\in\mathcal{N}} \frac{a_\nu e^{i\nu}}{e^{i\nu}-1} e^{i\nu k} + 2\sum_{\nu\in\mathcal{N}} \frac{a_\nu}{e^{i\nu}-1}. \tag{3.7}$$

Принимая во внимание свойства множества $\mathcal{N}$, получим следующую формулу для среднего произведения двух функций вида $\sum\limits_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu e^{i\nu k}$:

$$\mathcal{M}_k \left\{ \sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu e^{i\nu k} \sum_{\nu\in\mathcal{N}} b_\nu e^{i\nu k} \right\} = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu b_{-\nu}. \tag{3.8}$$

В частности,

$$\mathcal{M}_k\{a^2(k)\} = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu a_{-\nu} = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} |a_\nu|^2. \tag{3.9}$$

Из (3.7) и (3.8) находим, что

$$\mathcal{M}_k\{U(k+1)a(k)\} =$$
$$= -2\sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_{-\nu}\frac{a_\nu e^{i\nu}}{e^{i\nu}-1} = -2\sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0}|a_\nu|^2\left(\frac{e^{i\nu}}{e^{i\nu}-1}+\frac{e^{-i\nu}}{e^{-i\nu}-1}\right) =$$
$$= -2\sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0}|a_\nu|^2 = -\sum_{\nu\in\mathcal{N}}|a_\nu|^2 = -\mathcal{M}_k\{a^2(k)\}. \tag{3.10}$$

Следовательно,

$$\widehat{\Phi}_1(x_0) = x_0^2\mathcal{M}_k\{U(k+1)a(k-h(k))\}. \tag{3.11}$$

Оценим сумму значений экспоненты с периодически меняющимся показателем $\exp[i\nu(s-h(s))]$. Суммирование естественно проводить по диапазону, кратному периоду. Разобьем сумму на p групп из $k+1$ слагаемых с индексами

$$\begin{aligned} s =& 0,\ p,\ 2p,\ \ldots,\ kp;\\ s =& 1,\ 1+p,\ 1+2p,\ \ldots,\ 1+kp;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ s =& p-1,\ p-1+p,\ p-1+2p,\ \ldots,\ p-1+kp = (k+1)p-1. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\sum_{s=0}^{(k+1)p-1} e^{i\nu(s-h(s))} =$$
$$= e^{-i\nu h_0}\sum_{s=0}^{k} e^{i\nu s} + e^{-i\nu h_1}\sum_{s=0}^{k} e^{i\nu(1+ps)} + \cdots + e^{-i\nu h_{p-1}}\sum_{s=0}^{k} e^{i\nu(p-1+ps)} =$$
$$= \sum_{r=0}^{p-1} e^{-i\nu(h_r-r)}\sum_{s=0}^{k} e^{i\nu ps} = \frac{e^{i\nu p(k+1)}-1}{e^{i\nu p}-1}\sum_{r=0}^{p-1} e^{-i\nu(h_r-r)}. \tag{3.12}$$

Поэтому

$$\sum_{s=0}^{(k+1)p-1} a(s-h(s)) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu \sum_{s=0}^{(k+1)p-1} e^{i\nu(s-h(s))} = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu\frac{e^{i\nu p(k+1)}-1}{e^{i\nu p}-1}\sum_{r=0}^{p-1} e^{-i\nu(h_r-r)}.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{M}_k\{a(k-h(k))\} = 0$. Поскольку

$$U(k+1)a(k-h(k)) = 2\left[\sum_{\nu\in\mathcal{N}}\frac{a_\nu}{e^{i\nu}-1} - \sum_{\nu\in\mathcal{N}}\frac{a_\nu e^{i\nu}}{e^{i\nu}-1}e^{i\nu k}\right]\sum_{\mu\in\mathcal{N}} a_\mu e^{i\mu(k-h(k))}, \tag{3.13}$$

то

$$\mathcal{M}_k\{U(k+1)a(k-h(k))\} = \mathcal{M}_k\left\{-2\sum_{\nu\in\mathcal{N}}\frac{a_\nu e^{i\nu}}{e^{i\nu}-1}e^{i\nu k}\sum_{\mu\in\mathcal{N}}a_\mu e^{i\mu(k-h(k))}\right\}.$$

Распишем произведение

$$\sum_{\nu\in\mathcal{N}}\frac{a_\nu e^{i\nu}}{e^{i\nu}-1}e^{i\nu k}\sum_{\mu\in\mathcal{N}}a_\mu e^{i\mu(k-h(k))} = \sum_{\nu,\mu\in\mathcal{N}}\frac{a_\nu a_\mu e^{i\nu}}{e^{i\nu}-1}e^{i(\nu+\mu)k}e^{-i\mu h(k)} =$$

$$= \sum_{\nu\in\mathcal{N}}\frac{|a_\nu|^2 e^{i\nu}}{e^{i\nu}-1}e^{-i\nu h(k)} + \sum_{\substack{\nu,\mu\in\mathcal{N}\\ \nu+\mu\neq 0}}\frac{a_\nu a_\mu e^{i\nu}}{e^{i\nu}-1}e^{i(\nu+\mu)k}e^{-i\mu h(k)}.$$

В силу наших предположений относительно множества $\mathcal{N}$ каждое слагаемое во второй сумме имеет нулевое среднее. Используя схему рассуждений (3.12), находим

$$\sum_{s=0}^{kp-1}e^{-i\nu h(s)} = \sum_{s=0}^{k-1}e^{-i\nu h(sp)} + \sum_{s=0}^{k-1}e^{-i\nu h(1+ps)} + \cdots + \sum_{s=0}^{k-1}e^{-i\nu h(p-1+ps)} = k\sum_{r=0}^{p-1}e^{-i\nu h_r}.$$

Окончательно получим

$$\mathcal{M}_k\left\{U(k+1)a(k-h(k))\right\} = -2\lim_{k\to\infty}\frac{1}{kp}\sum_{s=0}^{kp-1}\sum_{\nu\in\mathcal{N}}\frac{|a_\nu|^2 e^{i\nu}}{e^{i\nu}-1}e^{-i\nu h(s)} =$$

$$= -2\sum_{\nu\in\mathcal{N}}\frac{|a_\nu|^2 e^{i\nu}}{e^{i\nu}-1}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{kp}\sum_{s=0}^{kp-1}e^{-i\nu h(s)} = -2\sum_{\nu\in\mathcal{N}}\frac{|a_\nu|^2 e^{i\nu}}{e^{i\nu}-1}\frac{1}{p}\sum_{r=0}^{p-1}e^{-i\nu h_r} =$$

$$= -\frac{2}{p}\sum_{r=0}^{p-1}\sum_{\nu\in\mathcal{N}}\frac{|a_\nu|^2 e^{i\nu(1-h_r)}}{e^{i\nu}-1} = -\frac{2}{p}\sum_{r=0}^{p-1}\sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0}|a_\nu|^2\left(\frac{e^{i\nu(1-h_r)}}{e^{i\nu}-1} + \frac{e^{-i\nu(1-h_r)}}{e^{-i\nu}-1}\right). \quad (3.14)$$

Преобразуем

$$\frac{e^{i\nu(1-h_r)}}{e^{i\nu}-1} + \frac{e^{-i\nu(1-h_r)}}{e^{-i\nu}-1} = \frac{e^{i\nu}+e^{-i\nu}-\left(e^{i\nu(1-h_r)}-e^{-i\nu(1-h_r)}\right)}{2-(e^{i\nu}+e^{-i\nu})} =$$

$$= \frac{\cos\nu h_r - \cos\nu(1-h_r)}{2\sin^2\nu/2} = -\frac{\sin\nu(h_r-1/2)}{\sin(\nu/2)}.$$

Из (3.14) с учетом (3.11) получаем следующее выражение для индекса устойчивости уравнения (3.1)

$$\frac{2}{p}\sum_{r=0}^{p-1}\sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0}|a_\nu|^2\frac{\sin\nu(h_r-1/2)}{\sin(\nu/2)} =$$

$$= \frac{2}{p}\sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0}|a_\nu|^2\frac{\sin\nu(h_0-1/2)+\cdots+\sin\nu(h_{p-1}-1/2)}{\sin(\nu/2)}. \quad (3.15)$$

На основании сформулированных выше теорем, заключаем, что уравнение (3.1) равномерно асимптотически устойчиво, если *индекс устойчивости*

$$I_S = \sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0} |a_\nu|^2 \frac{\sin\nu(h_0 - 1/2) + \cdots + \sin\nu(h_{p-1} - 1/2)}{\sin(\nu/2)} \tag{3.16}$$

уравнения отрицателен и неустойчиво, если индекс положителен (при достаточно малом значении параметра ε).

Уравнение (3.1) можно рассматривать как модель гибридной системы специального вида — системы с переключениями [17], подсистемы которой описываются разностными уравнеими вида (3.1) с постоянными запаздываниями. Если предположить, что $h(s) = h_r$, $s = o, \dots, p-1$, т.е. запаздывание в (3.1) постоянно, то из (3.15), (3.16) получим индекс устойчивости подсистемы

$$I_{S(r)} = \sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0} |a_\nu|^2 \frac{\sin\nu(h_r - 1/2)}{\sin(\nu/2)}. \tag{3.17}$$

Таким образом, мы получили предсказуемый вывод о том, что индекс устойчивости системы с переключениями рассматриваемого вида есть просто сумма индексов подсистем. И при этом не имеет значения порядок следования подсистем во времени. Это естественное следствие линейности.

Мы рассмотрели простейший случай, когда коэффициент $a(k)$ во всех подсистемах один и тот же. Метод позволяет получить условие устойчивости, если коэффициенты различные, в частности, когда r-я подсистема имеет коэффициент $a^{(r)}(k) = \sum\limits_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu^{(r)} \exp(i\nu k)$. Метод позволяет получить формулу для индекса устойчивости и в более общем случае, когда подсистемы имеют различную структуру. Разумеется, вычисления становятся существенно более громоздкими.

Список цитируемых источников

1. *Diekmann O., van Gils S. A.* Difference equations with delay // Japan J. Indust. Appl. Math. – 2000, – Vol. 17, No. 1 – P. 73–84.
2. *Lehman B., Weibel S. P.* Averaging Theory of Delay Difference Equations with Time-Varying Delays // SIAM J. Appl. Math. – 1999. – Vol. 59. – P. 1487–1506.
3. *Yu J. S.* Asymptotic Stability for a Linear Difference Equation with Variable Delay // Computers Math. Appl. – 1998. – Vol. 36, No.11–12 – P. 203–210.
4. *Anashkin O. V., Evstigneeva E. G.* Some Remarks on Averaging for Difference Equations // Functional Differential Equations. – 2000. – Vol. 7, No. 1-2. – P. 29–38.
5. *Hahn W.* Stability of Motion. – Berlin: Springer–Verlag, 1967. – 446 p.
6. *L*aSalle, J.P. Stability theory for difference equations, "Studies in Ordinary Diff. Equats"(J.K.Hale, Ed.) Vol. 14, pp.1-13, Studies in Math. Series, Math. Assn. Washington, D.C., 1977.
7. *Кунцевич В. М., Лычак М. М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

8. *Фурасов В. Д.* Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. – М.: Наука, 1982. – 192 с.
9. *Прасолов А. В.* О применении теорем типа Разумихина для разностных систем // Вестник ЛГУ. – 1991. – Вып. 4, No.22. – С. 75–76.
10. *Elaydi S., Zhang S.* Stability and Periodisity of Difference Equations with Finite Delay // Funkcialaj ekvacioj. – 1994. – Vol. 37. – P. 401-413.
11. *Zhang S., Chen M.-P.* A New Razumikhin Theorem for Delay Difference Equations // Computers and mathematics with applications. – 1998. – vol. 36. – P. 405–412.
12. *Zhang S.* Stability analysis of delay difference systems // Computers Math. Applic. — 1997., — V. 33, No 10. — P.41–52.
13. *Shu-jin W., Zhang S.* Stability of Difference Systems with Finite Delay // Chinese quarterly journal of mathematics. — 2001., — V. 16, — No 4. — P. 1–6.
14. *Анашкин О. В.* Достаточные условия устойчивости для одного класса разностных уравнений // Динамические системы. – Симферополь: Таврия, 2001. – Вып. 17. – С. 46–52.
15. *Анашкин О. В.* Функции Ляпунова в теории устойчивости нелинейных разностных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, No. 7. – С. 976–978.
16. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. – 376 с.
17. *Branicky M. S.* Stability of switched and hybrid systems // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control. Lake Buena Vista, FL, Dec. 1994. – P. 3198 – 3503.

Получена 22.11.2007