Динамические системы, вып. 28 (2010), 113–122

УДК 519.642

Метод неподвижной точки для регуляризации Лаврентьева при решении нелинейных некорректных задач

Е. В. Семенова

Институт математики НАН Укранны,
Киев 01601. *E-mail: lebedeva@ipnet.kiev.ua*

Аннотация. В статье исследуется подход к решению нелинейных некорректных задач с монотонным оператором, состоящий в комбинации метода Лаврентьева, метода неподвижной точки и принципа равновесия для поиска параметра регуляризации. Доказана оптимальность указанного подхода без строгого предположения о гладкостных свойствах оператора. Исследованы свойства метода неподвижной точки в условиях поставленной задачи.

Ключевые слова: регуляризация Лаврентьева, метод неподвижной точки, принцип равновесия, монотонный оператор.

1. Постановка задачи

В настоящее время в теории некорректных задач одним из наиболее актуальных направлений является обоснование методов решения нелинейных некорректных задач на основе теории линейных задач, которая, как известно, развита в достаточной мере. Так, метод Тихонова уже считается стандартным как при регуляризации линейных, так и нелинейных задач (см., например, [4], [6]). Но в нелинейном случае этот метод приводит к нормальному уравнению, где задействована производная по Фреше заданного оператора, найти которую на практике может быть достаточно сложно. Естественным образом возникает необходимость рассматривать ситуации, в которых можно упростить вычислительный алгоритм. Известно, что в случае нелинейного монотонного оператора метод Тихонова сводится к методу Лаврентьева, и приближенное решение может быть найдено без использования производной по Фреше. В частности, применение регуляризации Лаврентьева к нелинейным уравнениям с монотонным оператором исследовалась в работе [7], где была показана оптимальность метода только в случае истокопредставимости точного решения. Однако, полученное регуляризованное уравнение остается нелинейным, и на практике могут возникнуть трудности при его разрешении. Поэтому зачастую мы имеем дело лишь с последовательностью аппроксимаций к регуляризованному решению, из которой выбирается приближенное решение с заданной точностью. Здесь необходимо отметить, что при малых значениях параметра регуляризации повышается неустойчивость решаемого уравнения, поэтому задача нахождения таких аппроксимаций нуждается в дополнительном исследовании.

В настоящей работе предлагается решать уравнение, полученное после применения регуляризации Лаврентьева, методом неподвижной точки, что становится возможным благодаря строгой монотонности регуляризованного оператора, при этом параметр регуляризации будем выбирать согласно принципу равновесия [5]. Главное преимущества принципа равновесия по сравнению с принципом невязки состоит в том, что он может быть применим при решении более широкого класса задач и в отличие от правила монотонной ошибки (monotone error rule) [8] имеет простую численную реализацию. Похожий подход к решению исследуемой задачи был предложен ранее в [2], его отличие от предлагаемого в данной статье подхода состоит в том, что в [2] для выбора параметра использовался принцип невязки Морозова. Кроме того, в [2] была установлена только сходимость полученных аппроксимаций к решению с минимальной нормой. Ниже будет установлена оптимальность построенного подхода без строгого условия на гладкость решения, которое заменяется более слабым условием на сходимость последовательности регуляризованных решений к точному.

В гильбертовом пространстве X со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$ рассмотрим нелинейное уравнение

$$F(x) = f, \tag{1.1}$$

где оператор $F : D(F) \subset X \to X$ имеет локально равномерно ограниченную производную по Фреше $F'(\cdot)$ в области $D(F)$. Обозначим через $x = x^\dagger$ решение с минимальной нормой уравнения (1.1). Естественно предположить, что (1.1) — некорректно поставленная задача.

Пусть F является монотонным оператором, а именно, для $x, y \in D(F)$ имеет место неравенство

$$(F(x) - F(y), x - y) \geq 0. \tag{1.2}$$

Будем считать, что выполняется условие Липшица, т.е. существует такая константа R, что для всех $x, y \in D(F)$

$$||F(x) - F(y)|| \leq R||x - y||. \tag{1.3}$$

Отметим, что условие (1.3) может быть упрощено за счет сужения области, на которой оно выполняется. Например, можно предположить, что (1.3) справедливо для всех x, y из шара с центром в точке $x^\dagger \in X$. В статье для простоты изложения предполагается, что условие (1.3) выполнено для всех $x, y \in D(F)$.

Пусть вместо точной правой части f известно лишь ее возмущение $f_\delta \in X$, такое что

$$\|f - f_\delta\| \leq \delta,$$

где δ – известный уровень погрешности.

Нашей целью является разработать подход к численному решению описанного множества уравнений (1.1), который легко реализуется на практике и не требует вычисления производной по Фреше. В случае монотонности оператора F наиболее простым методом решения (1.1) является метод Лаврентьева, состоящий в нахождении аппроксимаций x_α^δ в виде

$$x_\alpha^\delta = R_\alpha(f_\delta + \alpha x^0), \tag{1.4}$$

где $R_\alpha = (F + \alpha I)^{-1}$, параметр $\alpha > 0$ является параметром регуляризации, а x^0 – известное начальное приближение. Поставим задачу доказать оптимальность по порядку построенного метода при $\delta \neq 0$, если выполняется условие равномерной сходимости метода (1.4) к решению $x^\dagger$ при $\delta = 0$. Отметим, что мы не требуем знание гладкостных характеристик точного решения, что в значительной мере расширяет класс задач, которые могут быть решены в рамках предложенного подхода.

Теперь уточним аппроксимационные свойства метода Лаврентьева. Сначала рассмотрим случай $\delta = 0$. Обозначим через x_α регуляризованное решение вида (1.4). Из общей теории регуляризации известно, что последовательность операторов R_α при $\alpha \to 0$ поточечно сходится к F^{-1}. При определенном выборе параметра регуляризации это свойство является достаточным для сходимости аппроксимаций x_α^δ к $x^\dagger$ при $\delta \to 0$, но не является достаточным для сходимости с оптимальной скоростью, поэтому нам необходимо ввести более строгое условие на сходимость. Исходя из приведенных выше рассуждений будем считать, что для $x^\dagger$ найдется такая возрастающая функция $\phi(\alpha) := \phi(\alpha, F, f)$, что $0 = \phi(0) \leq \phi(\alpha) \leq 1$ и

$$\|x_\alpha - x^\dagger\| \leq \phi(\alpha). \tag{1.5}$$

Замечание 1. Отметим, что условие (1.5) будет выполняться, если известно, что точное решение истокопредставимо. Например, в [7] показано, что если $x^\dagger - x^0 = F'(x^\dagger)^\mu v$, $v \in X, \mu = 1$ и для $F'(\cdot)$ выполняется условие Липшица на $D(F)$, тогда $\|x_\alpha - x^\dagger\| \leq c\alpha$. А в случае $\mu \in (0,1)$ и при более строгих предположениях на $F'(\cdot)$ (более подробно об этом см.[7, предположение 3]) справедлива оценка $\|x_\alpha - x^\dagger\| \leq c\alpha^\mu$. В более общем случае, а именно, когда $x^\dagger - x^0 = \phi(F'(x^\dagger))v$, $v \in X$, где $\phi(\lambda)$ является некоторой индексной функцией, также можно показать, что $\|x_\alpha - x^\dagger\| \leq c\phi(\alpha)$. Доказательство этого факта проводится аналогично доказательству соответствующих результатов из [4].

Очевидно, что погрешность метода регуляризации (1.4) складывается из двух слагаемых

$$\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\| \leq \|x^\dagger - x_\alpha\| + \|x_\alpha - x_\alpha^\delta\|,$$

где первое слагаемое уже оценено (см. (1.5)), а второе слагаемое представляет собой оценку устойчивости оператора R_α, которая будет найдена ниже. В силу того факта, что $(F + \alpha I)$ строго монотонный, а обратный к нему удовлетворяет условиям Липшица с константой $1/\alpha$ (доказательство этого факта следует из [3, с.97,100]), второе слагаемое из приведенного выше неравенства может быть оценено сверху величиной δ/α. Однако эта оценка дана для общего класса операторов и в каждом конкретном случае может быть существенно уменьшена. Поэтому мы предположим существование такого $c_1 = c_1(F)$, что

$$\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\| \le c_1 \frac{\delta}{\alpha}.$$

Однако, уравнение (1.4) остается нелинейным, поэтому для его численного решения необходимо задействовать известные численные методы решения нелинейных уравнений. В рамках этой статьи будет рассмотрен и исследован метод неподвижной точки (МНТ), который заключается в построении последовательности итераций по правилу

$$x_{\alpha,k+1}^\delta = G_\alpha(x_{\alpha,k}^\delta), \tag{1.6}$$

где $G_\alpha(x) = (I - \gamma(F + \alpha I))(x) + \alpha\gamma x^0 + \gamma f_\delta$, а $\gamma > 0$ – произвольный параметр метода .

Обозначим через $x^i := x_{\alpha_i,k}^\delta$, т.е. под x^i будем понимать приближенное решение (1.4) при $\alpha = \alpha_i$, полученное в результате остановки итерационного процесса (1.6) после k шагов.

Предположим, что оператор G_α является сжимающим с коэффициентом сжатия $\beta < 1$ (более подробно об этом см. параграф 3.1), тогда процесс (1.6) будет сходящимся. Кроме того, предположим, что для погрешности МНТ выполняется

$$\|x_\alpha^\delta - x^i\| \le \frac{c_z \delta}{\alpha}, \tag{1.7}$$

где c_z — некоторая константа.

Таким образом, общая оценка погрешности построенного подхода следующая:

$$\|x^i - x^\dagger\| \le \phi(\alpha) + c_z^1 \frac{\delta}{\alpha},$$

где $c_z^1 = c_1 + c_z$. Очевидно, что наименьшее значение оценки погрешности метода (1.6) составляет величину

$$\|x^i - x^\dagger\| \le c \inf_\alpha \{\phi(\alpha) + c_z^1 \frac{\delta}{\alpha}\}$$

и достигается в точке $\alpha_{opt} = \phi(\delta)^{-1} c_z^1 \delta$, которая определяется пересечением возрастающей функции $\phi(\lambda)$ и убывающей λ/α. К сожалению, такой априорный выбор параметра не всегда осуществим на практике ввиду того, что точный вид функции $\phi(\lambda)$ может быть не известен точно. Тогда для эффективного решения уравнения (1.6) необходимо в процессе вычислений (a posteriori) согласовать уровень погрешности δ и значение параметра регуляризации α.

В работе Б. Бакушинского и А. Смирновой [2] был рассмотрен подобный подход к решению нелинейных уравнений с монотонным оператором, где для выбора параметра α использовался широко известный принцип невязки Морозова. А в статье У. Таутенхана [7], где нелинейное уравнение с монотонным оператором решалось методом Лаврентьева в случае истокопредставимого решения, предлагалось выбирать α как решение нелинейного уравнения

$$\|\alpha(F'(x_\alpha^\delta)+\alpha I)^{-1}[F(x_\alpha^\delta)-y^\delta]\| = C\delta.$$

В настоящей статье для выбора параметра α предлагается использовать принцип равновесия, который был обоснован для решения некорректных задач в работе [5]. Обозначим через D_M множество возможных значений параметра α следующего вида

$$D_M = \{\alpha_i = \alpha_0 q^i, i = 0, 1, ..., M\}, \quad q > 1.$$

Тогда согласно принципу равновесия выбор номера i_+ параметра α осуществляется по формуле

$$i_+ = \max\{i : \alpha_i \in D_M^+\}, \tag{1.8}$$

где

$$D_M^+ = \{\alpha_i \in D_M : \|x^i - x^j\| \le \frac{4c_z^1\delta}{\alpha_j}, j = 0, 1, ..., i-1\}.$$

Таким образом в данной работе предлагается находить приближенное решение (1.1) в рамках итерационного процесса (1.6) и принципа равновесия (1.8) для выбора параметра регуляризации. Нашей целью является доказать оптимальность указанного подхода и найти количество итераций вида (1.6) необходимых для достижения заданной точности.

2. Теорема об оптимальности

В теореме 1 установлено, что если связать α и δ согласно принципу равновесия, то итерационный метод (1.6) является оптимальным по порядку, т.е. справедлива оценка (2.1).

Теорема 1. *Пусть оператор F уравнения (1.1) является монотонным и выполнено условие (1.3). Будем считать, что решение $x^\dagger$ такое, что выполняется (1.5). Тогда при выборе индекса i_+ согласно (1.8) метод (1.6) является оптимальным по порядку, т.е. справедлива оценка*

$$\|x^\dagger - x^{i_+}\| \le \frac{c\delta}{\alpha_{opt}} = c\phi(\alpha_{opt}), \tag{2.1}$$

где $\alpha_{opt} = \phi(\delta)^{-1}c_z^1\delta$, а константа c не зависит от δ.

Доказательство. Доказательство этой теоремы опирается на схему рассуждений использованную при установлении справедливости теоремы 3.1 [4].

Итак, введем индекс

$$i_\star = \max\{i : \alpha_i \in D_M^\star\}, \tag{2.2}$$

где

$$D_M^\star = \{\alpha_i \in D_M : \phi(\alpha_i) \le \frac{{}_1\delta}{\alpha_i} + \frac{c_z\delta}{\alpha_i}\}.$$

Тогда для всех индексов $j \le i_\star$

$$\begin{aligned} \|x^j - x^{i_\star}\| &\le \|x^\dagger - x^j\| + \|x^\dagger - x^{i_\star}\| \le \\ &\le \phi(\alpha_j) + \frac{c_z^1\delta}{\alpha_j} + \phi(\alpha_{i_\star}) + \frac{c_z^1\delta}{\alpha_{i_\star}} \le \\ &\le \phi(\alpha_{i_\star}) + \frac{c_z^1\delta}{\alpha_j} + \phi(\alpha_{i_\star}) + \frac{\delta c_z^1}{\alpha_j} \le \\ &\le 2\phi(\alpha_{i_\star}) + \frac{2c_z^1\delta}{\alpha_j} \le \frac{2\delta}{\alpha_j} + \frac{2c_z\delta}{\alpha_j} + \frac{2c_z^1\delta}{\alpha_j} \le \frac{4c_z^1\delta}{\alpha_j}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом определения (1.8) получим, что

$$i_\star \le i_+. \tag{2.3}$$

С учетом (1.5) и (2.3) имеем

$$\|x^\dagger - x^{i_+}\| \le \|x^\dagger - x^{i_\star}\| + \|x^{i_\star} - x^{i_+}\| \le \frac{2c_z^1\delta}{\alpha_{i_\star}} + \frac{4c_z^1\delta}{\alpha_{i_\star}} = \frac{6c_z^1\delta}{\alpha_{i_\star}}. \tag{2.4}$$

Согласно определению (2.2) для $\alpha_{i_\star}$ и с учетом того факта, что $\delta = c_z^1\phi(\alpha_{opt})\alpha_{opt}$, получим

$$\begin{aligned} \phi(q\alpha_{i_\star})q\alpha_{i_\star} &> c_z^1\delta = \\ = c_z^1\phi(\alpha_{opt})\alpha_{opt} &> \phi(\alpha_{opt})\alpha_{opt}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из (2.5) в силу монотонности функции ϕ следует, что

$$\alpha_{opt} < q\alpha_{i_\star}. \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.4), получим

$$\|x^\dagger - x^{i_+}\| \le \frac{6c_z^1\delta}{\alpha_{i_\star}} = \frac{6qc_z^1\delta}{q\alpha_{i_\star}} < \frac{6qc_z^1\delta}{\alpha_{opt}}, \tag{2.7}$$

что и требовалось доказать. □

3. Обсуждение

3.1. Метод неподвижной точки

В следующем утверждении будет установлено, при каких значениях γ отображение G_α (1.6) является сжимающим, а также будет найдена скорость сходимости МНТ.

Отметим, что оператор $F + \alpha I$, действующий в действительном гильбертовом пространстве X, является строго монотонным, т.е для всех $\alpha > 0$ выполняется соотношение

$$((F + \alpha I)(x) - (F + \alpha I)(y), x - y) \ge \alpha |x - y|^2, \quad x, y \in X. \tag{3.1}$$

Теорема 2. *Пусть оператор $F + \alpha I$ является строго монотонным и непрерывным по Липшицу. Кроме того, предположим $\gamma\alpha < 1$. Тогда оператор G_α будет сжимающим с константой $\beta = \sqrt{(1-\alpha\gamma)^2 + \gamma^2 R^2}$ при $\gamma < \frac{2\alpha}{\alpha^2+R^2}$, и справедлива оценка*

$$\|x^\delta_{\alpha_i} - x^i\| \le \frac{\beta^k ||x_1 - x_0||}{1-\beta}. \tag{3.2}$$

Минимальное значение (3.2) достигается при $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha^2+R^2}$ и $\beta = \frac{R}{\sqrt{\alpha^2+R^2}}$.

Доказательство. Для доказательства этого утверждения распишем выражение $||G_\alpha(x) - G_\alpha(y)||^2$ для произвольных $x, y \in D(G_\alpha)$ следующим образом:

$$\|G_\alpha(x) - G_\alpha(y)\|^2 = \|(1-\alpha\gamma)(x-y) - \gamma(F(x) - F(y))\|^2 =$$
$$= ((1-\alpha\gamma)(x-y) - \gamma(F(x) - F(y)), (1-\alpha\gamma)(x-y) - \gamma(F(x) - F(y))) =$$
$$= (1-\alpha\gamma)^2\|x-y\|^2 - 2(1-\alpha\gamma)\gamma(F(x) - F(y), x-y) + \gamma^2\|F(x) - F(y)\|^2. \tag{3.3}$$

В том случае, если $\gamma < 1/\alpha$, второе слагаемое в (3.3) является неположительным в силу монотонности оператора F. Поэтому из (3.3) следует

$$\|G_\alpha(x) - G_\alpha(y)\|^2 \le (1-\alpha\gamma)^2\|x-y\|^2 + \gamma^2\|F(x) - F(y)\|^2. \tag{3.4}$$

Далее, используя (1.3), получим

$$\|G_\alpha(x) - G_\alpha(y)\|^2 \le [(1-\alpha\gamma)^2 + \gamma^2 R^2]\|x-y\|^2. \tag{3.5}$$

Таким образом константа Липшица β для отображения G_α имеет вид

$$\beta = \sqrt{(1-\alpha\gamma)^2 + \gamma^2 R^2}. \tag{3.6}$$

Выясним, при каких γ выражение в правой части (3.6) является меньшим единицы. Напомним, что ранее мы уже наложили требование $\gamma < 1/\alpha$. Нетрудно показать, что $\beta < 1$ при выполнении условия

$$\gamma < \frac{2\alpha}{\alpha^2 + R^2}. \tag{3.7}$$

Таким образом, по теореме о неподвижной точке [1, с.75] достаточным условием сходимости метода неподвижной точки к решению уравнения (1.4) является выбор γ в виде

$$\gamma < \min\{\frac{1}{\alpha}, \frac{2\alpha}{\alpha^2 + R^2}\}. \tag{3.8}$$

При этом решение является единственным для всех положительных α и справедливо (3.2).

Естественным является вопрос, при каком γ метод неподвижной точки сходится наискорейшим образом, т.е. при каких $\gamma = \gamma_{min}$ выражение (3.6) минимально. Дифференцируя подкоренное выражение в (3.6), получим

$$\gamma_{min} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + R^2}. \tag{3.9}$$

Очевидно, что данное значение γ удовлетворяет ограничениям (3.8). Соответствующее значение β_{min} составляет

$$\beta_{min} = \frac{R}{\sqrt{\alpha^2 + R^2}}. \tag{3.10}$$

При этом скорость сходимости метода неподвижной точки определяется выражением (3.2). □

Как следует из Теоремы 1, количество итераций для достижения наперед заданной точности ϵ может быть оценено следующим образом

$$N_{iter} \le \log_\beta \frac{\epsilon(1-\beta)}{\|x_1 - x_0\|}, \tag{3.11}$$

Число N_{iter} зависит от коэффициента сжатия β и величины шага первой итерации $\|x_1 - x_0\|$. Как показывает анализ численных экспериментов, оценка (3.11) для количества итераций является сильно завышенной, особенно при малых α.

Одной из возможных причин этого является завышенная оценка константы Липшица. Другая причина — слишком большое значение первого шага $\|x_1 - x_0\|$, что эквивалентно большой невязке начального приближения $\|Ax_0 - f_\delta\|$. В то же время, буквально через несколько итераций эта невязка может стать существенно меньшей. В этом и состоит предлагаемая идея — постоянно отслеживать количество *остающихся* итераций по формуле

$$N^n_{iter} = \log_\beta \frac{\epsilon(1-\beta)}{\|x_n - x_{n-1}\|}, \tag{3.12}$$

Как только значение N^n_{iter} оказывается меньшим единицы, работа метода (1.6) прекращается. При этом число реально выполненых итераций может оказаться на порядок меньшим по сравнению с оценкой (3.11).

4. Вычислительный алгоритм

Продемонстрируем вычислительный алгоритм предложенного метода на тестовом примере нелинейного уравнения с монотонным оператором. В гильбернотом пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим следующее уравнение:

$$F(x) := \int_0^1 R(t,s)x^3(s)ds = f(t), \tag{4.1}$$

где

$$R(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & 0 \le s \le t \le 1, \\ t(1-s), & 0 \le t \le s \le 1. \end{cases}$$

Оператор F является монотонным в силу того, что функция $x^3(t)$ возрастает на всей оси и $R(t,s) \geq 0$ для всех $0 \leq t, s \leq 1$. Производная по Фреше оператора F в точке $x^\dagger$ задается соотношением

$$F'(x^\dagger)h(s) = 3\int_0^1 R(t,s)(x^\dagger(s))^2 h(s)ds.$$

В качестве точного решения возьмем функцию:

$$x^\dagger(t) = t^3$$

Легко проверить, что если $x^0(t) = t^3 - 3/56t^8 + 3/56t$, то для $\nu = 1$ функция $x^0 - x^\dagger$ удовлетворяет условие источника Гельдеревского типа:

$$x^0 - x^\dagger = (F'(x^\dagger))^\nu \omega.$$

Тогда мы можем ожидать погрешность решения $O(\delta^{\frac{1}{2}})$. Для применения принципа равновесия возможны две стратегии:

- Начинать проверку условия

$$\|x^i - x^j\| \leq \frac{4\delta c_z^1}{\alpha_j}, j = 0, 1, ..., i-1, \tag{4.2}$$

  с малого α_0 и двигаться вперед: $\alpha_k = \alpha_0 q^k$;

- Начинать с большого значения α_M и продолжать с меньшими параметрами регуляризации $\alpha_{M-k} = \alpha_M q^{-k}$.

Как отмечалось в работе [4], более целесообразной для практического применения является вторая стратегия. При этом возникает вопрос о размере сетки M, т.е. насколько малым должен быть параметр α_0, на котором следует оканчивать проверку условия (4.2). Поскольку мы ожидаем получить суммарную ошибку регуляризации порядка, как минимум, $\sqrt{\delta}$, то имеет смысл выбирать параметр α_0 в виде

$$\alpha_0 = C\sqrt{\delta}, \tag{4.3}$$

где C — некоторая константа. Соответственно, размер сетки M берется равным

$$M = \log_q \frac{\alpha_M}{C\sqrt{\delta}}. \tag{4.4}$$

Теперь опишем порядок работы алгоритма.

1. Выбрать достаточно большое значение α_M и параметры $q > 1$, $C > 0$. Это позволяет однозначно определить сетку значений

$$D_M = \{\alpha_i = \alpha_0 q^i, i = 0, 1, ..., M\}.$$

2. Вычислить приближенные решения x^i уравнений

$$(F + \alpha_i I)x = f_\delta + \alpha_i x', \tag{4.5}$$

с точностью $c_z\delta/\alpha_i$, $i = M-1, ..., 0$.

3. Для $i = M, M-1, ..., 1$ проверять выполнение условия (4.2). Как только для некоторого $i = i_+$ условие выполняется, проверка прекращается. В качестве приближенного решения уравнения (4.5) принимается x_{i_+}

Список цитируемых источников

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. —М.: Изд-во Наука, 1981. – 544 с.
2. *Bakyshinskiy A., Smirnova A.* A posteriori stopping rule for regularized fixed point iterations // Nonlinear Analysis. —2006. — V. 64. — P. 1255–1261.
3. *Deimling K.* Nonlinear Functional Analysis.New York: Spribger, 1985. — 450 p.
4. *Lu S., Pereverzev S., and Ramlau R.* An analysis of Tikhonov Regularization for nonlinear ill-posed problems under a general smoothness assumption // Inverse Problems. —2007. — V. 23. — P. 217–230.
5. *Pereverzev S., Schock E.* On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems // SIAM J. Numer. Anal. —2005. — V. 43. — P. 2060–2076.
6. *Poschl C.* An overview on convergence rates for Tikhonov regularization methods for non-linear operators // J. Inverse Ill-Posed Probl. —2009. —V. 17 no. 1. —P. 77–83.
7. *Tautenhahn U.* On the method of Lavrentiev regularization for nonlinear ill-posed problems // Inverse Problems. —2002. — V. 18. —P. 191–207.
8. *Tautenhahn U., Hämarik U.* The use of monotonicity for choosing the regularization parameter in ill-posed problems // Inverse Problems. —1999. — V. 15. —P. 1487–1505.

Получена 30.05.2010