

УДК 531.38

О прецессионно-изоконических движениях гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил

Е. К. Щетинина

Донецкий национальный университет
экономики и торговли им. М.Туган-Барановского
Донецк 83050. E-mail: elena-0607@bk.ru

Аннотация. В работе дан обзор результатов, полученных в исследовании изоконических и прецессионных движений в динамике твердого тела, изучен класс прецессионно-изоконических движений гиростата и представлен анализ годографов угловой скорости для данных движений. В качестве физической модели системы твердых тел — гиростата с неподвижной точкой в поле потенциальных и гироскопических сил — использована модель, которая описывается дифференциальными уравнениями Кирхгофа-Пуассона.

Ключевые слова: гиристат, годограф вектора угловой скорости, прецессионное движение, изоконическое движение.

1. Введение

С помощью метода годографов, основанного на уравнениях П.В.Харламова [1], может быть получена полная картина движения твердого тела во многих случаях интегрируемости уравнений динамики [2, 3].

Изоконические движения твердого тела характеризуются симметричностью подвижного и неподвижного годографов вектора угловой скорости относительно касательной к ним плоскости. Изоконические движения в классической задаче о движении тяжелого твердого тела обнаружены в решениях Стеклова [4-6], Лагранжа [7], Жуковского [8], Гесса-Сретенского [9], Гриоли [10].

В задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой регулярные прецессии относительно вертикали геометрически симметричного волчка (гироскопа Лагранжа) служат классическим примером прецессионного движения. Теоретическое изучение прецессий несимметричных тел проводилось Г.Г.Аппельротом [11], Д.Гриоли [12] и другими авторами (см. обзоры [9, 13, 14]). Общий метод исследования прецессий в классической задаче и ее обобщениях впервые был предложен в работах [9, 13]. Поскольку в книге [14] не рассматриваются свойства годографов угловой скорости в случае прецессионно-изоконических движений, то представленные в статье результаты дополняют исследования [14].

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении гиростата с неподвижной точкой, описываемую уравнениями Кирхгофа-Пуассона [15]

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{a}\mathbf{x} \times B\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}\mathbf{x}, \quad (1)$$

которые допускают три первых интеграла

$$\mathbf{a}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k. \quad (2)$$

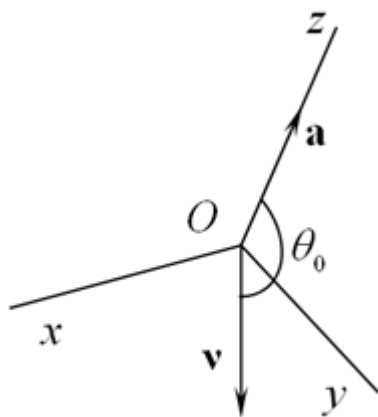


Рис. 1.

Здесь E и k — произвольные постоянные. Отметим, что $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — вектор момента количества движения; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор оси симметрии силового поля; $\mathbf{a} = (a_{ij})$ — гириационный тензор; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — вектор гириостатического момента; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гириостата; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ — постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительную производную по времени t .

Пусть $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор вертикали, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{a}\mathbf{x}$ — угловая скорость тела, $Oxyz$ — подвижная система координат (см. рис. 1). Движение гириостата называют прецессией относительно вертикали [12-14], если постоянен угол θ между вектором \mathbf{a} , неизменно связанным с гириостатом, и вектором $\boldsymbol{\nu}$, неподвижным в пространстве. Прецессионное движение (рис. 1) может быть охарактеризовано инвариантным соотношением [14]

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0, \quad a_0 = \cos \theta_0, \quad \theta_0 = \angle(\mathbf{a}, \boldsymbol{\nu}), \quad (3)$$

где \mathbf{a} — единичный вектор, неизменно связанный с телом. Вектор \mathbf{a} направляем по оси Oz : $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$.

Для угловой скорости имеем разложение [14]

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}. \quad (4)$$

Здесь $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ — скорости собственного вращения и прецессии гиростата.

В работах [9, 13, 14] показано, что компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\omega}$ таковы

$$\nu_1 = a'_0 \sin \varphi, \quad \nu_2 = a'_0 \cos \varphi, \quad \nu_3 = a_0, \quad a'_0 = \sqrt{1 - a_0^2} = \sin \theta_0, \quad (5)$$

$$\omega_1 = \dot{\psi}(t)a'_0 \sin \varphi(t), \quad \omega_2 = \dot{\psi}(t)a'_0 \cos \varphi(t), \quad \omega_3 = \dot{\psi}(t)a_0 + \dot{\varphi}(t). \quad (6)$$

Уравнения неподвижного годографа по методу П. В. Харламова [1] найдем на основании соотношений (5), (6)

$$\omega_\xi = \dot{\psi}(t) + a_0\dot{\varphi}(t), \quad \omega_\rho^2 = a_0'^2 \dot{\varphi}^2(t), \quad \left(\omega_\rho = \left| a_0' \dot{\varphi}(t) \right| \right), \quad \alpha = \psi(t) + a_0, \quad (7)$$

где без ограничения общности величину a_0 можно взять равной нулю.

Необходимым и достаточным условием существования изоконического движения гиростата является инвариантное соотношение [16]

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\nu} - \mathbf{e}) = 0, \quad (8)$$

где $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ — единичный вектор, неизменно связанный с телом. Вообще говоря, $\mathbf{e} \neq \mathbf{a}$.

3. Регулярные прецессионно-изоконические движения

Рассмотрим класс регулярных прецессионно-изоконических движений. В этом случае из (5), (6), (8) имеем $\mathbf{e} = \mathbf{a} = (0, 0, 1)$, $\dot{\psi} = \dot{\varphi} = n = \text{const}$ соотношения (5)-(7) примут вид

$$\nu_1(t) = a'_0 \sin nt, \quad \nu_2(t) = a'_0 \cos nt, \quad \nu_3(t) = a_0, \quad (9)$$

$$\omega_1(t) = a'_0 n \sin nt, \quad \omega_2(t) = a'_0 n \cos nt, \quad \omega_3 = n(a_0 + 1), \quad (10)$$

$$\omega_\xi = n(a_0 + 1), \quad \omega_\rho = \left| a'_0 n \right|, \quad \alpha = nt. \quad (11)$$

Из уравнения (10), (11) вытекает, что подвижный и неподвижный годографы конгруэнтны и представляют собой окружности. Подвижный аксоид вектора угловой скорости гиростата имеет вид, изображенный на рис. 2. Движение тела является периодическим с периодом $2\pi/n$.

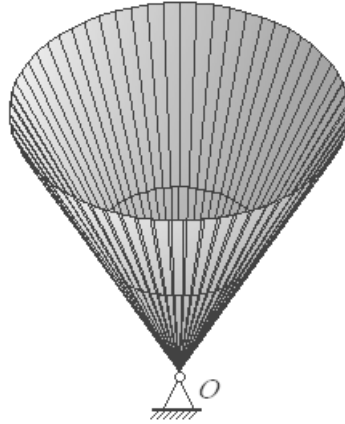


Рис. 2.

4. Полурегулярные прецессионно-изоконические движения первого типа

Рассмотрим полурегулярные прецессионно-изоконические движения первого типа: $\dot{\psi} = m$ ($\psi = mt$), $\mathbf{a} \neq \mathbf{e}$. Поскольку $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, то подвижную систему координат можно выбрать так, чтобы $\mathbf{e} = (e_1, 0, e_3)$. Тогда из соотношений (5), (6), (8) получим

$$\nu_1 = a'_0 \sin \varphi(t), \quad \nu_2 = a'_0 \cos \varphi(t), \quad \nu_3 = a_0, \quad (12)$$

$$\omega_1 = a'_0 m \sin \varphi(t), \quad \omega_2 = a'_0 m \cos \varphi(t), \quad \omega_3 = m(a_0 + b_0 + c_0 \sin \varphi(t)), \quad (13)$$

$$\dot{\varphi}(t) = m(b_0 + c_0 \sin \varphi(t)), \quad (14)$$

где $b_0 = (a_0 e_3 - 1)/(a_0 - e_3)$, $c_0 = a'_0 e_1/(a_0 - e_3)$; очевидно, $b_0^2 = 1 + c_0^2$. Положим в формуле (14) $m > 0$, $b_0 > 0$, $c_0 > 0$, тогда из (14) получим

$$\varphi(t) = 2 \arctan \left(\frac{b_0 u(t)}{1 - c_0 u(t)} \right), \quad (15)$$

где $u(t) = \tan(mt/2)$. Причем $\sin \varphi(t) = b_0(\sin mt + c_0 \cos mt - c_0)/v(t)$, $\cos \varphi(t) = (\cos mt - c_0 \sin mt)/v(t)$. Здесь $v(t) = b_0^2 - c_0(\sin mt + c_0 \cos mt) > 0$.

Подвижный годограф представляет собой плоскую кривую, полученную в результате пересечения плоскости $c_0 \omega_1 - a'_0(\omega_3 - a_0 m - b_0 m) = 0$ и цилиндра $\omega_1^2 + \omega_2^2 = a_0'^2 m^2$ (рис. 3.б). Вид подвижного аксоида вектора угловой скорости представлен на рис. 3.а.

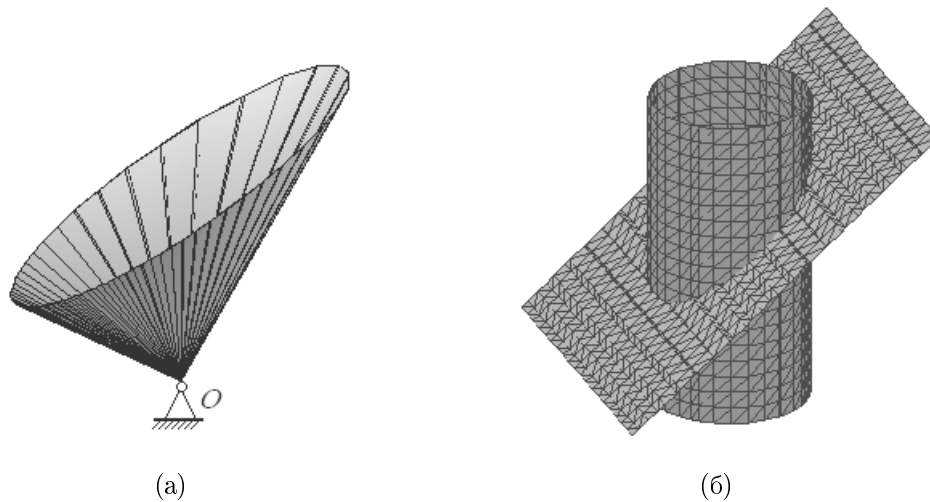


Рис. 3. ($a'_0 = 0.5$ $m = 3$ $c_0 = 0.5$)

Уравнения неподвижного годографа в силу (7), (15) имеют вид

$$\omega_\zeta = m(a_0 b_0 + a_0 c_0 \sin \varphi(t) + 1), \quad \omega_\rho = \frac{|a'_0 b_0 m|}{v(t)}, \quad \alpha = mt + \alpha_0. \quad (16)$$

Соотношения (12)-(16) легко привести к безразмерным переменным, для этого достаточно положить $m = 1$.

Описываемое движение является периодическим с периодом $T = 2\pi/m$ (при $m = 1$ $T = 2\pi$). Подвижный и неподвижный годографы представляют собой эллипсы.

5. Полурегулярные прецессионно-изоконические движения второго типа

Для полурегулярных прецессионно-изоконических движений второго типа имеем [14]

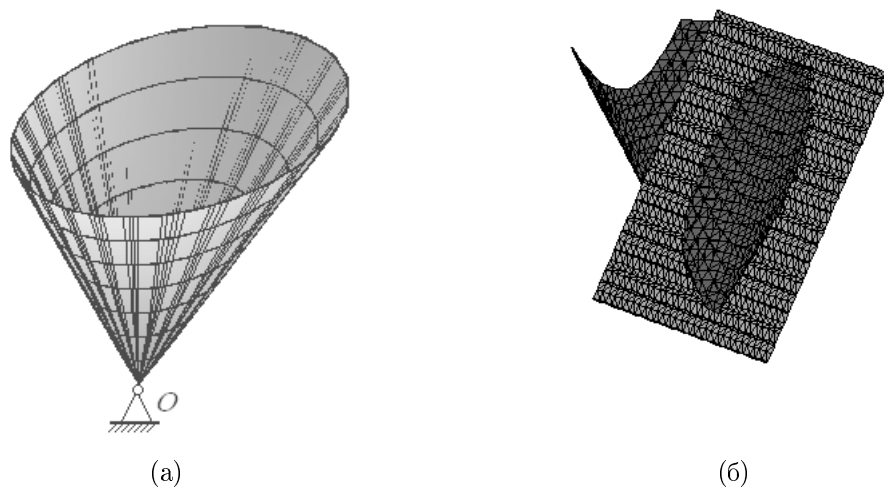
$$\dot{\varphi} = n = \text{const} \quad (\varphi = nt), \quad \dot{\psi} = \frac{n}{b_0 + c_0 \sin nt}, \quad (17)$$

$$\psi = 2 \arctan \frac{w(t)}{b_0 + c_0 w(t)}, \quad \psi(0) = 0, \quad w(t) = \tan \frac{nt}{2}, \quad (b_0^2 = 1 + c_0^2). \quad (18)$$

Уравнения подвижного годографа имеют вид

$$\omega_1 = \frac{a'_0 n \sin nt}{b_0 + c_0 \sin nt}, \quad \omega_2 = \frac{a'_0 n \cos nt}{b_0 + c_0 \sin nt}, \quad \omega_3 = n \left(1 + \frac{a_0}{b_0 + c_0 \sin nt} \right). \quad (19)$$

В случае полурегулярной прецессии второго типа вид подвижного аксоида вектора угловой скорости представлен на рис. 4.а. Подвижный годограф представляет собой плоскую кривую, полученную в результате пересечения поверхностей (рис. 4.б)

Рис. 4. ($a_0 = 0.875$ $n = 25$ $c_0 = 0.25$)

$$a_0 c_0 \omega_1 + a_0' b_0 \omega_3 = a_0' n (a_0 + b_0), \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 - \frac{a_0'^2 n^2}{a_0^2} (\omega_3 - n)^2 = 0. \quad (20)$$

Неподвижный годограф также является плоской кривой, так как он описывается уравнениями

$$\omega_\zeta = n \left(a_0 + \frac{1}{b_0 + c_0 \sin nt} \right), \quad \omega_\rho = |a_0' n|, \quad \alpha(t) = \psi(t) + \alpha_0, \quad (21)$$

где $\psi(t)$ имеет вид из (18).

Если ввести с помощью величины n безразмерные переменные, то можно полагать $b_0 > 0$, $c_0 > 0$. Чтобы избежать особенностей в применении формулы для $\alpha(t)$ из (21), ее можно преобразовать к виду

$$\alpha = \arcsin \frac{c_0 + b_0 \sin nt - c_0 \cos nt}{b_0(b_0 + c_0 \sin nt)}. \quad (22)$$

К безразмерному времени в соотношениях (18), (19), (21), (22) можно перейти, положив $n = 1$. Тогда $\alpha = \alpha(t)$ является периодической функцией с периодом $T = 2\pi$.

6. Прецессионно-изоконические движения общего вида: первый класс

В [16] показано, что прецессионные движения общего вида могут обладать условием изоконичности только в двух случаях: 1) $\mathbf{a} \neq \mathbf{e}$; 2) $\psi(t) = \varphi(t)$. Рассмотрим первый класс прецессионно-изоконических движений общего вида, для

которого $\mathbf{a} \neq \mathbf{e}$. Пусть выполняются условия [14]

$$\dot{\varphi} = p_0 + q_0 \sin \varphi, \quad \dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{b_0 + c_0 \sin \varphi}. \quad (23)$$

В случае (23) параметры b_0 и c_0 принимают прежние значения и $b_0^2 = 1 + c_0^2$. Зависимость $\psi(\varphi)$ найдем из второй формулы системы (23)

$$\psi = 2 \arctan \left[\tan \frac{\varphi}{2} \left(b_0 + c_0 \tan \frac{\varphi}{2} \right)^{-1} \right]. \quad (24)$$

Из первого соотношения системы (23) имеем равенство

$$t - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{p_0 + q_0 \sin \varphi}. \quad (25)$$

При обращении интеграла (25) можно найти зависимость $\varphi = \varphi(t)$. Здесь значения p_0, q_0 не обязательно связаны условием $p_0^2 = 1 + q_0^2$. Поэтому при интегрировании (25) возможны три варианта [14].

Вместо формулы (24) целесообразно использовать соотношение

$$\psi = \arcsin \frac{b_0 \sin \varphi + c_0 - c_0 \sin \varphi}{b_0(b_0 + c_0 \sin \varphi)}. \quad (26)$$

Подвижный годограф задается уравнениями

$$\omega_1 = \frac{a'_0 \sin \varphi(t)}{\sigma(t)} \mu(t), \quad \omega_2 = \frac{a'_0 \cos \varphi(t)}{\sigma(t)} \mu(t), \quad \omega_3 = \left(1 + \frac{a_0}{\sigma(t)} \right) \mu(t). \quad (27)$$

В (27) введены обозначения $\sigma(t) = b_0 + c_0 \sin \varphi(t)$, $\mu(t) = p_0 + q_0 \sin \varphi(t)$.

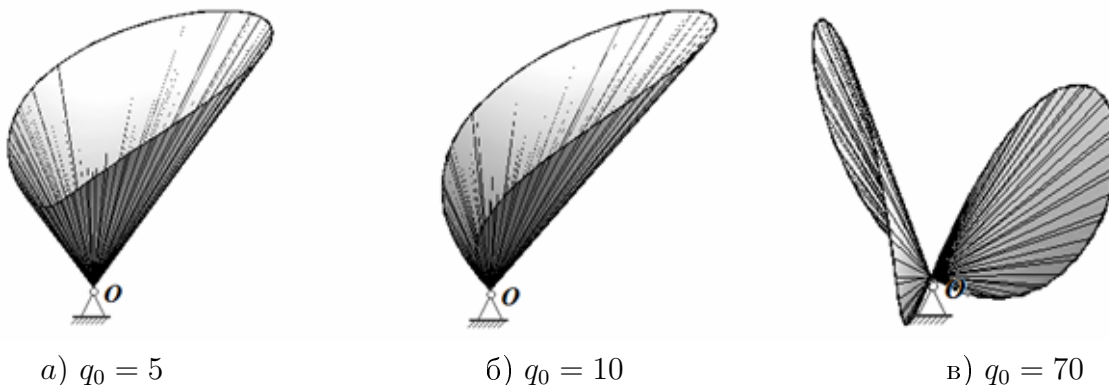


Рис.5 $(a'_0 = 0.295 \ c_0 = 0.01 \ p_0 = 10)$

На рис. 5 представлены характерные виды подвижного аксида вектора угловой скорости в зависимости от изменения параметра q_0 .

Неподвижный годограф характеризуется соотношениями

$$\omega_\zeta = \left(a_0 + \frac{1}{\sigma(t)} \right) \mu(t), \quad \omega_\rho = |a'_0 \mu(t)|, \quad \alpha = \arcsin \frac{b_0 \sin \varphi(t) + c_0 - c_0 \cos \varphi(t)}{b_0 \sigma(t)}, \quad (28)$$

где $\varphi(t)$ определяется из формулы (25). Например, при $p_0^2 = 1 + q_0^2$ (p_0, q_0 не пропорциональны b_0, c_0), имеем

$$\sin \varphi(t) = \frac{p_0(\sin t + q_0 \cos t - q_0)}{p_0^2 - q_0(\sin t + q_0 \cos t)}, \quad \cos \varphi(t) = \frac{\cos t - q_0 \sin t}{p_0^2 - q_0(\sin t + q_0 \cos t)}.$$

Эти выражения удобно использовать в формулах (28).

Остановимся на нахождении зависимости $\varphi(t)$ из интеграла (25). Начальное значение при $t = 0$ переменной φ возьмем равным φ_0 . Пусть $p_0 > 0$, $p_0^2 - q_0^2 > 0$, тогда

$$\tan \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{(p_0 + q_0)\delta(t) + r_0 \tan \left(\frac{\varphi_0}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}{r_0 - (p_0 - q_0)\delta(t) \tan \left(\frac{\varphi_0}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}, \quad (29)$$

где $r_0 = \sqrt{p_0^2 - q_0^2}$, $\delta(t) = \tan \frac{r_0}{2} t$. Если принять $\varphi_0 = 0$, то из (25) получим формулу

$$\sin \varphi = \frac{p_0(q_0 \cos r_0 t + r_0 \sin r_0 t - q_0)}{p_0^2 - q_0(q_0 \cos r_0 t + r_0 \sin r_0 t)}.$$

Тогда

$$p_0 + q_0 \sin \varphi = \frac{p_0 r_0^2}{p_0^2 - q_0(q_0 \cos r_0 t + r_0 \sin r_0 t)}, \quad \cos \varphi = \frac{r_0(r_0 \cos r_0 t - q_0 \sin r_0 t)}{p_0^2 - q_0(q_0 \cos r_0 t + r_0 \sin r_0 t)}.$$

Эти формулы можно использовать в соотношениях (28).

Рассмотрим случай $p_0 < q_0$, $p_0 > 0$. Если при $t = 0$ $\varphi = 0$, то из (25) имеем

$$\tan \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 - \frac{r_0}{q_0 - p_0} \operatorname{th} \frac{r_0}{2} t}{\frac{q_0 - p_0}{r_0} \operatorname{th} \frac{r_0}{2} t - 1}. \quad (30)$$

Здесь через r_0 обозначено $r_0 = \sqrt{q_0^2 - p_0^2}$.

Для случая $q_0 = p_0$ имеем

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{p_0 t}{2 - p_0 t}. \quad (31)$$

Из соотношений (30), (31) следует, что при $t \rightarrow \infty$ $\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$.

7. Прецессионно-изоконические движения общего вида: второй класс

Рассмотрим прецессионно-изоконические движения второго класса, для этого положим $\psi = \dot{\varphi} = d_0 + f_0 \sin \varphi = g(\varphi)$, т.е. $\psi(t) = \varphi(t)$. Подвижный годограф при этом определяется соотношениями

$$\omega_1 = a'_0 g(\varphi) \sin \varphi, \quad \omega_2 = a'_0 g(\varphi) \cos \varphi, \quad \omega_3 = (1 + a_0)g(\varphi). \quad (32)$$

Для изучаемого движения зависимость $\varphi(t)$ может быть трех видов [14]. Подвижный годограф (32) вектора угловой скорости гиростата является линией пересечения конуса $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{a_0'^2}{(1+a_0)^2} \omega_3^2$ и поверхности, $\omega_1 = \frac{a'_0 \omega_3}{(1+a_0)f_0} \left[\frac{\omega_3}{1+a_0} - d_0 \right]$.

Для прецессионно-изоконического движения второго класса характерные виды подвижного аксоида вектора угловой скорости в зависимости от значений параметра f_0 представлены на рис. 6.

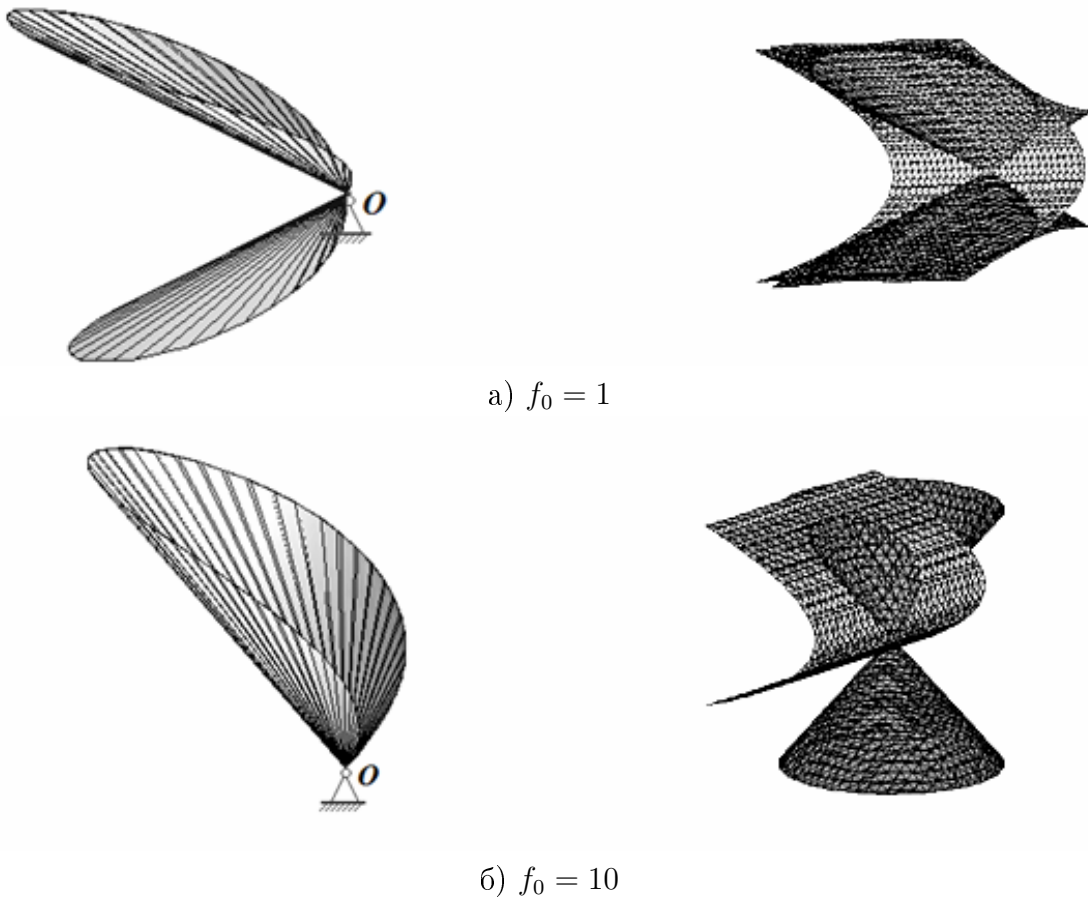


Рис.6 ($a'_0 = 0.17$ $d_0 = 1$)

Неподвижный годограф вектора угловой скорости для этого типа движений задается равенствами

$$\omega_\zeta = (1 + a_0)g(\varphi), \quad \omega_\rho = |a_0'g(\varphi)|, \quad \alpha = \psi(t) + c = \varphi(t) + c.$$

Таким образом, исследованы свойства подвижного и неподвижного годографов вектора угловой скорости гиростата в случае прецессионно-изоконических движений определенных типов. Сделан вывод о том, что в случае прецессионно-изоконических движений следующих видов — регулярная прецессия, полурегулярная прецессия первого типа, полурегулярная прецессия второго типа — годографы вектора угловой скорости представляют собой плоские линии. В случае прецессионно-изоконических движений общего вида годографы являются пространственными кривыми.

Список цитируемых источников

1. Харламов П. В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. — 1964. — Т. 28, вып. 3. — С. 502-507.
2. Горр Г. В. О регулярной прецессии относительно вертикали в одной задаче динамики твердого тела / Г. В. Горр, Н. В. Курганский // Механика твердого тела. — 1987. — Вып. 19. — С. 16-20.
3. Харламов П. В. Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела / П. В. Харламов // Механика твердого тела. — 2000. — Вып. 30. — С. 1-13.
4. Стеклов В. А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку / В. А. Стеклов // Тр. отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. — 1899. — Т. 10, № 1. — С. 1-3.
5. Fabbri R. Sopra una soluzione particolare delle equazioni del moto di un solido pesante ad un punto fisso / R. Fabbri // Atti. Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. e Nat. — 1934. — 19, № 6. — P. 407-415, 495-502, 872-873.
6. Харламова Е. И. Исследование решения В. А. Стеклова уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / Е. И. Харламова, Г. В. Мозалевская // Мат. физика. — 1968. — Вып. 5. — С. 194-202.
7. Харламов П. В. Разделяющие движения гироскопа Лагранжа / П. В. Харламов // Механика твердого тела. — 1979. — Вып. 11. — С. 17-22.
8. Вархалев Ю. П. К вопросу о классификации движений гиростата Жуковского / Ю. П. Вархалев, Г. В. Горр // Прикл. механика. — 1984. — Т. 20, №8. — С. 104-111.
9. Горр Г. В. Методы исследования движений твердого тела и их приложение в классификации движений // Механика твердого тела. — 1982. — Вып. 14. — С. 54-74.
10. Харламова Е. И. Об одном движении тела, имеющего неподвижную точку / Е. И. Харламова // Механика твердого тела. — 1970. — Вып. 2. — С. 35-37.
11. Аппельрот Г. Г. Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки / Г. Г. Аппельрот // Уч. зап. Моск. ун-та. отд. физ.-мат. наук. — 1894. — Т. 2, вып. 11. — С.1-112.

12. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico / G. Grioli // Ann. di Matem. pura ed Applic. — 1947. — S. 4. — V. 24, f. 3-4. — P. 271-281.
13. *Горр Г. В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел / Г. В. Горр // Прикл. математика и механика. — 2003. — Т. 67, вып. 4. — С. 573-587.
14. *Горр Г. В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел / Г. В. Горр, А. В. Мазнев, Е. К. Щетинина. — Донецк: ДонНУ, 2009. — 222 с.
15. *Kirchhoff G. R.* Über die Bewegung eines Rotationkörpers in einer Flüssigkeit / G. R. Kirchhoff // J. für die reine und angew. Math. — 1870. — Bd. 71. — S. 237-262.
16. *Горр Г. В.* Изоконические движения в динамике твердого тела с неподвижной точкой / Горр Г. В., Саркисянц Е. В., Узбек Е. К. — Донецк: Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, 2001. — 30 с. — (Препринт / НАН Украины, Ин-т прикл. математики и механики; 03.01).

Получена 5.10.2010