Динамические системы, вып. 26 (2009), 103–113

УДК 517.9

Двухшаговая итерационная схема для построения функций Матье[1]

С.М. Чуйко, О.В. Старкова

Славянский государственный педагогический университет
Славянск 84112. *E-mail: chujko-slav@inbox.ru*

Аннотация. Предложена двухшаговая итерационная процедура, построенная по схеме метода наименьших квадратов, определяющая последовательные приближения к функциям Матье. Построенная итерационная процедура позволяет найти приближения к периодическому решению уравнения Матье и его собственной функции, значительно превосходящие по точности ранее известные результаты.

Ключевые слова: уравнение Матье, метод наименьших квадратов, двухшаговая итерационная схема.

Предложена итерационная схема, определяющая последовательные приближения к функциям Матье, которые являются 2π-периодическими решениями $y(t,\varepsilon): y(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,2\pi]$, $y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ уравнения Матье [3, 5, 8, 10]

$$y'' + (h(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t) \cdot y = 0. \tag{1}$$

Решения $2\pi-$ периодической задачи для уравнения (1) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$y_0'' + k^2 y_0 = 0,\ y_0(0) - y_0(2\pi) = 0. \tag{2}$$

Следуя предложенной в монографии [3] схеме построения $2\pi-$ периодического решения уравнения (1), начиная с третьей итерации приходим к появлению в приближениях к решению секулярных членов вида $t \sin \nu t,\ t\cos \nu t,\ \nu \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих краевому условию $y(0,\varepsilon) - y(2\pi,\varepsilon) = 0$, но не являющихся $2\pi-$ периодическими функциями. Традиционная [6, 10] схема построения функций Матье предполагает одновременное нахождение приближений к функциям

$$h(\varepsilon):\ h(\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\ h(0) = k^2,\ k \in \mathbb{N}.$$

Нами предложена двухшаговая итерационная схема, построенная по схеме метода наименьших квадратов [11], при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ определяющие последовательные приближения к функции $h(\varepsilon)$ и соответствующей функции Матье $y(t,\varepsilon)$. Примем в качестве нулевого приближения $h_0(\varepsilon)$ к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ одну

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0109U000381.

из найденных [3, 5, 8, 10, 12] зависимостей $h_0(\varepsilon)$; в качестве нулевого приближения можно также использовать значение $h_0(\varepsilon) = h(0) = k^2, \ k \in \mathbb{N}$. Пусть $\varphi_1(t), \ \varphi_2(t), \ \varphi_3(t), \ \ldots$ – система линейно-независимых $2\pi-$ периодических дважды непрерывно-дифференцируемых скалярных функций. Обозначим $(1 \times k_1)-$ матрицу $\varphi_1(t) = [\varphi_1(t) \ \varphi_2(t) \ \ldots \ \varphi_{k_1}(t)]$. Первое приближение $y_1(t,\varepsilon)$ к периодическому решению уравнения (1) ищем, как $2\pi-$ периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2 y_1(t,\varepsilon)}{dt^2} + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_1(t,\varepsilon) = 0. \tag{3}$$

Приближенное решение уравнения (3) ищем в виде

$$y_1(t,\varepsilon) = y_0(t) + \xi_1(t,\varepsilon), \ \xi_1(t,\varepsilon) = \varphi_1(t) c_1(\varepsilon);$$

потребуем

$$F(c_1(\varepsilon)) = ||\varphi_1''(t) c_1(\varepsilon) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t]\varphi_1(t) c_1(\varepsilon) + \\ + y_0''(t) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_0(t)||^2_{L^2[0,2\pi]} \to \min.$$

Для фиксированной матрицы $\varphi_1(t)$ максимум функции $F(c_1(\varepsilon))$ существует, поскольку непрерывная неотрицательная функция достигает минимума. Необходимое условие минимизации функции $F(c_1(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma_0(\varphi_1(\cdot),\varepsilon) \cdot c_1(\varepsilon) = -\int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t,\varepsilon) y_0''(t) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_0(t) dt,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_1}$ при условии невырожденности $(k_1 \times k_1)-$ матрицы Грама [2]

$$\Gamma_0(\varphi_1(\cdot),\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t,\varepsilon) \cdot \Phi_0(t,\varepsilon) dt.$$

Здесь

$$\Phi_0(t,\varepsilon) = \varphi_1''(t) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] \varphi_1(t)$$

$-(1 \times k_1)-$ матрица. Таким образом, при условии $\det \Gamma_0(\varphi_1(\cdot),\varepsilon) \neq 0$ находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = -[\Gamma_0(\varphi_1(\cdot),\varepsilon)]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t,\varepsilon) y_0''(t) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_0(t) dt,$$

определяющий первое приближение

$$y_1(t,\varepsilon) = y_0(t) + \varphi_1(t) \cdot c_1(\varepsilon)$$

к $2\pi-$ периодическому решению уравнения (1). Следующее приближение к уравнению (3) определим, как

$$\frac{d^2 y_1(t,\varepsilon)}{dt^2} + [h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_1(t,\varepsilon) = 0. \tag{4}$$

Пусть $\psi_1(\varepsilon),\ \psi_2(\varepsilon),\ \psi_3(\varepsilon),\ ...$ – система линейно-независимых непрерывных функций. Обозначим $(1 \times l_1)-$ матрицу

$$\psi_1(\varepsilon) = [\psi_1(\varepsilon)\ \psi_2(\varepsilon)\ ...\ \psi_{l_1}(\varepsilon)].$$

При фиксированном первом приближении $y_1(t, \varepsilon)$ к $2\pi-$ периодическому решению уравнения (1) собственную функцию $2\pi-$ периодической задачи уравнения (4) определяет первое приближение

$$h_1(\varepsilon) = h_0(\varepsilon) + \zeta_1(\varepsilon),\ \zeta_1(\varepsilon) = \psi_1(\varepsilon) \cdot q_1$$

к неизвестной функции $h(\varepsilon)$. Приближенное значение вектора $q_1 \in \mathbb{R}^{l_1}$ ищем из условия

$$F(q_1) := ||\ ||\frac{d^2 y_1(t,\varepsilon)}{dt^2} + [h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_1(t,\varepsilon)||^2_{L^2[0,2\pi]}\ ||^2_{L^2[0,\varepsilon_0]} \to \min .$$

При фиксированной матрице $\psi_1(\varepsilon)$ максимум функции $F(q_1(\varepsilon))$ существует, поскольку непрерывная неотрицательная функция достигает минимума. Необходимое условие минимизации функции $F(q_1)$ приводит к уравнению

$$\Gamma_1(\psi_1(\cdot)) \cdot q_1 = -\int_0^{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} [\psi_1(\varepsilon) \cdot y_1(t,\varepsilon)]^* \cdot$$
$$\cdot\, y_1''(t,\varepsilon) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_1(t,\varepsilon)\, dt\, d\varepsilon,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $q_1 \in \mathbb{R}^{l_1}$ при условии невырожденности $(l_1 \times l_1)-$ матрицы Грама

$$\Gamma_1(\psi_1(\cdot)) = -\int_0^{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} [\psi_1(\varepsilon) \cdot y_1(t,\varepsilon)]^* \cdot [\psi_1(\varepsilon) \cdot y_1(t,\varepsilon)]\, dt\, d\varepsilon.$$

Таким образом, при условии $\det \Gamma_1(\psi_1(\cdot)) \neq 0$ находим вектор

$$q_1 = -[\Gamma_1(\psi_1(\cdot))]^{-1} \cdot \int_0^{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} [\psi_1(\varepsilon) \cdot y_1(t,\varepsilon)]^* \cdot$$
$$\cdot\, y_1''(t,\varepsilon) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_1(t,\varepsilon)\, dt\, d\varepsilon,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение $h_1(\varepsilon)$ к неизвестной функции $h(\varepsilon)$, соответствующее первому приближению к $2\pi-$ периодическому решению $y_1(t,\varepsilon)$ уравнения (4). Обозначим $(1 \times k_2)-$ матрицу

$$\varphi_2(t) = [\varphi_1(t)\ \varphi_2(t)\ ...\ \varphi_{k_2}(t)].$$

Второе приближение

$$y_2(t,\varepsilon) = y_0(t) + \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon),\ \xi_2(t,\varepsilon) = \varphi_2(t) \cdot c_2(\varepsilon),\ c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_2}$$

к периодическому решению уравнения (1) ищем, как $2\pi-$ периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2y_2(t,\varepsilon)}{dt^2}+[h_1(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t]y_2(t,\varepsilon)=0.$$

Обозначим $(1\times k_2)-$ матрицу

$$\Phi_1(t,\varepsilon)=\varphi_2''(t)+[h_1(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t]\varphi_2(t).$$

Необходимое условие минимизации функции

$$F(c_2(\varepsilon)):=\int_0^{2\pi}\{\varphi_2''(t)c_2(\varepsilon)+[h_1(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t]\varphi_2(t)c_2(\varepsilon)+ \\ +y_1''(t,\varepsilon)+[h_1(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t]y_1(t,\varepsilon)\}^2dt$$

приводит к уравнению

$$\Gamma_1(\varphi_2(\cdot),\varepsilon)\cdot c_2(\varepsilon)=-\int_0^{2\pi}\Phi_1^*(t,\varepsilon)\{y_1''(t,\varepsilon)+[h_1(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t]y_1(t,\varepsilon)\}dt,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_2(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{k_2}$ при условии невырожденности $(k_2\times k_2)-$ матрицы Грама [2]

$$\Gamma_1(\varphi_2(\cdot),\varepsilon)=\int_0^{2\pi}\Phi_1^*(t,\varepsilon)\cdot\Phi_1(t,\varepsilon)dt.$$

Таким образом, при условии $\det\Gamma_1(\varphi_2(\cdot),\varepsilon)\neq 0$ находим вектор

$$c_2(\varepsilon)=-[\Gamma_1(\varphi_2(\cdot),\varepsilon)]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\Phi_1^*(t,\varepsilon)y_1''(t,\varepsilon)+[h_1(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t]y_1(t,\varepsilon)dt,$$

определяющий второе приближение $y_2(t,\varepsilon)$ к $2\pi-$ периодическому решению уравнения (1). Обозначим $(1\times l_2)-$ матрицу

$$\psi_2(\varepsilon)=[\psi_1(\varepsilon)\ \psi_2(\varepsilon)\ ...\ \psi_{l_2}(\varepsilon)].$$

Следующее приближение к уравнению (3) определим, как

$$\frac{d^2y_2(t,\varepsilon)}{dt^2}+[h_2(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t]y_2(t,\varepsilon)=0. \qquad (5)$$

При фиксированном втором приближении $y_2(t,\varepsilon)$ к $2\pi-$ периодическому решению уравнения (1) собственную функцию $2\pi-$ периодической задачи для уравнения (5) определяет второе приближение

$$h_2(\varepsilon)=h_0(\varepsilon)+\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon),\ \zeta_2(\varepsilon)=\psi_2(\varepsilon)\cdot q_2,\ q_2\in\mathbb{R}^{l_2}.$$

Приближенное значение вектора $q_2 \in \mathbb{R}^{l_2}$ ищем из условия

$$F(q_2) := ||\ ||\frac{d^2 y_2(t,\varepsilon)}{dt^2} + [h_2(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t] y_2(t,\varepsilon)||^2_{L^2[0,2\pi]}\ ||^2_{L^2[0,\varepsilon_0]} \to \min .$$

Необходимое условие минимизации функции $F(q_2)$ приводит к уравнению

$$\Gamma_2(\psi_2(\cdot)) \cdot q_2 = -\int_0^{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} [\psi_2(\varepsilon)\cdot y_2(t,\varepsilon)]^* \cdot$$
$$\cdot\, y_2''(t,\varepsilon) + [h_1(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t] y_2(t,\varepsilon)\ dt\ d\varepsilon,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $q_2 \in \mathbb{R}^{l_2}$ при условии невырожденности $(l_2 \times l_2)-$ матрицы Грама

$$\Gamma_2(\psi_2(\cdot)) = -\int_0^{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} [\psi_2(\varepsilon)\cdot y_2(t,\varepsilon)]^* \cdot [\psi_2(\varepsilon)\cdot y_2(t,\varepsilon)]\ dt\ d\varepsilon.$$

Таким образом, при условии $\det\Gamma_2(\psi_2(\cdot)) \neq 0$ находим вектор

$$q_2 = -[\Gamma_2(\psi_2(\cdot))]^{-1} \cdot \int_0^{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} [\psi_2(\varepsilon)\cdot y_2(t,\varepsilon)]^* \cdot$$
$$\cdot\, y_2''(t,\varepsilon) + [h_1(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t] y_2(t,\varepsilon)\ dt\ d\varepsilon,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение $h_2(\varepsilon)$ к неизвестной функции $h(\varepsilon)$, соответствующее второму приближению к $2\pi-$ периодическому решению $y_2(t,\varepsilon)$ уравнения (5). Продолжая рассуждения, при условии

$$\det\Gamma_0(\varphi_1(\cdot),\varepsilon) \neq 0,\ \det\Gamma_1(\psi_1(\cdot)) \neq 0,\ \dots,$$
$$\det\Gamma_j(\varphi_{j+1}(\cdot),\varepsilon) \neq 0,\ \det\Gamma_{j+1}(\psi_{j+1}(\cdot)) \neq 0,\ \dots$$

приходим к следующей итерационной процедуре

$$y_{j+1}(t,\varepsilon) = y_0(t) + \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \dots + \xi_{j+1}(t,\varepsilon),\ \xi_{j+1}(t,\varepsilon) = \varphi_{j+1}(t)\cdot c_{j+1}(\varepsilon), \quad (6)$$

$$h_{j+1}(\varepsilon) = h_0(\varepsilon) + \zeta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon) + \dots + \zeta_{j+1}(\varepsilon),\ \zeta_{j+1}(\varepsilon) = \psi_{j+1}(\varepsilon) q_{j+1},$$
$$c_{j+1}(\varepsilon) = -[\Gamma_j(\varphi_{j+1}(\cdot),\varepsilon)]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_j^*(t,\varepsilon) y_j''(t) + [h_j(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t] y_j(t) dt,$$
$$q_{j+1} = -[\Gamma_{j+1}(\psi_{j+1}(\cdot))]^{-1} \cdot \int_0^{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} [\psi_{j+1}(\varepsilon)\cdot y_{j+1}(t,\varepsilon)]^* \times$$
$$\times y_{j+1}''(t,\varepsilon) + [h_j(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t] y_{j+1}(t,\varepsilon)\ dt\ d\varepsilon,\ \dots,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots .$$

Здесь

$$\Gamma_j\Big(\varphi_{j+1}(\cdot),\varepsilon\Big) = \int_0^{2\pi} \Phi_j^*(t,\varepsilon)\cdot\Phi_j(t,\varepsilon) dt$$

$-(k_j \times k_j)-$ матрица Грама,

$$\Phi_j(t,\varepsilon) = \varphi''_{j+1}(t) + [h_j(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t]\varphi_{j+1}(t)$$

$-(1 \times k_j)-$ матрица,

$$\Gamma_{j+1}(\psi_{j+1}(\cdot)) = -\int_0^{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}[\psi_{j+1}(\varepsilon)\cdot y_{j+1}(t,\varepsilon)]^*\cdot[\psi_{j+1}(\varepsilon)\cdot y_{j+1}(t,\varepsilon)]\;dt\;d\varepsilon$$

$-(l_j \times l_j)-$ матрица Грама. Итерационная процедура (6) задает последовательность отображений

$$(y_j(t,\varepsilon), h_j(\varepsilon)) \to (y_{j+1}(t,\varepsilon), h_j(\varepsilon)),\;\; (y_{j+1}(t,\varepsilon), h_j(\varepsilon)) \to (y_{j+1}(t,\varepsilon), h_{j+1}(\varepsilon)),$$

определяемую оператором $\Upsilon(y(t,\varepsilon), h(\varepsilon))$:

$$(y_{j+1}(t,\varepsilon), h_{j+1}(\varepsilon)) = \Upsilon(y_j(t,\varepsilon), h_j(\varepsilon))\;,\; j = 0,1,2,\;\dots\,.$$

Если оператор $\Upsilon(y(t,\varepsilon), h(\varepsilon))$ является сжимающим, итерационная процедура (3) сходится к искомому $2\pi-$ периодическому решению $y(t,\varepsilon)$ уравнения (1). Скорость сходимости определяется выбором матриц $\varphi(t)$ и $\psi(\varepsilon)$.

Примем в качестве нулевого приближения $h_0(\varepsilon)$ к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ найденную в статье [12] зависимость

$$h_0(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512}$$

и зафиксируем вектор-строку

$$\varphi_1(t) = [\cos 3t\;\;\cos 5t\;\;\cos 7t\;\;\cos 9t\;\;\cos 11t\;\;\cos 13t\;\;\cos 15t\;].$$

Матрица Грама $\Gamma_0(\varphi(\cdot),\varepsilon)$, соответствующая решению $y_0(t) = \cos t$ порождающей задачи (2), при этом невырождена

$$\begin{aligned}\det\Gamma_0(\varphi(\cdot),\varepsilon) = \pi^7(&11\;085\;160\;826\;497\;180\;631\;040\;000\;+\\ &+2\;424\;878\;930\;796\;258\;263\;040\;000\;\varepsilon + 373\;916\;507\;869\;229\;875\;200\;000\;\varepsilon^2+\\ &+26\;440\;055\;240\;974\;663\;680\;000\varepsilon^3 + 1\;191\;116\;168\;673\;361\;920\;000\varepsilon^4-\\ &-40\;768\;470\;174\;715\;084\;800\;\varepsilon^5 - 5\;501\;736\;152\;727\;552\;000\;\varepsilon^6-\\ &-405\;798\;775\;762\;452\;480\;\varepsilon^7 + \;\dots\;) \neq 0.\end{aligned}$$

Первое приближение к $2\pi-$ периодическому решению уравнения (1) имеет вид

$$y_1(t,\varepsilon) = \cos t + \frac{1}{16}\,\varepsilon\cos 3t + \frac{1}{768}\,\varepsilon^2(-3\cos 3t + \cos 5t) +$$
$$+\frac{1}{73\ 728}\,\varepsilon^3(6\cos 3t - 8\cos 5t + \cos 7t) + \frac{1}{11\ 796\ 480}\,\varepsilon^4(220\cos 3t +$$
$$+30\cos 5t - 15\cos 7t + \cos 9t) + \frac{1}{2\ 831\ 155\ 200}\,\varepsilon^5(-7\ 350\cos 3t + 1\ 575\cos 5t +$$
$$+90\cos 7t - 24\cos 9t + \cos 11t) + \frac{1}{951\ 268\ 147\ 200}\,\varepsilon^6(86\ 625\cos 3t - 75\ 495\cos 5t +$$
$$+6\ 426\cos 7t + 210\cos 9t - 35\cos 11t + \cos 13t) + \frac{1}{426\ 168\ 129\ 945\ 600}\,\varepsilon^7\times$$
$$\times(7\ 808\ 640\cos 3t + 1\ 215\ 396\cos 5t - 417\ 088\cos 7t + 19\ 600\cos 9t + 420\cos 11t -$$
$$-48\cos 13t + \cos 15t) + \frac{1}{81\ 824\ 280\ 949\ 555\ 200}\,\varepsilon^8(-256\ 577\ 328\ \cos 3t +$$
$$+45\ 723\ 664\cos 5t + 2\ 922\ 752\cos 7t - 551\ 040\ \cos 9t + 16\ 560\cos 11t +$$
$$+252\cos 13t - 21\cos 15t) + \frac{1}{192\ 450\ 708\ 793\ 353\ 830\ 400}\,\varepsilon^9\times$$
$$\times(26\ 034\ 292\ 704\cos 3t - 18\ 603\ 639\ 488\cos 5t + 1\ 323\ 587\ 608\cos 7t +$$
$$+47\ 816\ 160\cos 9t - 5\ 747\ 700\cos 11t + 120\ 393\cos 13t + 1\ 368\cos 15t) +$$
$$\frac{1}{172\ 435\ 835\ 078\ 845\ 032\ 038\ 400}\,\varepsilon^{10}(4\ 058\ 226\ 287\ 360\cos 3t +$$
$$+729\ 358\ 953\ 792\cos 5t - 206\ 618\ 491\ 296\cos 7t + 8\ 147\ 567\ 120\cos 9t +$$
$$+191\ 517\ 480\cos 11t - 16\ 013\ 088\cos 13t + 247\ 977\cos 15t) +$$
$$+\varepsilon^{11}\Big(-\frac{81\ 061\ 157\cos 3t}{17\ 954\ 585\ 076\ 930\ 969\ 600} + \frac{181\ 353\ 829\ \cos 5t}{251\ 364\ 191\ 077\ 033\ 574\ 400} +$$
$$+\frac{709\ 399\cos 7t}{13\ 406\ 090\ 190\ 775\ 123\ 968} - \frac{3\ 327\ 547\cos 9t}{402\ 182\ 705\ 723\ 253\ 719\ 040} +$$
$$+\frac{42\ 960\ 523\cos 11t}{205\ 280\ 756\ 046\ 244\ 085\ 760\ 000} + \frac{40\ 262\ 249\cos 13t}{11\ 587\ 688\ 117\ 298\ 386\ 152\ 980\ 480} -$$
$$-\frac{2\ 757\ 719\cos 15t}{12\ 875\ 209\ 019\ 220\ 429\ 058\ 867\ 220}\Big) +$$
$$+\varepsilon^{12}\Big(\frac{322\ 015\ 213\cos 3t}{1\ 340\ 609\ 019\ 077\ 512\ 396\ 800} - \frac{6\ 732\ 848\ 107\cos 5t}{48\ 261\ 924\ 686\ 790\ 446\ 284\ 800} +$$
$$+\frac{1\ 719\ 713\ 743\cos 7t}{193\ 047\ 698\ 747\ 161\ 785\ 139\ 200} + \frac{362\ 377\ 573\cos 9t}{985\ 347\ 629\ 021\ 971\ 611\ 648\ 000} -$$
$$-\frac{12\ 787\ 209\ 087\ 491\cos 11t}{347\ 630\ 643\ 518\ 951\ 584\ 589\ 414\ 400\ 000} +$$
$$+\frac{90\ 390\ 085\ 363\cos 13t}{139\ 052\ 257\ 407\ 580\ 633\ 835\ 765\ 760\ 000} +$$
$$+\frac{16\ 688\ 471\cos 15t}{2\ 076\ 513\ 710\ 619\ 870\ 798\ 614\ 102\ 016}\Big).$$

Для матрицы

$$\psi_1(\varepsilon) = [\varepsilon^4\ \varepsilon^5\ \varepsilon^6\ \varepsilon^7\ \varepsilon^8\ \varepsilon^9]$$

определитель матрицы Грама

$$\det \Gamma_1(\psi(\cdot)) \approx (1\ 088\ 297\ 276\ 104\ 920\ 491\ 438\ 307\ 999\ 875\ 027\\ 880\ 101\ 828\ 561\ 617\ 825\ 797\ 613\ 688\ 820\ 072\ 448)^{-1} \neq 0.$$

Первое приближение к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ имеет вид

$$h_1(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{376\ 047 \cdot \varepsilon^4}{9\ 241\ 731\ 074} - \frac{491\ 513 \cdot \varepsilon^5}{52\ 710\ 210\ 097} + \frac{143\ 112 \cdot \varepsilon^6}{110\ 250\ 694\ 849} - \\ - \frac{47\ 021 \cdot \varepsilon^7}{1\ 032\ 281\ 869\ 967} - \frac{4\ 969 \cdot \varepsilon^8}{546\ 185\ 769\ 157} + \frac{4\ 303 \cdot \varepsilon^9}{2\ 947\ 772\ 240\ 228}.$$

Зафиксируем матрицу

$$\varphi_2(t) = [\cos 3t\ \ \cos 5t\ \ \cos 7t\ \ \cos 9t\ \ \cos 11t\ \ \cos 13t\ \ \cos 15t\ \ \cos 17t\ \ \cos 19t\ ].$$

Второе приближение $y_2(t,\varepsilon) = y_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$ к $2\pi-$ периодическому решению уравнения (1) определяет функция

$$\xi_2(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^8 \cos 17t}{245\ 472\ 842\ 848\ 665\ 632} + \varepsilon^9 (\frac{\cos 15t}{48\ 112\ 677\ 198\ 338\ 455\ 101} - \\ - \frac{\cos 17t}{2\ 209\ 255\ 585\ 637\ 990\ 220} + \frac{\cos 19t}{176\ 740\ 446\ 851\ 039\ 236\ 401}).$$

При этом

$$y_2(t,\varepsilon) = \cos t + \frac{1}{16}\ \varepsilon \cos 3t + \frac{1}{768}\ \varepsilon^2(-3\cos 3t + \cos 5t) + \\ + \frac{1}{73\ 728}\ \varepsilon^3(6\cos 3t - 8\cos 5t + \cos 7t) + \frac{1}{11\ 796\ 480}\ \varepsilon^4(220\cos 3t + \\ + 30\cos 5t - 15\cos 7t + \cos 9t) + \frac{1}{2\ 831\ 155\ 200}\ \varepsilon^5(-7\ 350\cos 3t + 1\ 575\cos 5t +$$

$$
+90\cos 7t-24\cos 9t+\cos 11t)+\frac{1}{951\,268\,147\,200}\,\varepsilon^6(86\,625\cos 3t-75\,495\cos 5t+
$$

$$
+6\,426\cos 7t+210\cos 9t-35\cos 11t+\cos 13t)+
$$

$$
+\frac{1}{426\,168\,129\,945\,600}\,\varepsilon^7(7\,808\,640\cos 3t+1\,215\,396\cos 5t-417\,088\cos 7t+
$$

$$
+19\,600\cos 9t+420\cos 11t-48\cos 13t+\cos 15t)+
$$

$$
+\frac{1}{627\,676\,214\,335\,475\,936\,385\,988\,060\,074\,598}\,\varepsilon^8\times
$$

$$
\times(-1\,968\,211\,441\,083\,579\,268\,857\,856\cos 3t+350\,747\,430\,860\,537\,215\,320\,064\cos 5t+
$$

$$
+22\,420\,507\,574\,425\,725\,435\,904\cos 7t-4\,227\,042\,353\,854\,022\,156\,288\cos 9t+
$$

$$
+127\,032\,196\,174\,184\,464\,384\;\cos 11t+1\,933\,098\,637\,433\,241\,856\cos 13t-
$$

$$
-161\,091\,553\,119\,436\,832\cos 15t+2\,557\,008\,779\,673\,600\cos 17t)+
$$

$$
+\varepsilon^9(\frac{23\,124\,636\,551\,157\,987\,147\,776\cos 3t}{170\,941\,947\,432\,867\,407\,345\,576\,843\,780\,151}-
$$

$$
-\frac{49\,573\,353\,873\,678\,276\,755\,456\cos 5t}{512\,825\,842\,298\,602\,222\,036\,730\,531\,340\,453}+
$$

$$
+\frac{3\,526\,980\,670\,450\,162\,991\,104\cos 7t}{512\,825\,842\,298\,602\,222\,036\,730\,531\,340\,453}+
$$

$$
+\frac{11\,583\,302\,494\,456\,020\,992\cos 9t}{46\,620\,531\,118\,054\,747\,457\,884\,593\,758\,223}-
$$

$$
-\frac{15\,315\,969\,020\,122\,769\,408\cos 11t}{512\,825\,842\,298\,602\,222\,036\,730\,531\,340\,453}+
$$

$$
+\frac{320\,812\,752\,620\,985\,920\cos 13t}{512\,825\,842\,298\,602\,222\,036\,730\,531\,340\,453}+
$$

$$
+\frac{3\,655\,985\,784\,854\,540\cos 15t}{512\,825\,842\,298\,602\,222\,036\,730\,531\,340\,453}-
$$

$$
-\frac{3\,714\,017\,305\,249\,057\cos 17t}{8\,205\,213\,476\,777\,635\,552\,587\,688\,501\,447\,248}+
$$

$$
+\frac{5\,942\,427\,688\,398\,491\cos 19t}{1\,050\,267\,325\,027\,537\,350\,731\,224\,128\,185\,247\,744})+
$$

$$
+\varepsilon^{10}(\frac{619\cos 3t}{26\,301\,584\,573\,107}+\frac{665\cos 5t}{157\,220\,021\,405\,446}-\frac{1\,427\cos 7t}{1\,190\,919\,240\,161\,326}+
$$

$$
+\frac{93\cos 9t}{1\,968\,260\,270\,353\,267}+\frac{2\cos 11t}{1\,800\,732\,080\,213\,723}-\frac{\cos 13t}{10\,768\,431\,115\,775\,110}+
$$

$$
+\frac{\cos 15t}{695\,370\,276\,593\,575\,323})+\varepsilon^{11}(-\frac{48\cos 3t}{10\,631\,726\,903\,339}+\frac{95\cos 5t}{131\,674\,077\,597\,326}+
$$

$$
+\frac{17\cos 7t}{321\,262\,834\,093\,616}-\frac{10\cos 9t}{1\,208\,646\,206\,118\,963}+\frac{\cos 11t}{4\,778\,357\,936\,802\,680}+
$$

$$
+\frac{\cos 13t}{287\,805\,286\,716\,556\,383}-\frac{\cos 15t}{4\,668\,789\,321\,617\,042\,696})+
$$

$$
+\varepsilon^{12}(\frac{17\cos 3t}{70\,774\,151\,047\,074}-\frac{72\cos 5t}{516\,105\,297\,821\,315}+\frac{9\cos 7t}{1\,010\,301\,450\,341\,120}+
$$

$$
+\frac{\cos 9t}{2\,719\,118\,682\,937\,842}-\frac{\cos 11t}{27\,185\,810\,534\,608\,284}+\frac{\cos 13t}{1\,538\,357\,407\,774\,944\,487}+
$$

$$+\frac{\cos 15t}{124\ 428\ 038\ 411\ 659\ 803\ 874}).$$

Для матрицы $\psi_1(\varepsilon)=\psi_2(\varepsilon)$ второе приближение к собственной функции $2\pi-$ периодической задачи для уравнения (1) имеет вид $h_2(\varepsilon)=h_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)$, где

$$\zeta_2(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon^4}{521\ 951\ 999\ 118\ 437\ 173\ 470}+\frac{\varepsilon^5}{1\ 505\ 074\ 632\ 922\ 534\ 715\ 247}-$$
$$-\frac{\varepsilon^6}{6\ 172\ 070\ 407\ 697\ 490\ 935\ 960}+\frac{\varepsilon^7}{498\ 140\ 511\ 714\ 499\ 003\ 560\ 515}-$$
$$-\frac{\varepsilon^8}{1\ 148\ 525\ 508\ 517\ 458\ 982\ 926\ 364}-\frac{\varepsilon^9}{8\ 419\ 625\ 379\ 548\ 339\ 369\ 999\ 741}.$$

При этом

$$h_2(\varepsilon)=1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{32}+\frac{\varepsilon^3}{512}-\frac{49\ 069\ 620\ 853\ 122\ 733\ 632\ 535\ 504\cdot\varepsilon^4}{1\ 205\ 935\ 002\ 347\ 320\ 358\ 093\ 606\ 851\ 695}-$$
$$-\frac{739\ 763\ 748\ 051\ 653\ 752\ 784\ 988\ 614\cdot\varepsilon^5}{79\ 332\ 800\ 113\ 011\ 957\ 966\ 445\ 439\ 248\ 959}+$$
$$+\frac{883\ 297\ 340\ 186\ 403\ 212\ 576\ 412\ 671\cdot\varepsilon^6}{680\ 475\ 051\ 105\ 599\ 093\ 883\ 469\ 360\ 870\ 040}-$$
$$-\frac{23\ 423\ 065\ 001\ 327\ 456\ 614\ 137\ 105\ 848\cdot\varepsilon^7}{514\ 221\ 418\ 938\ 961\ 300\ 622\ 006\ 615\ 245\ 553\ 005}-$$
$$-\frac{5\ 707\ 023\ 251\ 823\ 254\ 232\ 346\ 871\ 873\cdot\varepsilon^8}{627\ 308\ 288\ 266\ 042\ 889\ 352\ 835\ 052\ 033\ 355\ 148}+$$
$$+\frac{883\ 649\ 951\ 419\ 426\ 862\ 471\ 625\ 495\cdot\varepsilon^9}{605\ 344\ 828\ 462\ 237\ 393\ 159\ 057\ 236\ 667\ 067\ 828}.$$

Для проверки точности найденного второго приближения к периодическому решению уравнения Матье и его собственной функции найдем невязки этого приближения в самом уравнении Матье

$$\Delta_2(\varepsilon)=||y_2''(t,\varepsilon)+(h_2(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t)\cdot y_2(t,\varepsilon)||_{C[0;2\pi]},$$

а также сравним эти невязки с отклонениями

$$\Delta_r(\varepsilon)=||y_h''(t,\varepsilon)+(h_r(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t)\cdot y_r(t,\varepsilon)||_{C[0;2\pi]},$$
$$\Delta_h(\varepsilon)=||y_h''(t,\varepsilon)+(h_h(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t)\cdot y_h(t,\varepsilon)||_{C[0;2\pi]},$$

соответствующими функциям [10, с. 17], [5, с. 335]

$$h_h(\varepsilon)=1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{32}+\frac{\varepsilon^3}{512}-\frac{\varepsilon^4}{24\ 576},$$
$$h_r(\varepsilon)=1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{32}+\frac{\varepsilon^3}{512}-\frac{\varepsilon^4}{24\ 576}-\frac{11\ \varepsilon^5}{1\ 179\ 648}$$

и решению уравнения Матье

$$y_r(t,\varepsilon) = \cos t + \frac{1}{16}\,\varepsilon\cos 3t + \frac{1}{768}\,\varepsilon^2(-3\cos 3t + \cos 5t) + \\ + \frac{1}{73\ 728}\,\varepsilon^3(6\cos 3t - 8\cos 5t + \cos 7t) + \frac{1}{11\ 796\ 480}\,\varepsilon^4(220\cos 3t + \\ + 30\cos 5t - 15\cos 7t + \cos 9t),$$

полученными в монографиях [5, 9, 10]. Вторые приближения к периодическому решению уравнения Матье $y_2(t,\varepsilon)$ и его собственной функции $h_2(\varepsilon)$ значительно превосходят по точности ранее известные приближения

$$\Delta_2(1,0) \approx 3,47\ 910\cdot 10^{-11},\ \Delta_h(1,0) \approx 3,52\ 821\cdot 10^{-5},\ \Delta_r(1,0) \approx 3,18\ 803\cdot 10^{-5},$$
$$\Delta_2(0,5) \approx 3,03\ 177\cdot 10^{-14},\ \Delta_h(0,5) \approx 1,10\ 346\cdot 10^{-6},\ \Delta_r(0,5) \approx 9,89\ 857\cdot 10^{-7},$$
$$\Delta_2(0,1) \approx 2,23\ 183\cdot 10^{-16},\ \Delta_h(0,1) \approx 3,53\ 263\cdot 10^{-10},\ \Delta_r(0,1) \approx 3,14\ 899\cdot 10^{-10}.$$

Следует отметить актуальность изучения различных краевых задач для уравнения Матье, свидетельством чего служат публикации [1, 7], в том числе и приведенные в этих статьях обзоры литературы.

Список цитируемых источников

1. *Абрамов А.А., Курочкин С.В.* Вычисление решений уравнения Матье и связанных с ними величин // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47, — № 7. С. 414–423.
2. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 408 с.
3. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
4. *Гребеников Е.А., Митропольский Ю.А., Рябов Ю.А.* Введение в резонансную аналитическую механику. — М.: Янус, 1999. — 302 с.
5. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
6. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. — М.: Изд.-во иностр. лит., 1961. — 778 с.
7. *Курин А.Ф.* Задача Коши для уравнения Матье при параметрическом резонансе // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2008. — Т. 48., № 4. — С. 633–650.
8. *Лыкова О.Б., Бойчук А.А.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журнал. — 1988. — **40**, № 1. — С. 62–69.
9. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Часть 2. Трансцендентные функции. — М.: ГИФМЛ, 1963. — 515 с.
10. *Хаяси Т.* Вынужденные колебания в нелинейных системах. — М.: Иностр. лит., 1957. — 204 с.
11. *Чуйко С.М.* О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. — 2008. — Т. 11, № 4. — С. 554–573.
12. *Чуйко С.М., Бойчук И.А.* Нелинейные нетеровы краевые задачи в критическом случае // Нелінійні коливання. — 2009. — Т. 12. — № 4.

Получена 15.06.2009