Динамические системы, том 2(30), №1-2(2012), 137–142

УДК 511.33

Несимметрическая функция делителей гауссовых чисел в узких секторах

О. В. Савастру

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова,
Одесса 65026. *E-mail: sav_olga@bk.ru*

Аннотация. В статье исследуется несимметрическая функция делителей над кольцом целых гауссовых чисел. Так как гауссовым числам приписывается норма и аргумент, то можно рассматривать задачу о распределении значений указанной функции в арифметической прогрессии и в узких секторах. С помощью метода Виноградова построена асимптотическая формула для случая, когда разность прогрессии является растущей по норме величиной.

Ключевые слова: асимптотическая формула, гауссовы числа, функция делителей.

1. Введение

Пусть $a, b, c \in \mathbb{Z}[i]$, $1 \leq a \leq b \leq c$. Обозначим через $\tau_{a,b,c}(n)$ несимметрическую функцию делителей, которая обозначает количество различных представлений натурального числа n в виде $n = n_1^a n_2^b n_3^c$, где $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$.

Функция $\tau_{a,b,c}(n)$ возникает в разных задачах статистической теории чисел, при изучении распределения целых точек со специальными свойствами в трехмерном пространстве. Ее сумматорная функция встречается в задаче про число неизоморфных абелевых групп, порядки которых не превосходят X. Эта связь впервые была установлена E. Kratzel [5]. Решением этой проблемы занимались H. Menzer [7], H. Q. Liu [6].

Если $a = b = c = 1$, то мы получаем классическую функцию делителей $\tau_3(n)$. D. R. Heath-Brown в работе [3] исследовал функцию $\tau_3(n)$ в арифметической прогрессии. В работе [8] найдена асимптотическая формула для сумматорной функции $\tau_{1,1,2}(n)$ с растущей разностью прогрессии.

Вполне естественно изучать функцию $\tau_{a,b,c}(\alpha)$ над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$. В настоящей работе исследуется сумматорная функция

$$A(x; \gamma, \alpha_0, \varphi_1, \varphi_2) = \sum_{\substack{\alpha \equiv \alpha_0 \pmod{\gamma} \\ N(\alpha) \leq x \\ \varphi_1 < \arg \alpha \leq \varphi_2}} \tau_{1,1,2}(\alpha), \qquad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$, $\alpha_0, \gamma \in \mathbb{Z}[i], (\alpha_0, \gamma) = 1$.

У. Б. Жанбырбаевой в [2] была получена нетривиальная оценка остаточного члена в проблеме делителей $\tau_2(\alpha)$ в арифметических прогрессиях и в секториальных областях.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:
$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ — кольцо целых гауссовых чисел;
$N(\alpha) = |\alpha|^2$ — норма $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$; $Sp(\alpha) = \alpha + \overline{\alpha}$;
$L(s, \chi_4)$ — L-функция Дирихле с неглавным характером модуля 4;
$s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, $\sigma = \Re s$, $t = \Im s$; $\overline{\varphi}(\alpha)$ — обобщенная функция Эйлера;
$\exp(x) := e^x$, $x \in \mathbb{R}$; E — постоянная Эйлера;
символ Виноградова "$\ll$" означает то же, что и символ Ландау "O".

2. Вспомогательные утверждения

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}$, так как каждое ненулевое гауссовое число имеет ассоциированное с ним в каждой четверти комплексной плоскости.

Приведем ряд вспомогательных утверждений. Воспользуемся следующей леммой о "стаканчиках"Виноградова.

Лемма 1 ([1, с. 260])**.** *Пусть r – неотрицательное целое число, $\Omega > 0$, $0 < \Delta < \frac{1}{2}\Omega$, φ_1, φ_2 – вещественные числа, $\Delta \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq \Omega - 2\Delta$. Существует периодическая функция $f(\varphi) = f(\varphi; \varphi_1, \varphi_2)$ с периодом Ω, такая, что*

1. *$f(\varphi) = 1$ в промежутке $[\varphi_1, \varphi_2]$;*
   $0 \leq f(\varphi) \leq 1$ в промежутках $[\varphi_1 - \Delta, \varphi_1]$, $[\varphi_2, \varphi_2 + \Delta]$;
   $f(\varphi) = 0$ в промежутке $[\varphi_2 + \Delta, \varphi_2 + \Omega - \Delta]$;

2. *$f(\varphi)$ разлагается в ряд Фурье вида*
$$f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp\left(2\pi i \frac{m\varphi}{\Omega}\right),$$
где $a_0 = \frac{1}{\Omega}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta)$,
$$|a_m| \leq \begin{cases} \Omega^{-1}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta), \\ 2(\pi|m|)^{-1}, \\ 2(\pi|m|)^{-1}(r\Omega(\pi|m|\Delta)^{-1})^r. \end{cases}$$

Пусть $m \in \mathbb{Z}$. Положим
$$A_m(x; \gamma, \alpha_0) = \sum_{\substack{\alpha \equiv \alpha_0 \pmod{\gamma} \\ N(\alpha) \leq x}} \tau_{1,1,2}(\alpha) \exp(4mi \arg \alpha).$$

Пусть δ, $\delta_0 \in \mathbb{Q}[i]$. В области $\Re s > 1$ определим функцию
$$Z_m(s; \delta, \delta_0) = \sum_{\substack{\omega \in \mathbb{Z}[i] \\ \omega \neq -\delta}} \frac{\exp(4mi \arg(\omega + \delta))}{N(\omega + \delta)} \exp(2\pi i \Re(\delta_0 \omega)). \qquad (2)$$

Эту функцию мы называем Z-функцией Гекке со сдвигом [4]. $Z_m(s; \delta, \delta_0)$ допускает аналитическое продолжение во всю комплексную s-плоскость.

Лемма 2 ([4]). *$Z_m(s;\delta,\delta_0)$ является целой функцией , если $m \neq 0$ и $\delta_0 \notin \mathbb{Z}[i]$. В случае $m = 0$ и $\delta_0 \in \mathbb{Z}[i]$ Z-функция $Z_0(s;\delta,\delta_0)$ аналитична во всей s-плоскости, кроме точки $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом 1. Кроме того, для всех m, δ, δ_0 справедливо функциональное уравнение*

$$\begin{aligned}\pi^{-s}\Gamma(2|m|+s)Z_m(s;\delta,\delta_0) = \\ = \pi^{-(1-s)}\Gamma(2|m|+1-s)Z_m(1-s;-\overline{\delta_0},\delta)\exp\left(-2\pi i\Re(\delta_0\delta)\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Из формулы Стирлинга для гамма-функции $\Gamma(s)$ до членов второго порядка $O(t^{-2})$ имеем для $|t| > 1$, $\sigma > 0$

$$\Gamma(\sigma+it) = \sqrt{2\pi}t^{\sigma-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\exp\left(i(t\log t - t + \frac{\pi}{2}(\sigma-\frac{1}{2}) + (\sigma-\sigma^2-\frac{1}{6})(2t)^{-1} + O(t^{-2}))\right)\exp\left(-\frac{\pi|t|}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(2|m|+1-s)}{\Gamma(2|m|+s)} = \exp\left(it(2-\log(4m^2+t^2) + \frac{|2m|+1}{4m^2+t^2} + \frac{(2|m|+1)^2}{(4m^2+t^2)^2})\right)\times \\ \times\frac{1}{2}(4m^2+t^2)^{1-2\sigma}\exp\left(\sigma-\frac{1}{2}+\frac{t^2}{16}(4m^2+2|m|+t^2)^{-1}\right)\times \\ \times\left(1+O(m^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Из определения (2) ясно, что можно считать, что $0 < N(\delta)$, $N(\delta_0) \leq 1$.

Лемма 3 ([9, с. 59]). *Пусть $\alpha_0, \gamma \in \mathbb{Z}[i], N(\gamma) > 1, (\alpha_0, \gamma) = 1$. При $x \to \infty$ и для любого $\epsilon > 0$ справедлива следующая асимптотическая формула*

$$A_0(x;\gamma,\alpha_0) = \sum_{\substack{\alpha\equiv\alpha_0 \pmod{\gamma} \\ N(\alpha)\leq x}} \tau_{1,1,2}(\alpha) = c_0(\gamma)\frac{x}{N(\gamma)}\log x + c_1(\gamma)\frac{x}{N(\gamma)} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{7}+\epsilon}}{N(\gamma)^{\frac{3}{7}}}\right),$$

где

$$\begin{aligned}c_0(\gamma) = 4\pi^2\overline{\varphi}(\gamma)N^{-1}(\gamma)L_k(2,\chi_0), \\ c_1(\gamma) = 4\pi^2L_k(2,\chi_0)\Pi^*_{p|\gamma}\left(1-N(p)\right)\times\left[1+E+\sum_{\delta|\gamma}{}^*\tfrac{logN(\delta)}{N(\delta)-1}+\tfrac{L'(1,\chi_4)}{L(1,\chi_4)}\right],\end{aligned} \tag{5}$$

$L_k(s,\chi_0)$ — функция Дирихле с главным характером по модулю γ.

3. Основные результаты

Лемма 4. *Для достаточно большого x, $|m| > 0$ имеет место оценка*

$$A_m(x;\gamma,\alpha_0) \ll N^{1+\epsilon}(\gamma)|m|^{3+8\epsilon} + \frac{x^{\frac{5}{7}+\epsilon}}{N(\gamma)^{\frac{3}{7}}},$$

Доказательство. Для $c>1$, $T>1$, используя формулу Перрона для рядов Дирихле, получаем

$$A_m(x;\gamma,\alpha_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}G_m(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^c}{TN^{c-\epsilon}(\gamma)}\right)+O\left(\frac{x^{1+\epsilon}}{TN(\gamma)}\right)+O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+\epsilon}}{N^{\frac{1}{2}}}\log T\right),$$

где $c=1+2\epsilon\ \forall\epsilon>0$,

$$G_m(s)=\frac{exp(16mi\arg\gamma)}{N^{4s}(\gamma)}\sum_{\substack{\alpha_i\in\mathbb{Z}[i]\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3^2\equiv\alpha_0 \pmod{\gamma}}}Z_m(s,\frac{\alpha_1}{\gamma},0)Z_m(s,\frac{\alpha_2}{\gamma},0)Z_{2m}(2s,\frac{\alpha_3}{\gamma},0)-$$

$$-\sum_{\substack{\alpha\equiv\alpha_0 \pmod{\gamma}\\ N(\alpha)\le N(\gamma)}}\frac{\tau_{1,1,2}(\alpha)\exp(4mi\arg\alpha)}{N^s(\alpha)},$$

При $m\neq 0$ подынтегральная функция при перенесении контура интегрирования на прямую $\Re(s)=-\epsilon$ пройдет через единственную особенность в точке $s=0$ — полюс первого порядка. В области $-\epsilon\le\Re(s)=\sigma\le 1+\epsilon$, $3\le|\Im s|\le T$, используя функциональное уравнение (3), соотношение (4), по принципу Фрагмена-Линделефа получаем

$$G_m(s)\ll N^{1-2\sigma+4\epsilon}(\gamma)\left(m^2+t^2\right)\Big)^{\frac{3+8\epsilon}{2}\cdot\frac{1+\epsilon-\sigma}{1+2\epsilon}}.$$

Тогда имеет место следующая оценка вычета подынтегральной функции $\ll N^{1+4\epsilon}(\gamma)|m|^{3+8\epsilon}$. Интегралы по горизонтальным участкам, возникающие при перенесении контура интегрирования оцениваются

$$\left|\int\limits_{-\epsilon-iT}^{c-iT}G_m(s)\frac{x^s}{s}ds\right|+\left|\int\limits_{-\epsilon+iT}^{c+iT}G_m(s)\frac{x^s}{s}ds\right|\ll\frac{x^{1+\epsilon}}{TN(\gamma)}+N^{1+6\epsilon}(\gamma)\left(m^2+T^2\right)\Big)^{1+2\epsilon}T^{-1}x^{-\epsilon}.$$

Для оценки интеграла

$$\left|\int\limits_{-\epsilon-iT}^{-\epsilon+iT}G_m(s)\frac{x^s}{s}ds\right|$$

нужно воспользоваться функциональным уравнением (3), методом стационарной фазы и утверждение леммы будет доказано. □

Теорема. *Пусть* $\alpha_0,\gamma\in\mathbb{Z}[i], N(\gamma)>1, (\alpha_0,\gamma)=1$. *При* $x\ge N^{2+\epsilon}(\gamma)$ *и* $\varphi_2-\varphi_1\ge\frac{N^{\frac{1}{2}}(\gamma)}{x^{\frac{1}{4}-\epsilon}}$ *справедлива следующая асимптотическая формула*

$$A(x;\gamma,\alpha_0,\varphi_1,\varphi_2)=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2\pi}\left[c_0(\gamma)\frac{x}{N(\gamma)}\log x+c_1(\gamma)\frac{x}{N(\gamma)}\right]+O\left(\frac{x^{\frac{3}{4}+\epsilon}}{N(\gamma)^{\frac{1}{2}}}\right),$$

где константы $c_0(\gamma)$, $c_1(\gamma)$ *определяются формулой (5). Постоянная в символе* "O" *зависит только от* ϵ

Доказательство теоремы. Полагаем $\Omega = 2\pi$, выберем параметр $\Delta : 0 < \Delta < \frac{\pi}{2}$, точное значение Δ будет указано позже. Пусть $\Delta \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2} - 2\Delta$, $f(\varphi)$ — функция, удовлетворяющая условиям леммы 1. Рассмотрим функцию

$$A(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{\substack{\alpha \equiv \alpha_0 \pmod{\gamma} \\ N(\alpha) \leq x}} \tau_{1,1,2}(\alpha) f(\arg \alpha) = \sum_{\substack{\alpha \equiv \alpha_0 \pmod{\gamma} \\ N(\alpha) \leq x}} \tau_{1,1,2}(\alpha) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \exp(4mi \arg \alpha) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \sum_{\substack{\alpha \equiv \alpha_0 \pmod{\gamma} \\ N(\alpha) \leq x}} \tau_{1,1,2}(\alpha) \exp(4mi \arg \alpha) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m A_m(x; \gamma, \alpha_0).$$

В силу леммы 1

$$A(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta) A_0(x; \gamma, \alpha_0) + O\left(\sum_{1 \leq |m| \leq \Delta^{-1}} |a_m| |A_m(x; \gamma, \alpha_0)| \right) +$$
$$+ O\left(\sum_{|m| > \Delta^{-1}} |a_m| |A_m(x; \gamma, \alpha_0)| \right). \quad (6)$$

При $1 \leq |m| \leq \Delta^{-1}$ воспользуемся оценкой $|a_m| \leq (2\pi|m|)^{-1}$, при $|m| > \Delta^{-1}$ — оценкой $|a_m| \leq 2(\pi|m|)^{-1}(r\Omega(\pi|m|\Delta)^{-1})^r$ $(r = 4)$. Подставляя эти оценки в (6), используя лемму 4, получаем

$$A(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta) A_0(x; \gamma, \alpha_0) +$$
$$+ O\left(\sum_{1 \leq |m| \leq \Delta^{-1}} m^{-1} \left(N^{1+\epsilon}(\gamma)|m|^{3+\epsilon} + \frac{x^{\frac{5}{7}+\epsilon}}{N(\gamma)^{\frac{3}{7}}} \right) \right) +$$
$$+ O\left(\sum_{|m| > \Delta^{-1}} m^{-4} \Delta^{-3} \left(N^{1+\epsilon}(\gamma)|m|^{3+8\epsilon} + \frac{x^{\frac{5}{7}+\epsilon}}{N(\gamma)^{\frac{3}{7}}} \right) \right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta) A_0(x; \gamma, \alpha_0) + O\left(N^{1+\epsilon}(\gamma) \Delta^{-3-\epsilon} \right) + O\left(\frac{x^{\frac{5}{7}+\epsilon}}{N(\gamma)^{\frac{3}{7}}} \right).$$

Из леммы 3, полагая $\Delta^{-1} = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{N^{\frac{1}{2}}(\gamma)}$ следует

$$A(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) A_0(x; \gamma, \alpha_0) + O\left(\frac{x^{\frac{3}{4}+\epsilon}}{N(\gamma)^{\frac{1}{2}}} \right) + O\left(\frac{x^{\frac{5}{7}+\epsilon}}{N(\gamma)^{\frac{3}{7}}} \right).$$

Эта формула нетривиальна при $x \geq N^{2+\epsilon}(\gamma)$ и $\varphi_2 - \varphi_1 \geq \frac{N^{\frac{1}{2}}(\gamma)}{x^{\frac{1}{4}-\epsilon}}$, поэтому

$$A(\varphi_1 - \Delta, \varphi_2),\ A(\varphi_1, \varphi_2 + \Delta) \ll x^{\frac{3}{4}+\epsilon} N(\gamma)^{\frac{1}{2}}.$$

С учетом равенства

$$A(x;\gamma,\alpha_0,\varphi_1,\varphi_2)=A(\varphi_1,\varphi_2)+\theta_1 A(\varphi_1-\Delta,\varphi_2)+\theta_2 A(\varphi_1,\varphi_2+\Delta),$$

получаем утверждение теоремы. □

4. Заключение

Схема доказательства теоремы дает возможность получить следующую асимптотическую формулу для сумматорной функции для $\tau_3(\alpha)$ при $(\alpha_0,\gamma)=1$.

$$\sum_{\substack{\alpha\equiv\alpha_0 \pmod{\gamma}\\ N(\alpha)\le x\\ \varphi_1<\arg\alpha\le\varphi_2}}\tau_3(\alpha)=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2\pi}\frac{x}{N(\gamma)}\left[A_0(\gamma)\log^2 x+A_1(\gamma)\log x+A_2(\gamma)\right]+O\left(\frac{x^{\frac{3}{4}+\epsilon}}{N(\gamma)^{\frac{1}{2}}}\right),$$

здесь A_2, A_1, A_0 – вычислимые константы, зависящие от γ.

Список цитируемых источников

1. *Виноградов И. М.* Избранные труды. — М.: Изд. АН СССР, 1952. — 436 с.
2. *Жанбырбаева У. Б.* Асимптотические задачи теории чисел в секториальных областях: Дис… канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. — Одесса, 1986.
3. *Heath-Brown D. R.* The divisor function $d_3(n)$ in arithmetic progressions // Acta. Arithm. —1986. — XLVII. — p. 29–56.
4. *Hecke E.* Art von Zetafunctionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, I, II // Math. Zeitsehr. —1918. — №1. — p. 357–376. — 1920. — №6. — P. 11–51.
5. *Krätzel E.* On the average number of direct factors of a finite Abelian group // Acta. Arithm. —1988. — Vol. 51. — P. 369–379.
6. *Liu H. Q.* Divisor problems of 4 and 3 dimensions // Acta Arith. — 1995. — Vol. 73. — P. 29–269.
7. *Menzer H.* On the average number of direct factors of a finite Abelian group // JTNB. — 1995. — T. 7, №1. — P. 155–164.
8. *Savastru O. V.* The non-symmetric divisor function $\tau(1,1,2;N)$ in arithmetic progression // Matematychni Studii. — 2002. — V. 18, №2. — P. 115–124.
9. *Savastru O. V.* Distribution of the non-symmetric divisor function over $\mathbb{Z}[i]$ in arithmetic progression // Bulletin of Kiev, series: physics and mathematics sciences. —2002. — №3. — P. 56–59.

Получена 18.05.2012