Динамические системы, вып. 27 (2009), 127–142

УДК 517.9

Автономные краевые задачи в частном критическом случае[1]

С.М. Чуйко, О.В. Старкова

Славянский государственный педагогический университет
Славянск 84112. *E-mail: chujko-slav@inbox.ru*

Аннотация. Найдены необходимые и достаточные условия существования решений нелинейной автономной нетеровой краевой задачи в частном критическом случае. Характерной особенностью поставленной задачи является невозможность непосредственного применения традиционной схемы исследования и построения решений критических краевых задач, созданной в работах И.Г. Малкина, А.М. Самойленко, Е.А. Гребеникова, Ю.А. Рябова и А.А. Бойчука. Для построения решений нелинейной нетеровой краевой задачи в частном критическом случае предложена итерационная схема, построенная по схеме метода наименьших квадратов. Эффективность предложенной техники продемонстрирована на примере анализа периодической задачи для уравнения типа Хилла.

Ключевые слова: автономная краевая задача, критический случай, метод наименьших квадратов, итерационная схема, псевдообращение матриц, ортопроектор.

1. Постановка задачи

Исследована задача о построении решений

$$z(t,\varepsilon): \ z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b(\varepsilon)], \ z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \ b(\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$$

автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dz/dt = Az + f + \varepsilon Z(z,\varepsilon), \tag{1}$$

удовлетворяющих краевому условию [2, 10, 12]

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Решения нетеровой ($m \neq n$) задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения

$$z_0(t): \ z_0(\cdot) \in C^1[a,b^*], \ b^* = b(0)$$

порождающей задачи

$$dz_0/dt = Az_0 + f, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Германии (DFG; номер регистрации GZ:436UKR 13/103/0-1) и Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0109U000381)

Здесь A — постоянная $(n \times n)$-матрица, $Z(z,\varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по z в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелинейный векторные функционалы $\ell z(\cdot,\varepsilon)$, $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b(\varepsilon)] \to \mathbb{R}^m$, причем второй функционал непрерывно дифференцируем по z и по малому параметру ε в малой окрестности решения порождающей задачи и на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. В критическом случае $(P_{Q^*} \neq 0)$ при условии $P_{Q^*}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0$ порождающая задача (3) имеет семейство решений [12]

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[f;\alpha](t), \quad X_r(t) = X(t)P_{Q_r}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1$, $n - n_1 = r$, P_{Q^*} — $(m \times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$, $X(t)$ — нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (3); P_{Q_r} — $(n\times r)$-матрица, составленная из r линейно независимых столбцов $(n\times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$;

$$G[f;\alpha](t) = X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} + K[f](t)$$

— обобщенный оператор Грина задачи (3), Q^+ — псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу [12],

$$K[f](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f\,ds$$

— оператор Грина задачи Коши для дифференциальной системы (3), I_n — единичная $(n\times n)$-матрица. В критическом случае задача (1), (2) существенно отличается от аналогичных неавтономных краевых задач; в отличие от последних, правый конец $b(\varepsilon)$ промежутка $[a,b(\varepsilon)]$, на котором ищем решение задачи (1), (2), неизвестен и подлежит определению в процессе построения решения. Совершая в задаче (1), (2) замену переменной [2]

$$t = a+(\tau-a)(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)), \quad b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^*-a)\beta(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0], \quad \beta(0) = \beta^*, \tag{4}$$

приходим к задаче об отыскании решения $z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b^*]$, $z(\tau,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ системы дифференциальных уравнений

$$dz/d\tau = Az + f + \varepsilon\{\beta(\varepsilon)A(z(\tau,\varepsilon)+f) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}, \tag{5}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))(\alpha + \varepsilon\tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)). \tag{6}$$

Здесь $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный и $\tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелинейный векторные функционалы

$$\ell z(\cdot,\varepsilon), \;\; \tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b^*] \to \mathbb{R}^m.$$

Решение задачи (5), (6) $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_r) + x(\tau,\varepsilon)$ ищем в окрестности решения порождающей задачи (3). Для нахождения возмущения

$$x(\tau,\varepsilon): \ x(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b^*], \quad x(\tau,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad x(\tau,0) \equiv 0$$

получаем задачу

$$dx/d\tau = Ax + \varepsilon\{\beta(\varepsilon)(A(z_0+x)+f) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))Z(z_0+x,\varepsilon)\}, \tag{7}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\alpha\beta(\varepsilon) + \varepsilon[1+\varepsilon\beta(\varepsilon)]\tilde{J}(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{8}$$

Оставляя только линейно независимые строки условия разрешимости

$$P_{Q^*}\{\alpha\beta(\varepsilon) + [1+\varepsilon\beta(\varepsilon)]\tilde{J}(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ - \ell K\{\beta(\varepsilon)[A(z_0+x)+f] + [1+\varepsilon\beta(\varepsilon)]Z(z_0+x,\varepsilon)\}(\cdot)\} = 0$$

задачи (7), (8), получаем эквивалентное условие

$$P_{Q^*_\rho}\{\alpha\beta(\varepsilon) + [1+\varepsilon\beta(\varepsilon)]\tilde{J}(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ - \ell K\{\beta(\varepsilon)[A(z_0+x)+f] + [1+\varepsilon\beta(\varepsilon)]Z(z_0+x,\varepsilon)\}(\cdot)\} = 0. \tag{9}$$

Здесь $P_{Q^*_\rho}$ — $(\rho \times m)$-матрица, составленная из ρ линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*}. Обозначая

$$\varphi_0(c^*) = \alpha\beta^* + J(z_0(\cdot,c_r^*),0), \quad f_0(s,c^*) = \beta^*[Az_0(s,c_r^*)+f] + Z(z_0(s,c_r^*),0),$$

аналогично [2], приходим к необходимому условию разрешимости задачи (7), (8).

Лемма. *Если краевая задача* (1), (2) *в критическом случае* ($P_{Q^*} \neq 0$) *имеет решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t,0) = z_0(t,c_r^*)$, *то вектор* $(c_r^*,\beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$ *удовлетворяет уравнению*

$$F(c_r^*,\beta^*) = P_{Q^*_\rho}\{\varphi_0(c^*) - \ell K[f_0(s,c^*)](\cdot)\} = 0. \tag{10}$$

Предположим, что уравнение (10) имеет действительный корень $(c_r^*,\beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$, для которого

$$\left.\frac{\partial F(c_r,\beta)}{\partial c_r}\right|_{\substack{c_r = c_r^*,\\ \beta = \beta^*}} \equiv 0, \qquad \left.\frac{F(c_r,\beta)}{\partial \beta}\right|_{\substack{c_r = c_r^*,\\ \beta = \beta^*}} \neq 0. \tag{11}$$

В этом случае традиционная схема анализа автономных краевых задач [2] не работает, поскольку для краевой задачи (1), (2) не может иметь место ни один из критических случаев — первого, второго или более высокого порядка. С другой стороны, задача (1), (2) не представляет также особый критический случай [9], поскольку уравнение (10) не обращается в тождество.

2. Достаточное условие существования решения

Для нахождения решения $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon)$ задачи (5), (6) разлагаем функцию $Z(z,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(\tau,c_r^*) = X_r(\tau)c_r^* + G[f;\alpha](\tau)$ и точки $\varepsilon = 0$:

$$Z(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = Z(z_0(\tau,c_r^*),0) + \\ + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*)) + R_1(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon);$$

здесь

$$A_1(\tau) = \frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\substack{z\, =\, z_0(\tau,c_r^*),\\ \varepsilon\, =\, 0}}, \quad A_2(z_0(\tau,c_r^*)) = \frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{z\, =\, z_0(\tau,c_r^*),\\ \varepsilon\, =\, 0}}.$$

Аналогично, используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по первому аргументу векторного функционала $J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ и непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по второму аргументу, выделяем линейные части этого функционала [3]

$$\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) = \frac{\partial \tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\bigg|_{\substack{z\, =\, z_0(\tau,c_r^*),\\ \varepsilon\, =\, 0}}, \quad \ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) = \frac{\partial \tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{z\, =\, z_0(\tau,c_r^*),\\ \varepsilon\, =\, 0}}$$

и член $J(z_0(\cdot,c_r^*),0) = J(z(\cdot,0),0)$ нулевого порядка по ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$\tilde{J}(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \\ + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).$$

С учетом разложений нелинейностей и равенства (10) условие разрешимости (9) задачи (7), (8) принимает вид

$$P_{Q_\rho^*}\{\alpha\bar{\beta}(\varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon)J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))[\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \\ + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)] - \ell K\{\bar{\beta}(\varepsilon)[Az_0(s,c_r^*) + f] + \varepsilon\beta(\varepsilon)Z(z_0(s,c_r^*),0) + \beta(\varepsilon)Ax(s,\varepsilon) + \\ + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))[A_1(s)x(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(s,c_r^*)) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\}(\cdot)\} = 0.$$

Обозначим $(\rho\times 1)$-матрицу $\mathfrak{B}_0 = P_{Q_\rho^*}\{\alpha - \ell K[Az_0(\tau,c_r^*) + f](\cdot)\}$. Пусть $P_{\mathfrak{B}_0^*}$ — $(\rho\times\rho)$-матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^\rho \to N(\mathfrak{B}_0^*)$. Для нахождения функции $\bar{\beta}(\varepsilon) = \beta(\varepsilon) - \beta^*$ приходим к уравнению

$$\mathfrak{B}_0\bar{\beta}(\varepsilon) = -P_{Q_\rho^*}\{\varepsilon\beta(\varepsilon)J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))[\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + \\ + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)] - \ell K\{\varepsilon\beta(\varepsilon)Z(z_0(s,c_r^*),0) + \beta(\varepsilon)Ax(s,\varepsilon) + \\ + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))[A_1(s)x(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(s,c_r^*)) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\}(\cdot)\},$$

разрешимому при условии $P_{\mathfrak{B}_0^*}P_{Q_\rho^*}=0$. При этом задача (7), (8) имеет по меньшей мере одно решение, определяемое операторной системой

$$x(\tau,\varepsilon)=X_r(\tau)c_r(\varepsilon)+x^{(1)}(\tau,\varepsilon), \tag{12}$$

$$\begin{gathered}
x^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon G\{\bar\beta(\varepsilon)[Az_0(s,c_r^*)+f]+\varepsilon\beta(\varepsilon)Z(z_0(s,c_r^*),0)+\beta(\varepsilon)Ax(s,\varepsilon)+\\
+(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))[A_1(s)x(s,\varepsilon)+\varepsilon A_2(z_0(s,c_r^*))+R_1(z_0(s,c_r^*)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\\
\alpha\bar\beta(\varepsilon)+\varepsilon\beta(\varepsilon)J(z_0(\cdot,c_r^*),0)+(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))[\ell_1x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))+\\
+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)]\}(\tau),\\
\bar\beta(\varepsilon)=-\mathfrak{B}_0^+P_{Q_\rho^*}\{\varepsilon\beta(\varepsilon)J(z_0(\cdot,c_r^*),0)+(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))[\ell_1x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))+\\
+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)]-\ell K\{\varepsilon\beta(\varepsilon)Z(z_0(s,c_r^*),0)+\beta(\varepsilon)Ax(s,\varepsilon)+\\
+(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))[A_1(s)x(s,\varepsilon)+\varepsilon A_2(z_0(s,c_r^*))+R_1(z_0(s,c_r^*)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\}(\cdot)\}.
\end{gathered}$$

Для построения этого решения в случае (11) применима итерационная схема, соответствующая методу простых итераций.

Теорема. *В критическом случае* ($P_{Q^*}\neq 0$) *для корня* $(c_r^*,\ \beta^*)\in\mathbb{R}^{r+1}$ *уравнения* $F(c^*)=0$ *задача* (1), (2) *при условиях* (11) *и* $P_{\mathfrak{B}_0^*}P_{Q_\rho^*}=0$ *имеет по меньшей мере одно решение, при* $\varepsilon=0$ *обращающееся в порождающее* $z(\tau,0)=z_0(\tau,c_r^*)$.

3. Периодическая задача для уравнения типа Хилла

Метод простых итераций отличают простота и численная устойчивость, однако построение приближенных решений связано с быстро увеличивающейся от итерации к итерации сложностью вычислений. На примере периодической задачи для уравнения типа Хилла [4, 11]

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\varepsilon Y(y,\varepsilon),\quad y(0,\varepsilon)-y(T_1(\varepsilon),\varepsilon)=0,\quad \frac{dy(0,\varepsilon)}{dt}-\frac{dy(T_1(\varepsilon),\varepsilon)}{dt}=0. \tag{13}$$

продемонстрируем практический способ построения модифицированной итерационной процедуры для нахождения приближенных решений

$$y(t,\varepsilon):\ y(\cdot,\varepsilon)\in C^2[0,T_1(\varepsilon)],\ T_1(0)=2\pi,\ y(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$$

в случае (11) аналогично [9] с использованием метода наименьших квадратов [7], обеспечивающих большую точность при меньшем числе итераций. Решение задачи (13) ищем в малой окрестности решения $y_0(t),\ y_0(\cdot)\in C^2[0,2\pi]$ порождающей задачи

$$\frac{d^2y_0}{dt^2}+y_0=0,\quad y_0(0)-y_0(2\pi)=0,\quad \frac{dy_0(0)}{dt}-\frac{dy_0(2\pi)}{dt}=0. \tag{14}$$

Здесь $Y(y,\varepsilon)$ — нелинейная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной y в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Существенным отличием автономной задачи (13) от аналогичной неавтономной периодической задачи является тот факт, что любое решение $z(t,\varepsilon)$ задачи (13) существует наряду с целой серией решений $z(t+h,\varepsilon)$, отличающихся от исходного сдвигом по независимой переменной. Этот факт позволяет [5] зафиксировать начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающей задачи (14) стало однопараметричным, например, $y_0(t) = \hat{c}\cos t,\ \hat{c} \in \mathbb{R}$. Предположим, что для задачи (13) имеет место критический случай. Уравнение для порождающих амплитуд (10) при этом принимает вид

$$F(\hat{c}^*,\beta^*) := \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} (Y(y_0(t,\hat{c}^*)) - 2\beta^* y_0(t,\hat{c}^*))\, dt = 0.$$

Предположим также, что уравнение для порождающих амплитуд имеет имеет действительный корень $(\hat{c}^*,\beta^*) \in \mathbb{R}^2$, для которого выполнены условия (11)

$$\left.\frac{\partial F(\hat{c},\beta)}{\partial c_r}\right|_{\substack{\hat{c}\,=\,\hat{c}^*,\\ \beta\,=\,\beta^*}} \equiv 0, \qquad \left.\frac{F(\hat{c},\beta)}{\partial \beta}\right|_{\substack{\hat{c}\,=\,\hat{c}^*,\\ \beta\,=\,\beta^*}} \neq 0.$$

Оставляя одну линейно независимую строку уравнения для порождающих амплитуд $F(\hat{c}^*,\beta^*) = 0$, например, первую, приходим к скалярному уравнению

$$\hat{F}(\hat{c}^*,\beta^*) := \int_0^{2\pi} (Y(y_0(t,\hat{c}^*)) - 2\beta^* y_0(t,\hat{c}^*)) \cos t\, dt = 0.$$

Условие (11) при этом гарантирует неравенство

$$\mathfrak{B}_0 := \left.\frac{\partial \hat{F}(\hat{c},\beta)}{\partial \beta}\right|_{\substack{\hat{c}\,=\,\hat{c}^*,\\ \beta\,=\,\beta^*}} \neq 0.$$

Последнее неравенство обеспечивает однозначную разрешимость операторной системы (12) и, в свою очередь, существование единственного периодического решения уравнения типа Хилла (13) в малой окрестности 2π-периодического порождающего решения

$$y_0(t,\hat{c}^*) = \hat{c}^* \cos t, \quad \hat{c}^* \in \mathbb{R}.$$

Представим период искомого решения $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))$ через новую неизвестную $\beta(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$. Величина $\beta(\varepsilon),\ \beta(0) = \beta^*$ подлежит определению в процессе нахождения решения задачи (13). Замена независимой переменной (4) в случае периодической задачи принимает вид

$$t = \tau(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)). \tag{15}$$

Таким образом, приходим к задаче

$$\frac{d^2 y(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2} + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2 y(\tau,\varepsilon) = \varepsilon(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2 Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon), \tag{16}$$

$$y(0,\varepsilon)-y(2\pi,\varepsilon)=0,\quad \frac{dy(0,\varepsilon)}{d\tau}-\frac{dy(2\pi,\varepsilon)}{d\tau}=0. \tag{17}$$

Искомое решение задачи (16), (17) ищем в в виде

$$y(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x(\tau,\varepsilon).$$

Отклонение от порождающего решения

$$x(\tau,\varepsilon):\ x(\cdot,\varepsilon)\in C^2[0,2\pi],\quad x(\tau,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$$

определяет периодическая краевая задача

$$\frac{d^2x(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}+(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2x(\tau,\varepsilon)=\varepsilon(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2Y(y_0(\tau,\hat{c}^*)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-\{\frac{d^2y_0(\tau,\hat{c}^*)}{d\tau^2}+(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2\frac{dy_0(\tau,\hat{c}^*)}{d\tau}\}, \tag{18}$$

$$x(0,\varepsilon)-x(2\pi,\varepsilon)=0,\quad \frac{dx(0,\varepsilon)}{d\tau}-\frac{dx(2\pi,\varepsilon)}{d\tau}=0. \tag{19}$$

Используя непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Y(y,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $y_0(\tau,\hat{c}^*)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0$:

$$Y(y_0(\tau,\hat{c}^*)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+$$
$$+\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))x(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))+\mathcal{R}(y_0(\tau,\hat{c}^*)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))=\left.\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y}\right|_{\substack{y\,=\,y_0(\tau,\hat{c}^*),\\ \varepsilon\,=\,0}},\quad \mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))=\left.\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{y\,=\,y_0(\tau,\hat{c}^*),\\ \varepsilon\,=\,0}}.$$

Первое приближение к решению задачи (16), (17)

$$y_1(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_1(\tau,\varepsilon)$$

ищем, как решение краевой задачи

$$\frac{d^2x_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}+x_1(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\{Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))x_1(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))\}, \tag{20}$$

$$x_1(0,\varepsilon)-x_1(2\pi,\varepsilon)=0,\quad \frac{dx_1(0,\varepsilon)}{d\tau}-\frac{dx_1(2\pi,\varepsilon)}{d\tau}=0. \tag{21}$$

Пусть $\varphi_1(\tau),\ \varphi_2(\tau),\ \dots\ ,\ \varphi_\mu(\tau),\ \dots$ — система линейно независимых дважды непрерывно дифференцируемых 2π-периодических скалярных функций. Приближение к решению краевой задачи (20), (21) ищем в виде

$$x_1(\tau,\varepsilon)\approx\xi_1(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau)c_1(\varepsilon),\quad c_1(\varepsilon)\in\mathbb{R}^\mu;$$

здесь $\varphi(\tau) = [\varphi_1(\tau) \ \ \varphi_2(\tau) \ \ \ldots \ \ \varphi_\mu(\tau)]$ — $(1 \times \mu)$-матрица. Потребуем

$$\Theta(c_1(\varepsilon)) = ||[\varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(\tau, \hat{c}^*)) - 1]\xi_1(\tau, \varepsilon) + \\ + \varepsilon[Y(y_0(\tau, \hat{c}^*), 0) + \varepsilon \mathcal{A}_2(y_0(\tau, \hat{c}^*))] - \xi_1''(\tau, \varepsilon)||^2_{L^2[0,2\pi]} \to \min$$

при фиксированной матрице $\varphi(t)$. Обозначим $(1 \times \mu)$-матрицу

$$\mathcal{F}_1(\tau, \varepsilon) = [\varepsilon \mathcal{A}_1(y_0(\tau, \hat{c}^*)) - 1]\varphi(\tau) - \varphi''(\tau).$$

Необходимое условие минимизации функции $\Theta(c_1(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon))c_1(\varepsilon) = -\varepsilon \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau, \varepsilon)[Y(y_0(\tau, \hat{c}^*), 0) + \varepsilon \mathcal{A}_2(y_0(\tau, \hat{c}^*))]\, d\tau,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\mu$ при условии невырожденности $(\mu \times \mu)$-матрицы Грама [1]

$$\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau, \varepsilon)\mathcal{F}_1(\tau, \varepsilon)\, d\tau.$$

Таким образом, при условии $\det[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon))] \neq 0$ находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon))]^{-1} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau, \varepsilon)[Y(y_0(\tau, \hat{c}^*), 0) + \varepsilon \mathcal{A}_2(y_0(\tau, \hat{c}^*))]\, d\tau,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$\xi_1(\tau, \varepsilon) = \varphi(\tau)c_1(\varepsilon) \approx x_1(\tau, \varepsilon)$$

к решению краевой задачи (20), (21). Пусть $\psi_1(\varepsilon), \ \psi_2(\varepsilon), \ \ldots \ \psi_\lambda(\varepsilon), \ \ldots$ — система линейно-независимых непрерывных функций. Первое приближение

$$\beta_1(\varepsilon) = \beta^* + \bar{\beta}_1(\varepsilon), \quad \bar{\beta}_1(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon), \quad \zeta_1(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)q_1, \quad q_1 \in \mathbb{R}^\lambda$$

к функции $\beta(\varepsilon)$ определим, минимизируя невязку в решении краевой задачи

$$y_0''(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1''(\tau, \varepsilon) + (1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))(y_0(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1(\tau, \varepsilon)) = \\ = \varepsilon(1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))Y(y_0(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1(\tau, \varepsilon), \varepsilon), \quad (22)$$

$$\xi_1(0, \varepsilon) - \xi_1(2\pi, \varepsilon) = 0, \ \ \xi_1'(0, \varepsilon) - \xi_1'(2\pi, \varepsilon) = 0. \quad (23)$$

Потребуем

$$\Theta(q_1) = || \ ||\varepsilon(1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))Y(y_0(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1(\tau, \varepsilon), \varepsilon) - \\ - (y_0''(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1''(\tau, \varepsilon)) - (1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))(y_0(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1(\tau, \varepsilon))||_{L[0,\varepsilon_0]}||^2_{L^2[a,b^*]} \to \min$$

при фиксированных матрице $\psi(\varepsilon)$ и первом приближении $\xi_1(\tau,\varepsilon)$ к частному решению краевой задачи (22), (23). Введем $(1\times\lambda)$-матрицу

$$\mathfrak{F}_1(\tau,\varepsilon)=2\varepsilon\{\varepsilon Y(y_0(\tau,\hat{c}^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-(y_0(\tau,\hat{c}^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon))\}\Psi(\varepsilon).$$

Необходимое условие минимума функции $\Theta(q_1)$ приводит к уравнению

$$\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot))q_1=\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0}\mathfrak{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\{(y_0''(\tau,\hat{c}^*)+\xi_1''(\tau,\varepsilon))+ \\ +(1+2\varepsilon\beta^*)[y_0(\tau,\hat{c}^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon)-\varepsilon Y(y_0(\tau,\hat{c}^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\}\,d\tau\,d\varepsilon,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $q_1\in\mathbb{R}^\lambda$ при условии невырожденности $(\lambda\times\lambda)$-матрицы Грама

$$\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot))=\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0}\mathfrak{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\mathfrak{F}_1(\tau,\varepsilon)\,d\tau\,d\varepsilon.$$

Таким образом, при условии

$$\det[\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot))]\neq 0$$

находим вектор

$$q_1=[\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot))]^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0}\mathfrak{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\{(y_0''(\tau,\hat{c}^*)+\xi_1''(\tau,\varepsilon))+ \\ +(1+2\varepsilon\beta^*)[y_0(\tau,\hat{c}^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon)-\varepsilon Y(y_0(\tau,\hat{c}^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\}\,d\tau\,d\varepsilon,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) первое приближение

$$\bar{\beta}_1(\varepsilon)\approx\zeta_1(\varepsilon),\quad \zeta_1(\varepsilon)=\Psi(\varepsilon)q_1(\varepsilon),\quad q_1(\varepsilon)\in\mathbb{R}^\lambda$$

к функции $\bar{\beta}(\varepsilon)$. Второе приближение к решению краевой задачи (16), (17) ищем как отклонение от первого

$$y_2(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_2(\tau,\varepsilon),\quad x_2(\tau,\varepsilon)=\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon), \\ \xi_2(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau)c_2(\varepsilon),\quad c_2(\varepsilon)\in\mathbb{R}^\mu.$$

Предположим, что найденное первое приближение $y_1(\tau,\varepsilon)\approx y_0(\tau,\hat{c}^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon)$ принадлежит области определения функции $Y(y,\varepsilon)$. Используя непрерывную дифференцируемость по $y(\tau,\varepsilon)$ функции $Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в окрестности первого приближения $y_1(\tau,\varepsilon)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $\xi_2(\tau,\varepsilon)=0$ и $\varepsilon=0$:

$$Y(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+$$

$$+\mathcal{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon))\xi_2(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon))+\mathcal{R}(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon))=\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y}\bigg|_{\substack{y\,=\,y_1(\tau,\varepsilon),\\ \varepsilon\,=\,0}},\quad \mathcal{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon))=\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{y\,=\,y_1(\tau,\varepsilon),\\ \varepsilon\,=\,0}}.$$

Второе приближение к решению краевой задачи (16), (17) ищем, как решение краевой задачи

$$\frac{d^2y_2(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}+(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2y_2(\tau,\varepsilon)=\varepsilon(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2\{Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+$$
$$+\mathcal{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon))\xi_2(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon))\},\quad (24)$$

$$y_2(0,\varepsilon)-y_2(2\pi,\varepsilon)=0,\quad \frac{dy_2(0,\varepsilon)}{d\tau}-\frac{dy_2(2\pi,\varepsilon)}{d\tau}=0.\quad (25)$$

Обозначим $(1\times\mu)$-матрицу

$$\mathcal{F}_2(\tau,\varepsilon)=(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon))-1]\varphi(\tau)-\varphi''(\tau).$$

Необходимое условие минимизации невязки в решении задачи второго приближения приводит к уравнению

$$\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon))c_2(\varepsilon)=-\varepsilon\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2[Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+$$
$$+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon))]-(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2y_1(\tau,\varepsilon)-\frac{d^2y_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\}\,d\tau,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_2(\varepsilon)\in\mathbb{R}^\mu$ при условии невырожденности $(\mu\times\mu)$-матрицы Грама

$$\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon))=\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\mathcal{F}_2(\tau,\varepsilon)\,d\tau.$$

Таким образом, при условии

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon))]\neq 0$$

находим вектор

$$c_2(\varepsilon)=[\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2[Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+$$
$$+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon))]-(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2y_1(\tau,\varepsilon)-\frac{d^2y_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\}\,d\tau,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$y_2(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_2(\tau,\varepsilon), \quad x_2(\tau,\varepsilon) = \xi_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon), \quad \xi_2(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_2(\varepsilon)$$

к решению краевой задачи (24), (25). Второе приближение

$$\beta_2(\varepsilon) = \beta^* + \bar{\beta}_2(\varepsilon), \quad \bar{\beta}_2(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon), \quad \zeta_2(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)q_2, \quad q_2 \in \mathbb{R}^\lambda$$

к функции $\beta(\varepsilon)$ определим, минимизируя невязку в решении краевой задачи

$$y_2''(\tau,\varepsilon) + [1 + 2\varepsilon(\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon))]y_2(\tau,\varepsilon) = \\ = \varepsilon[1 + 2\varepsilon(\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon))]Y(y_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon), \quad (26)$$

$$y_2(0,\varepsilon) - y_2(2\pi,\varepsilon) = 0, \quad y_2'(0,\varepsilon) - y_2'(2\pi,\varepsilon) = 0. \quad (27)$$

Обозначим $(1 \times \lambda)$-матрицу

$$\mathfrak{F}_2(\tau,\varepsilon) = 2\varepsilon\{\varepsilon Y(y_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon) - y_2(\tau,\varepsilon)\}\Psi(\varepsilon).$$

Необходимое условие минимизации невязки в решении задачи (26), (27) приводит к уравнению

$$\Gamma(\mathfrak{F}_2(\cdot,\cdot))q_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\{y_2''(\tau,\varepsilon) + \\ + (1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))y_2(\tau,\varepsilon) - \varepsilon(1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))Y(y_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}\,d\tau\,d\varepsilon,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $q_2 \in \mathbb{R}^\lambda$ при условии невырожденности $(\lambda \times \lambda)$-матрицы Грама

$$\Gamma(\mathfrak{F}_2(\cdot,\cdot)) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\mathfrak{F}_2(\tau,\varepsilon)\,d\tau\,d\varepsilon.$$

Таким образом, при условии

$$\det[\Gamma(\mathfrak{F}_2(\cdot,\cdot))] \neq 0$$

находим вектор

$$q_2 = [\Gamma(\mathfrak{F}_2(\cdot,\cdot))]^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\{y_2''(\tau,\varepsilon) + \\ + (1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))y_2(\tau,\varepsilon) - \varepsilon(1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))Y(y_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}\,d\tau\,d\varepsilon,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) второе приближение

$$\beta_2(\varepsilon) = \beta^* + \bar{\beta}_2(\varepsilon), \quad \bar{\beta}_2(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon), \quad \zeta_2(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)q_2, \quad q_2 \in \mathbb{R}^\lambda$$

к функции $\bar{\beta}(\varepsilon)$. Продолжая рассуждения, предположим, что найдено наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$x_k(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ \dots\ + \xi_k(\tau,\varepsilon), \ \ \xi_k(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_k(\varepsilon), \quad c_k(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\mu, \quad k = 1, 2, \ \dots$$

к решению краевой задачи (16), (17) и приближение

$$\beta_k(\varepsilon) = \beta^* + \bar{\beta}_k(\varepsilon), \quad \bar{\beta}_k(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \ \dots\ \ \zeta_k(\varepsilon), \quad \zeta_k(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)q_k(\varepsilon), \quad q_k(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\lambda$$

к функции $\beta(\varepsilon)$. Следующее наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение к решению задачи (16), (17) ищем в виде

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ \dots\ + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon), \ \ \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon), \quad c_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\mu.$$

Аналогично следующее наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение к к функции $\beta(\varepsilon)$ представим, как

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta^* + \bar{\beta}_{k+1}(\varepsilon), \quad \bar{\beta}_{k+1}(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \ \dots\ \ + \zeta_{k+1}(\varepsilon),$$
$$\zeta_{k+1}(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)q_{k+1}(\varepsilon), \quad q_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\lambda.$$

Предположим, что найденное приближение $y_k(\tau,\varepsilon) \approx y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_k(\tau,\varepsilon)$ принадлежит области определения функции $Y(y,\varepsilon)$. Используя непрерывную дифференцируемость по $y(\tau,\varepsilon)$ функции $Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в окрестности приближения $y_k(\tau,\varepsilon)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} Y(y_k(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon) &= Y(y_k(\tau,\varepsilon),0) + \\ &+ \mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon))\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_k(\tau,\varepsilon)) + \mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A}_1(y_k(\tau,\hat{c}^*)) = \left.\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y}\right|_{\substack{y\, =\, y_k(\tau,\varepsilon),\\ \varepsilon\, =\, 0}}, \quad \mathcal{A}_2(y_k(\tau,\hat{c}^*)) = \left.\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{y\, =\, y_k(\tau,\varepsilon),\\ \varepsilon\, =\, 0}}.$$

Обозначим $(1 \times \mu)$-матрицу

$$\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon) = (1 + \varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon)) - 1]\varphi(\tau) - \varphi''(\tau).$$

При условии

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))] \neq 0, \ \ \Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon)\, d\tau$$

находим вектор

$$c_{k+1}(\varepsilon) = [\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))]^{-1} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2[Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)+$$
$$+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_k(\tau,\varepsilon))] - (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2 y_k(\tau,\varepsilon) - \frac{d^2y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\}d\tau,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ \dots \ + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon), \quad \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon), \quad c_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\mu$$

к решению задачи (16), (17). Обозначим $(1\times\lambda)$-матрицу

$$\mathfrak{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon) = 2\varepsilon\{\varepsilon Y(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon) - y_{k+1}(\tau,\varepsilon)\}\Psi(\varepsilon).$$

При условии невырожденности

$$\det[\Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot))] \neq 0$$

$(\lambda\times\lambda)$-матрицы Грама

$$\Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot)) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\mathfrak{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon)\, d\tau\, d\varepsilon$$

находим вектор

$$q_{k+1} = [\Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot))]^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\{y''_{k+1}(\tau,\varepsilon)+$$
$$+(1+2\varepsilon\beta_k(\varepsilon))y_{k+1}(\tau,\varepsilon) - \varepsilon(1+2\varepsilon\beta_k(\varepsilon))Y(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}\, d\tau\, d\varepsilon,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta^* + \bar\beta_{k+1}(\varepsilon), \quad \bar\beta_{k+1}(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon) + \ \dots \ + \zeta_{k+1}(\varepsilon),$$
$$\zeta_{k+1}(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)q_{k+1}(\varepsilon), \quad q_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\lambda$$

к функции $\bar\beta(\varepsilon)$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие. *В критическом случае $(P_{Q^*} \neq 0)$ для корня $(c_r^*,\ \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$ уравнения $F(c^*) = 0$ при условии* (11) *задача* (13) *имеет по меньшей мере одно решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $y(\tau,0) = y_0(\tau, c_r^*)$. При условии*

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_k(\cdot,\varepsilon))] \neq 0, \quad \det[\Gamma(\mathfrak{F}_k(\cdot,\cdot))] \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

это решение можно определить при помощи итерационного процесса

$$y_1(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat c^*) + x_1(\tau,\varepsilon), \quad x_1(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_1(\varepsilon),$$

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_1(\tau,\varepsilon)[Y(y_0(\tau,\hat c^*),0) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat c^*))]\, d\tau,$$

$$\beta_1(\varepsilon)=\bar\beta_1(\varepsilon),\quad \bar\beta_1(\varepsilon)\approx\zeta_1(\varepsilon),\quad \zeta_1(\varepsilon)=\Psi(\varepsilon)q_1,$$
$$q_1=[\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot))]^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0}\mathfrak{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\{(y_0''(\tau,\hat c^*)+\xi_1''(\tau,\varepsilon))+$$
$$+(1+2\varepsilon\beta^*)[y_0(\tau,\hat c^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon)-\varepsilon Y(y_0(\tau,\hat c^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\}\,d\tau\,d\varepsilon,\ \ldots\ ,$$
$$y_{k+1}(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat c^*)+x_{k+1}(\tau,\varepsilon),$$
$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon)\approx\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ \ldots\ +\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\quad \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon),\tag{28}$$
$$c_{k+1}(\varepsilon)=[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_{k+1}^*(\tau,\varepsilon)\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2[Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)+$$
$$+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_k(\tau,\varepsilon))]-(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2y_k(\tau,\varepsilon)-\frac{d^2y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\}\,d\tau,$$
$$\beta_{k+1}(\varepsilon)=\bar\beta_{k+1}(\varepsilon),\quad \bar\beta_{k+1}(\varepsilon)\approx\zeta_1(\varepsilon)+\zeta_2(\varepsilon)+\ \ldots\ +\zeta_{k+1}(\varepsilon),\quad \zeta_{k+1}(\varepsilon)=\Psi(\varepsilon)q_{k+1}(\varepsilon),$$
$$q_{k+1}=[\Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot))]^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0}\mathfrak{F}_{k+1}^*(\tau,\varepsilon)\{y_{k+1}''(\tau,\varepsilon)+$$
$$+(1+2\varepsilon\beta_k(\varepsilon))y_{k+1}(\tau,\varepsilon)-\varepsilon(1+2\varepsilon\beta_k(\varepsilon))Y(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}\,d\tau\,d\varepsilon,\ldots.$$

С учетом замены переменной (15), *итерационная процедура* (28) *определяет приближенное решение периодической задачи для уравнения Хилла* (13)

$$y_k(\frac{t}{1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)},\varepsilon)=y_0(\frac{t}{1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)},\hat c^*)+x_k(\frac{t}{1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)},\varepsilon),\ldots,\ k=1,2,\ldots.$$

Пример. Исследуем задачу о построении периодического решения

$$y(\cdot,\varepsilon)\in C^2[0,T_1(\varepsilon)],\quad y(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$$

уравнения

$$y''+y+\varepsilon(2+\varepsilon)y=0.\tag{29}$$

в малой окрестности периодического решения $y_0(t),\ y_0(\cdot)\in C^2[0,2\pi]$ уравнения колебаний гармонического осцилятора $y_0''+y_0=0$.

Поставленная задача приводится к виду (1), (2) при

$$z=z(t,\varepsilon)=\mathrm{col}\ (z^{(a)}(t,\varepsilon),z^{(b)}(t,\varepsilon))\in\mathbb{R}^2$$

и

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\ Z(z,\varepsilon)=\mathrm{col}\ [0,\ (1-(z^{(a)})^2)z^{(b)}].$$

Фиксируем начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающей задачи стало однопараметричным, например,

$$y_0(t)=\hat c\cos t,\ \hat c\in\mathbb{R}.$$

Для задачи о построении периодического решения уравнения (29) имеет место критический случай. Уравнение для порождающих амплитуд (10)

$$F(\hat{c}, \beta) := \begin{bmatrix} 0 \\ 2\pi\hat{c}(1+\beta) \end{bmatrix} = 0$$

имеет действительный корень $\hat{c}^* = 0$, $\beta^* \in \mathbb{R}$, который определяет тривиальное решение уравнения (29). Второму корню $\hat{c}^* \in \mathbb{R}$, $\beta^* = -1$ отвечает нетривиальное решение порождающей задачи $y_0(t, \hat{c}^*) = \hat{c}^* \cos t$, обладающее произвольной амплитудой $\hat{c}^*$. Для любого $\hat{c}^* \in \mathbb{R}$ условие (11) выполняется. Положим, для определенности, $\hat{c}^* = 1$. Оставляя одну линейно независимую строку уравнения для порождающих амплитуд $F(\hat{c}, \beta) = 0$, приходим к скалярному уравнению

$$\hat{F}(\hat{c}, \beta) := 2\pi\hat{c}(1+\beta) = 0,$$

которое определяет константу

$$\mathfrak{B}_0 := \left. \frac{\partial \hat{F}(\hat{c}, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\substack{\hat{c} \,=\, \hat{c}^*, \\ \beta \,=\, \beta^*}} = 2\pi \neq 0.$$

Итерационный процесс (28) определяет приближения

$$y_k(\tau, \varepsilon) = \hat{c}^* \cos t, \ldots, \; k = 0, 1, 2, \; \ldots \; .$$

Положим $y_k(\tau, \varepsilon) = \cos t, \; \ldots \; , \; k = 0, \; 1, \; 2, \; \ldots$ и введем матрицу

$$\Psi(\varepsilon) = [1 \;\; \varepsilon \;\; \varepsilon^2 \;\; \varepsilon^3 \;\; \varepsilon^4 \;\; \varepsilon^5 \;\; \varepsilon^6 \;\; \varepsilon^7 \;\; \varepsilon^8 \;\; \varepsilon^9],$$

при этом

$$\begin{aligned} &\det[\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot))] \approx \\ &\approx (7\,226\,999\,884\,170\,940\,240\,818\,358\,830\,462\,959\,359\,304\,072\,893\,841\,791\,903\,\ldots \\ &\ldots\,522\,540\,444\,632\,534\,277\,066\,143\,946\,378\,281\,218\,660\,880\,307\,191\,808)^{-1} \neq 0. \end{aligned}$$

Итерационная схема (28) определяет первое приближение

$$\begin{aligned} \beta_1(\varepsilon) \approx -1 + \zeta_1(\varepsilon) \approx -\frac{1\,440\,116\,682\,339}{1\,440\,116\,685\,341} + \frac{87\,609\,016\,\varepsilon}{5\,840\,602} - \frac{74\,908\,657\,\varepsilon^2}{37\,454\,561} + \\ + \frac{229\,562\,071\,\varepsilon^3}{91\,835\,790} - \frac{80\,353\,968\,\varepsilon^4}{26\,822\,569} + \frac{248\,767\,429\,\varepsilon^5}{71\,862\,883} - \frac{55\,305\,371\,\varepsilon^6}{14\,664\,224} + \\ + \frac{105\,965\,470\,\varepsilon^7}{29\,572\,501} - \frac{489\,100\,331\,\varepsilon^8}{194\,454\,496} + \frac{75\,878\,843\,\varepsilon^9}{82\,367\,574} \end{aligned}$$

к функции $\beta(\varepsilon)$. Точность нулевого и первого приближений характеризуют невязки

$$\Delta_0(\varepsilon) := ||y_0''(\tau) + (1+\varepsilon)^2 y_0(\tau)||_{C[0;2\pi]},$$

$$\Delta_1(\varepsilon) := ||y_1''(\tau,\varepsilon) + (1+\varepsilon)^2(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2 y_1(\tau,\varepsilon)||_{C[0;2\pi]},$$

в частности

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,210\ 000, \quad \Delta_1(0,1) \approx 0,00\ 911\ 157;$$
$$\Delta_0(0,01) \approx 0,0201\ 000, \quad \Delta_1(0,01) \approx 0,0\ 000\ 990\ 124.$$

Список цитируемых источников

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. — М.: Наука, 1965. — 408 с.
2. *Бойчук А.А.* Автономные слабонелинейные краевые задачи / А.А. Бойчук, С.М. Чуйко // Дифференциальные уравнения. — 1992. — Т. 28, № 10. — С. 1668–1674.
3. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
4. *Каудерер Г.* Нелинейная механика / Г. Каудерер. — М.: Изд.-во иностр. лит., 1961. — 778 с.
5. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И.Г. Малкин — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
6. *Чуйко С.М.* Нетерова краевая задача в особом критическом случае / С.М. Чуйко // Доповіді НАН України. — 2007. — № 2. — С. 26–30.
7. *Чуйко С.М.* О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов / С.М. Чуйко // Нелінійні коливання. — 2008. — Т. 11, № 4. — С. 554–573.
8. *Чуйко С.М.* Область сходимости итерационной процедуры автономной краевой задачи / С.М. Чуйко // Нелінійні коливання. — 2006. — Т. 9, № 3. — С. 416–432.
9. *Чуйко С.М.* Слабонелинейная краевая задача в особом критическом случае / С.М. Чуйко // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 4. — С. 548–562.
10. *Чуйко С.М.* Автономная нетерова краевая задача в критическом случае / С.М. Чуйко, И.А. Бойчук // Нелінійні коливання. — 2009. — Т. 12, № 3. — С. 405–416.
11. *Якубович В.А.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В.А. Якубович. — М.: Наука, 1972. — 720 с.
12. *Boichuk A.A.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. — Utrecht; Boston: VSP, 2004.— XIV + 317 p.

Получена 15.11.2009