Динамические системы, вып. 20 (2006), 113–122

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 513.88

Про *-зображення алгебр типу Темперлі-Ліба

С.В. Іванов, Ю.П. Москальова
Таврійський національний університет ім. В.І. Вернадського,
Сімферополь 95007. *E-mail: serg_h-g@mail.ru; yulmosk@mail.ru*

Анотація. У роботі розглядаються *-алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$, асоційовані з деревами та породжені системою твірних з співвідношеннями типу Темперлі-Ліба та ортогональності. Приведено та обгрунтовано алгоритм, який дозволяє незвідні зображення таких алгебр, та який дає критерій існування нетривіальних зображень.

1. Вступ

Алгебра, породжена двома твірними елементами без додаткових умов $\mathcal{P}_2 = \mathbb{C}\langle p_1, p_2 | p_i = p_i^2 = p_i^*, i = 1, 2\rangle$ є добре вивченою [1], [2]. Але дослідження алгебри з трьома трвіними елементами $\mathcal{P}_3$ без додаткових співвідношень є вже надзвичайно складною задачею [3]. Як наслідок, існує велика кількість конкретних алгебр, дослідження яких використовує власні методи та потребує застосування прийомів з різних областей математики. Одними з таких алгебр є алгебри асоційовані з графами.

Вперше співвідношення виду

$$p_i p_j p_i = \tau_{ij} p_i, p_j p_i p_j = \tau_{ij} p_j, \tag{1.1}$$

де i та j – вершини графа, які з'єднані ребром, а $\tau_{ij} \in \mathbb{C}$ – число, яким помічено це ребро, з'явилися у роботі Темперлі та Ліба [4] при дослідженні двомірної моделі льоду та моделі Поттса. При відповідних граничних умовах функція розподілу для моделі льоду така сама, як і для критичної моделі Поттса, якщо зробити у останній заміну змінних.

У роботі М.А. Власенко та Н.Д. Поповой [5] розглянуто алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$, асоційовані з графами Г та породжені твірними з співвідношеннями типу Темперлі-Ліба та ортогональності. Для таких алгебр, наприклад, визначено ріст та розмірність зображень.

У дійсній роботі ми розглядаємо *-алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$, асоційовані з деревами та породжені системою твірних з співвідношеннями типу Темперлі-Ліба та ортогональності. У першому розділі приведено необхідні факти про такі алгебри. У другому розділі приведено два алгоритми. Перший виконує розмітку дерева. При цьому вершини дерева отримують мітки a_i з допомогою яких другий алгоритм будує формули зображення. Мітки a_i також використовуються як індікатори існування зображення *-алгебри. Це доводиться у третьому розділі роботи. Теорема 3 встановлює рівність між множиною розстановок чисел τ на ребрах графа, для яких існують нетривіальні зображення *-алгебр $A_{\Gamma,\tau,\perp}$, та множиною розстановок τ, для яких існує коректне виконання алгоритму розмітки дерева.

2. Алгебри з співвідношеннями типу Темперлі-Ліба

У цьому пункті ми розглянемо результати, які було отримано для алгебр, асоційованих з графами та породжених системою твірних з співвідношеннями типу Темперлі-Ліба та ортогональності.

Нехай Γ – довільний скінченне неорієнтований граф без кратних ребер та петель. Γ_0 та $\Gamma_1 \subset \Gamma_0 \times \Gamma_0$ – множини відповідно вершин та ребер графа Γ. Нехай $\tau : E\Gamma \to (0;1)$ – деяка розстановка чисел на ребрах графа Γ. Довільним чином ототожнимо вершини графа з числами $0, ..., \mid \Gamma_0 \mid -1$. Позначимо $\tau(i,j) = \tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Визначення 1. Алгеброю $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ є алгебра з одиницею над полем комплексних чисел, породжену ідемпотентами $\{p_i,\ i \in \Gamma_0\}$, з співвідношеннями:

$$\begin{cases} p_ip_jp_i = \tau_{ij}p_i, p_jp_ip_j = \tau_{ij}p_j, & \text{якщо } \{i,j\} \in \Gamma_1; \\ p_ip_j = p_jp_i = 0, & \text{інакше .} \end{cases}$$

У подальшому ми будемо розглядати $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ як *-алгебру, маючи на увазі наступну інволюцію:

$$(p_{i_1}p_{i_2}...p_{i_k})^* = p_{i_k}p_{i_{k-1}}...p_{i_1}.$$

Для таких алгебр у випадку, коли числа τ_{ij} дорівнюють одне оддному, зображення розглядались у роботі [6] для гарфа, який є ланцюгом, та у роботі [7] для графа, який є циклом.

Розглянемо наступну лему, яка преведена у роботі [5] та дає інформацію про розмірність алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$.

Лема 1. *Якщо граф Γ не містить циклів, то алгебра $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ скінченновимірна. Якщо кожна компонента зв'язності графа Γ містить не більш ніж один цикл, то алгебра $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ має розмірність Гельфанда-Кирилова 1. Якщо деяка компонента зв'язності графа Γ містить більш ніж один цикл, $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ містить вільну підалгебру з двома твірними.*

Нагадаємо, що розмірністю Гельфанда-Кирилова алгебри A називається значення верхньої границі

$$GKdim(A) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \log_n g_T(n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln g_T(n)}{\ln n},$$

де g_T – функція росту.

Далі будемо вважати, що Γ – граф не більше ніж з одним циклом. Розглянемо теорему, яку наведено у роботі [5], яка довозляє робити висновки про ранги твірних елементів алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$.

Теорема 1. *Якщо $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ має нетривіальні незвідні зображення, то ранги всіх твірних-проекторів у них дорівнюють 1.*

Обгрунтування цієї теореми суттєво використовує наступну лему.

Лема 2. *Алгебра $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ не має бескінеченовимірних незвідних зображень у гільбертовому просторі.*

Нехай кількість вершин у графі $\mid \Gamma_0 \mid= n$. Розглянемо самоспряжену матрицю $A = A(\Gamma, \tau) = \{A_{i,j}\}_{i,j=0}^{n-1}$, де $A_{i,j} = 0$, якщо вершини i та j дерева Γ не з'єднані ребром, та $A_{i,j} = \sqrt{\tau_{ij}}$ навпаки.

Теорема 2. *Нехай Γ – дерево. Нетривіальне зображення алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ існує тоді і тільки тоді, коли матриця $A(\Gamma, \tau)$ є невід'ємно визначенною. Незвідне нетривіальне зображення $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ єдине з точністю до унітарної еквівалентності, та його розмірність дорівнює рангу матриці $A(\Gamma, \tau)$.*

3. Алгоритм побудови зображення *-алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$, асоційованої з деревом

Нехай Γ є деяким скінченним неорієнтованим деревом без кратних ребер та петель. Кардинальне число множини вершин $\mid V\Gamma \mid= n$, множини ребер на одиницю меньше ніж $\mid V\Gamma \mid$, тобто $\mid E\Gamma \mid= n - 1$. Довільним чином занумеруємо вершини графа числами $i = \overline{1, n}$ та зробимо розстановку чисел на ребрах $\tau : E\Gamma \to (0; 1)$. При цьому кожне ребро графа з вершинами i та j отримає мітку $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Розглянемо наступний алгоритм.

Алгоритм розмітки дерева

$\underline{1}$. $s := 1$, $G^{(1)} := \Gamma$.

$\underline{2}$. Обираємо довільну вершину i графа $G^{(1)}$ валентність якої дорівнює 1 у графі $G^{(s)}$ і яка не є поміченою.

$\underline{3}$. $s_i := s$, $a_i := 1$.

$\underline{4}$. Якщо існують вершини графа $G^{(1)}$, суміжні з вершиною i та непомічені, то нехай $i_1, i_2, ..., i_l$ усі такі вершини. Тоді $a_i := a_i - \sum\limits_{j=1}^{l} \frac{\tau_{i,i_j}}{a_{i_j}}$. Якщо $a_i < 0$ або якщо $a_i = 0$ та у графі $G^{(1)}$ існують непомічені вершини, то виконання алгоритму припиняється.

$\underline{5}$. Розглянемо вершину k графа $G^{(1)}$, яка суміжна з вершиною i у графі $G^{(s)}$ та не є поміченою. Якщо такої вершини не існує, то переходимо до пункту $\underline{10}$.

6. Якщо валентність вершини k у графі $G^{(s)}$ більше ніж 2, тоді переходимо до пункту 7 інакше $i := k$ та переходимо до пункту 3.

7. Якщо множина непомічених вершин, валентність яких дорівнює 1 у графі $G^{(s)}$, є пустою, то переходимо до пункту 8, інакше переходимо до пункту 2.

8. $s := s + 1$. Будуємо граф $G^{(s)}$. Вершинами графа $G^{(s)}$ є:

1) вершини графа $G^{(s-1)}$, які непомічені і мають валентність 2;

2) вершини графа $G^{(s-1)}$, які мають валентність більше ніж 2 та непомічені.

Граф $G^{(s)}$ є підграфом графа $G^{(s-1)}$, породженим вказаною множиною вершин.

9. Якщо $G^{(s)} = P_1$, то єдина вершина i отримує мітки $s_i = s$, $a_i = 1 - \sum\limits_{j=1}^{l} \frac{\tau_{i,i_j}}{a_{i_j}}$, де $i_1, i_2, ..., i_l$ усі вершини графа $G^{(1)}$, суміжні з вершиною i та непомічені, та переходимо до пункту 10 інакше переходимо до пункту 2.

10. Якщо $a_i \geq 0$, то розмітка дерева є завершеною. Інакше виконання алгоритму припиняється.

Будемо говорити, що розмітка дерева виконана коректно, якщо вона завершена. Зазначимо, що розмітку дерева Γ буде виконано коректно, якщо під час виконання алгоритму будуть отримані мітки $a_i > 0$, а остання мітка $a_j \geq 0$.

Позначимо через Ω_Γ множину розстановок τ, для яких існують коректні розмітки дерева Γ. Припустимо, що для Γ виконана коректна розмітка, тобто $\tau \in \Omega_\Gamma$. Тоді виконана алгоритмом розмітка дозволяє побудувати нетривіальне незвідне *-зображення π *-алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$, при цьому якщо остання мітка, отримана за алгоритмом $a_i \neq 0$, то розмірність зображення дорівнює n, та якщо $a_i = 0$, то розмірність зображення дорівнює $n - 1$.

Позначимо через $P_i = \pi(p_i)$, $i = \overline{1,n}$. Опишемо етапи побудови цього *-зображення наступним алгоритмом. Перша частина розставляє елементи у матрицях ортопроекторів, які розміщені на головній діагоналі. Поточною позицією на початок дії алгоритму вважається перший елемент першого рядку та всі вершини вважаються не використаними. Друга частина алгоритму добудовує інші елементи матриць ортопроекторів.

*Алгоритм побудови *-зображення*
I частина:

1. $s := 1$.

2. Обираємо довільну невикористану вершину i графа $G^{(1)}$, яка має валентність 1 у графі $G^{(s)}$ або 0.

3. Якщо $a_i \neq 0$, то у поточну позицію у матриці оператора P_i ставимо a_i та переходимо до наступного діагонального елемента, якщо це можливо. Вершина i вважається використаною.

4. Якщо існують вершини, суміжні з вершиною i у графі $G^{(1)}$ та невикористані, то нехай $i_1, i_2, ..., i_l$ усі такі вершини. Перебираємо ці вершини по $m = \overline{1,l}$ та у матриці ортопроектора P_i ставимо число $\frac{\tau_{i,i_m}}{a_{i_m}}$ в ту позицію, у якій стоїть число a_{i_m} у матриці ортопроектора P_{i_m}. Після завершення перебору робота з P_i закінчується.

$\underline{5}$. Якщо множина невикористаних вершин графа $G^{(1)}$ є пустою, то переходимо до пункту $\underline{9}$.

$\underline{6}$. Розглядаємо вершину j графа $G^{(1)}$, суміжну з вершиною i у графі $G^{(s)}$ та невикористану. Якщо $s_j > s_i$, то переходимо до пункту $\underline{7}$, инакше $i := j$ і переходимо до пункту $\underline{3}$.

$\underline{7}$. Якщо множина невикористаних вершин, які мають валентність 1 у графі $G^{(s)}$ є пустою, то $s := s + 1$.

$\underline{8}$. Переходимо до пункту $\underline{2}$.

$\underline{9}$. Робота алгоритма закінчена.

II частина:

Для завершення побудови ортопроекторів перебираємо їх по $i = \overline{1, n}$ та:

$\underline{1}$. Якщо на головній діагоналі у матриці оператора P_i стоїть тільки одна 1, то усі інші елементи матриці беремо рівними нулю і P_i побудован.

$\underline{2}$. Якщо на головній діагоналі у матриці оператора P_i на позиціях $i_1, i_2, ..., i_l$ стоять числа $s_{i_1}, s_{i_2}, ..., s_{i_l}$, то розглядаємо усі можливі сполучення з $\{i_1, i_2, ..., i_l\}$ по два та для кожних $\{i_k, i_m\}$ елементи матриці P_i з індексами i_k, i_m та i_m, i_k беремо рівними $\sqrt{s_{i_k} s_{i_m}}$. Інщі елементи матриці оператора P_i беремо рівними нулю. P_i побудовано.

За побудовою матриці P_i задовольняють властивостям $P_i^2 = P_i = P_i^*$ і, отже, є ортопроекторами.

4. Обгрунтування алгоритму побудови зображення *-алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$, асоційованої з деревом

Нехай Σ_Γ – множина розстановок τ, для яких існують нетривіальні незвідні зображення *-алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$. Тоді, враховуючи вищезазначене, ми отримуємо, що $\Omega_\Gamma \subseteq \Sigma_\Gamma$.

Розглянемо простий ланцюг P_n. Занумеруємо вершини ланцюга числами від 1 до n у порядку їх слідування. Позначимо кожне ребро ланцюга з вершинами i та $i+1$ числами $\tau_i \in (0; 1)$, $i = \overline{1, n-1}$.

Лема 3. *Для алгебри $A_{P_n,\tau,\perp}$ має місце рівнвсть $\Omega_{P_n} = \Sigma_{P_n}$.*

Доказательство. Раніше було показано, що має місце включення $\Omega_\Gamma \subseteq \Sigma_\Gamma$. Покажемо зворотнє включення.

Нехай $\tau \in \Sigma_{P_n}$. Розглянемо самоспряжену матрицю $A(P_n, \tau) = \{A_{i,j}\}_{i,j=1}^n$, де $A_{ii} = 1$, $A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = \sqrt{\tau_i}$, $i = \overline{1, n-1}$ та $A_{ij} = 0$ у інших випадках.

Для ланцюга матриця має вигляд

$$A(P_n,\tau)=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\tau_1} & 0 & 0 & ... & 0 & 0\\ \sqrt{\tau_1} & 1 & \sqrt{\tau_2} & 0 & ... & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\tau_2} & 1 & \sqrt{\tau_3} & ... & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{\tau_3} & 1 & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \sqrt{\tau_{n-1}}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \sqrt{\tau_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетривіальні зображення алгебри $A_{P_n,\tau}$ існують тоді і тільки тоді, коли $A(P_n,\tau)$ невід'ємно визначена. При цьому незвідне зображення єдине з точністю до унітарної еквівалентності та його розмірність дорівнює рангу матриці $A(P_n,\tau)$. Оскільки $\tau\in\Sigma_{P_n}$, то $A(P_n,\tau)$ є невід'ємно визначеною і її головні мінори $M_{1,\dots,i}\geq 0$, $i=\overline{1,n}$.

Не порушуючи спільність міркувань, вважаємо, що розмітка ланцюга починалася з вершини 1. Встановимо зв'язок між головними мінорами матриці $A(P_n,\tau)$ та мітками a_i.

$M_1 = 1 = a_1 > 0$.

Для головного мінору $M_{1,2}$:

$$M_{1,2}=\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\tau_1}\\ \sqrt{\tau_1} & 1\end{vmatrix}=1-\tau_1=1\cdot(1-\tau_1)=a_1\cdot a_2\geq 0.$$

Розглянемо $M_{1,2,3}$:

$$M_{1,2,3}=\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\tau_1} & 0\\ \sqrt{\tau_1} & 1 & \sqrt{\tau_2}\\ 0 & \sqrt{\tau_2} & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\tau_1}\\ \sqrt{\tau_1} & 1\end{vmatrix}-\sqrt{\tau_2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0\\ \sqrt{\tau_1} & \sqrt{\tau_2}\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot M_{1,2}-\tau_2\cdot 1=M_{1,2}-\tau_2\cdot M_1\geq 0.$$

Якщо припустити, що $M_{1,2}=0$, то ми отримаємо, що $M_{1,2,3}<0$. Тобто, $M_{1,2}=a_1\cdot a_2>0\Rightarrow a_2>0$.

За індукцією, припустимо, що отримане співвідношення має місце для $M_{1,2,\dots,k-1}$, тобто, $M_{1,2,\dots,k-1}=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}$ та $a_{k-1}>0$. Покажемо для $M_{1,2,\dots,k}$.

$$M_{1,2,\dots,k}=\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\tau_1} & 0 & ... & 0 & 0\\ \sqrt{\tau_1} & 1 & \sqrt{\tau_2} & ... & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\tau_2} & 1 & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \sqrt{\tau_{k-1}}\\ 0 & 0 & 0 & ... & \sqrt{\tau_{k-1}} & 1\end{vmatrix}=$$

$$= 1 \cdot M_{1,2,\ldots,k-1} - \sqrt{\tau_{k-1}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\tau_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\tau_1} & 1 & \sqrt{\tau_2} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\tau_2} & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \sqrt{\tau_{k-3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\tau_{k-3}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \sqrt{\tau_{k-2}} & \sqrt{\tau_{k-1}} \end{vmatrix} =$$

$$= M_{1,2,\ldots,k-1} - \tau_{k-1} \cdot M_{1,2,\ldots,k-2} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} - \tau_{k-1} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k-2} =$$

$$= a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \cdot (1 - \frac{\tau_{k-1}}{a_{k-1}}) = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \geq 0.$$

Аналогічно, розглянемо $M_{1,2,\ldots,k+1}$:

$$M_{1,2,\ldots,k+1} = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\tau_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \sqrt{\tau_1} & 1 & \sqrt{\tau_2} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\tau_2} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \sqrt{\tau_k} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\tau_k} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot M_{1,2,\ldots,k} - \sqrt{\tau_k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\tau_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\tau_1} & 1 & \sqrt{\tau_2} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\tau_2} & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \sqrt{\tau_{k-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\tau_{k-2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \sqrt{\tau_{k-1}} & \sqrt{\tau_k} \end{vmatrix} =$$

$$= M_{1,2,\ldots,k} - \tau_{k-1} \cdot M_{1,2,\ldots,k-1} \geq 0.$$

Тоді, якщо припустити, що $M_{1,2,\ldots,k} = 0$, то ми отримаємо, що $M_{1,2,\ldots,k+1} < 0$, тобто, $M_{1,2,\ldots,k} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k > 0, \Rightarrow a_k > 0$.

Ми отримали, що $M_{1,2,\ldots,i} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_i$, $i = \overline{1,n}$ і $a_i > 0$, $i = \overline{1, n-1}$. При цьому $a_n > 0$, якщо $M_{1,2,\ldots,n} = detA(P_n, \tau) > 0$, тобто $rankA(P_n, \tau) = n$, і $a_n = 0$, якщо $M_{1,2,\ldots,n} = 0$, тобто $rankA(P_n, \tau) = n - 1$. Таким чином, $\Omega_{P_n} \supseteq \Sigma_{P_n}$ і, у наслідку, має місце рівність $\Omega_{P_n} = \Sigma_{P_n}$.

□

Переходимо до розгляду довільного дерева Γ, вершини якого занумеровані та проведена розстановка чисел на ребрах. Припустимо, що існують нетривіальні зображення алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$, тобто, $\tau \in \Sigma_\Gamma$. Розглянемо відповідну матрицю $A(\Gamma, \tau)$, яка є невід'ємно визначеною.

Нагадаємо, що розмітка дерева Γ буде виконана корректно, якщо під час роботи алгоритму будуть отримані мітки $a_i > 0$, а остання мітка $a_j \geq 0$. Нехай алгоритм розмітки дерева починає свою роботу з деякої вершини i_1, валентність якої дорівнює 1, та проходить по вершинам $i_2, i_3, ..., i_s$, валентність яких дорівнює 2, до вершини i_{s+1}, валентність якої більше ніж 2. Оскільки $M_{i_1} = 1 = a_{i_1} > 0$, то алгоритм продовжує розмітку. Далі переходимо до вершини i_2, розглядаємо підграф $\Gamma(i_1, i_2, i_3)$ графа Γ, породжений множиною вершин $\{i_1, i_2, i_3\}$. Для алгебри $A_{\Gamma(i_1,i_2,i_3),\tau,\perp}$ існують нетривіальні зображення. Тоді за Лемою 3 $M_{i_1,i_2} = a_{i_1} \cdot a_{i_2} > 0$, а отже, $a_{i_2} > 0$ та алгоритм не зупиняється. І так далі до вершини i_s.

Таким чином, ми приходимо до вершини i_s. Розглядаємо підграф $\Gamma(i_1, i_2, ..., i_{s+1})$. Тоді у алгебри $A_{\Gamma(i_1,i_2,...,i_{s+1}),\tau,\perp}$ існують нетривіальні зображення та за Лемою 3 $M_{i_1,i_2,...,i_s} = a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot ... \cdot a_{i_s} > 0$, тоді $a_{i_s} > 0$ і алгоритм продовжує роботу.

Міркуючи аналогічно, отримаємо, що алгоритм виконає розмітку вершин графа, починаючи з вершин, які мають валентність 1, і до вершин, які мають валентність більше ніж 2 (не включаючи).

Нехай далі i – непомічена вершина графа, яка має валентність більшу ніж 2, та є вершиною з валентністю 1 у графі $G^{(2)}$. Нехай $i_{1_{s_1}}, i_{2_{s_2}}, ..., i_{k_{s_k}}$ – усі помічені вершини, суміжні з вершиною i у графі Γ, а $i_{1_1}, i_{1_2}, ..., i_{1_{s_1}}, i_{2_1}, i_{2_2}, ..., i_{2_{s_2}}, ..., i_{k_1}, i_{k_2}, ..., i_{k_{s_k}}$ – помічені вершини, які знаходяться на шляху від вершини i через вершини $i_{1_{s_1}}, i_{2_{s_2}}, ..., i_{k_{s_k}}$ до помічених вершин з валентністю 1. Відповідний мінор матриці $A(\Gamma, \tau)$ матиме наступний вигляд:

$$M_{i_{1_1},i_{1_2},...,i_{1_{s_1}},i_{2_1},i_{2_2},...,i_{2_{s_2}},...,i_{k_1},i_{k_2},...,i_{k_{s_k}},i} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\tau_{i_{1_1} i_{1_2}}} & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\tau_{i_{1_1} i_{1_2}}} & 1 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 & 0 & \sqrt{\tau_{i_{1_{s_1}} i}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 1 & \sqrt{\tau_{i_{k_{s_k-1}} i_{k_{s_k}}}} & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & \sqrt{\tau_{i_{k_{s_k-1}} i_{k_{s_k}}}} & 1 & \sqrt{\tau_{i_{k_{s_k}} i}} \\ 0 & 0 & ... & \sqrt{\tau_{i_{1_{s_1}} i}} & ... & 0 & \sqrt{\tau_{i_{k_{s_k}} i}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Тоді, виконуючи спочатку розкладання по останньому рядку, а потім для отриманих визначників з множниками $\sqrt{\tau_{lt}}$ по рядкам, у яких у останньому стовпчику знаходиться множник $\sqrt{\tau_{lt}}$, ми отримаємо, що

$$M_{i_{1_1},i_{1_2},...,i_{1_{s_1}},i_{2_1},i_{2_2},...,i_{2_{s_2}},...,i_{k_1},i_{k_2},...,i_{k_{s_k}},i} = a_{i_{1_1}} \cdot a_{i_{1_2}} \cdot ... \cdot a_{i_{k_{s_k}}} \cdot a_i \geq 0.$$

Нехай j – вершина, суміжна з вершиною i та непомічена. Розглянемо мінор

$$M_{i_{1_1},i_{1_2},...,i_{1_{s_1}},i_{2_1},i_{2_2},...,i_{2_{s_2}},...,i_{k_1},i_{k_2},...,i_{k_{s_k}},i,j} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\tau_{i_{1_1} i_{1_2}}} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\tau_{i_{1_1} i_{1_2}}} & 1 & \sqrt{\tau_{i_{1_2} i_{1_3}}} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\tau_{i_{1_2} i_{1_3}}} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \sqrt{\tau_{i_{k_{s_k-1}} i_{k_{s_k}}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\tau_{i_{k_{s_k-1}} i_{k_{s_k}}}} & 1 & \sqrt{\tau_{i_{k_{s_k}} i}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{\tau_{i_{k_{s_k}} i}} & 1 & \sqrt{\tau_{i,j}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sqrt{\tau_{i,j}} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= M_{i_{1_1}, i_{1_2}, \dots, i_{1_{s_1}}, i_{2_1}, i_{2_2}, \dots, i_{2_{s_2}}, \dots, i_{k_1}, i_{k_2}, \dots, i_{k_{s_k}}, i} - \tau_{i,j} \cdot M_{i_{1_1}, i_{1_2}, \dots, i_{1_{s_1}}, i_{2_1}, i_{2_2}, \dots, i_{2_{s_2}}, \dots, i_{k_1}, i_{k_2}, \dots, i_{k_{s_k}}}.$$

Якщо припустити, що $M_{i_{1_1}, i_{1_2}, \dots, i_{1_{s_1}}, i_{2_1}, i_{2_2}, \dots, i_{2_{s_2}}, \dots, i_{k_1}, i_{k_2}, \dots, i_{k_{s_k}}, i} = 0$, то ми отримаємо, що $M_{i_{1_1}, i_{1_2}, \dots, i_{1_{s_1}}, i_{2_1}, i_{2_2}, \dots, i_{2_{s_2}}, \dots, i_{k_1}, i_{k_2}, \dots, i_{k_{s_k}}, i, j} < 0$. Тоді

$$M_{i_{1_1}, i_{1_2}, \dots, i_{1_{s_1}}, i_{2_1}, i_{2_2}, \dots, i_{2_{s_2}}, \dots, i_{k_1}, i_{k_2}, \dots, i_{k_{s_k}}, i} = a_{i_{1_1}} \cdot a_{i_{1_2}} \cdot \dots \cdot a_{i_{k_{s_k}}} \cdot a_i > 0$$

і $a_i > 0$. Тобто, алгоритм продовжує роботу.

Міркуючи аналогічно, для усіх залишившихся вершин, крім останньої, ми отримаємо, що усі їх мітки є числами більше нуля.

Нехай a_j – остання мітка, яку поставив алгоритм. Виконавши обчислення, такі ж як і раніше, ми отримаємо те, що $detA(\Gamma, \tau) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{j-1} \cdot a_{j+1} \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_j \geq 0$. Тоді $a_j \geq 0$.

Таким чином, ми доказали наступну теорему.

Теорема 3. *Якщо Γ – дерево, то для *-алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ має місце рівність $\Omega_\Gamma = \Sigma_\Gamma$.*

З доказу теореми ми отримаємо

Наслідок 1. *Якщо для дерева Γ виконана коректна розмітка, то розмірність зображення алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ або дорівнює n, якщо остання мітка $a_j > 0$, або дорівнює $n-1$, якщо $a_j = 0$. Інші розмірності неможливі.*

Автори висловлюють щиру подяку Самойленко Юрію Стефановичу за постановку задачі та корисні поради.

Перелік цитуємих джерел

1. *Halmos P.R.* Two subspaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol.144. – P.381-389.
2. *Ostrovskyĭ V.L., Samoĭlenko Yu.S.* Introduction to the theory representation of finitely presented ∗-algebras. 1. Representations by bounded operators. Rev. Math.& Math. Phys., Gordon and Breach. – 1999. – Vol.11. – P.1-261.
3. *Кругляк С.А., Самойленко Ю.С.* Об унитарно эквивалентных наборах самосопряженных операторов // Функциональный анализ и его приложения. – 1980. – T.14, №1. – C.60-62.
4. *Temperley H., Lieb E.* Relations between the 'percolation' and 'colouring' problem and other graph-theoretical problems associated whith regular plane lattices: some exact results for 'percolation' problem // Proc. Roy. Soc. (London). – 1971. – Ser.A, no. 322 – P.251-280.

5. *Власенко М.С., Попова Н.Д.* О конфигурациях подпространств гильбертова пространства с фиксироваными углами между ними // Украинский математический журнал. – 2004. – Т.56, №5. – С.606-615.
6. *Wenzl H.* On sequences of projections // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. – 1987. – Vol.IX, no.1. – P.5-9.
7. *Popova N.* On the Algebra of Temperley-Lieb Type // Proc. Inst. Math. NAS Ukrain. – 2001. – P.80-92.

Получено 11.10.2006