Динамические системы, том 3(31), No. 1-2, 135–149

УДК 512.74

Полная система дифференциальных инвариантов кривой в псевдоевклидовом пространстве

В. И. Чилин, К. К. Муминов
Национальный университет Узбекистана,
Ташкент 100174, УЗБЕКИСТАН.
E-mail: chilin@ucd.uz, m.muminov@rambler.ru

Аннотация. Пусть X — n-мерное псевдоевклидово пространство над полем K действительных либо комплексных чисел с индефинитной метрикой $[x, y]$, G — группа всех изометрий в X. Для ориентированной кривой, лежащей в X и порожденной сильно регулярным путем $x(t), t \in (a, b)$, дается специальная инвариантная параметризация $u(s) = x(q_x(s))$, с помощью которой устанавливается следующий критерий G-эквивалентности двух кривых из X: если γ и β — ориентированные кривые в X, порожденные соответственно невырожденными путями x и y, $u(s) = x(q_x(s))$, $v(s) = y(q_y(s))$, то кривые γ и β являются G-эквивалентными тогда и только тогда, когда $\left[u^{(m)}(s), u^{(m)}(s)\right] = \left[v^{(m)}(s), v^{(m)}(s)\right]$ для всех $m = 1, \ldots, n$, где $u^{(m)}(s)$ — производная порядка m для $u(s)$.

Ключевые слова: псевдоевклидово пространство, группа движений, дифференциальный инвариант кривой

1. Введение

Пусть X — n-мерное линейное пространство над полем K, где K — поле действительных чисел $\mathbf{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbf{C}$. Пусть $GL(n, K)$ — группа всех обратимых линейных преобразований пространства X и G — подгруппа группы $GL(n, K)$. Кривые α и β, лежащие в X, называются G-эквивалентными, если $g(\alpha) = \beta$ для некоторого $g \in G$. Одной из известных задач в дифференциальной геометрии является нахождение необходимых и достаточных условий, обеспечивающих G-эквивалентность кривых α и β. При решении этой задачи, в последние годы, активно используют методы теории инвариантов, с помощью которых изучаются дифференциальные поля всех G-инвариантных дифференциальных рациональных функций для путей и описываются конечные рациональные базисы этих полей. В случае колец G-инвариантных многочленов, их конечные рациональные базисы для действия классических подгрупп группы $GL(n, K)$ хорошо известны (см., например, [12], а также обзор [11]). Для дифференциальных полей G-инвариантных дифференциальных рациональных функций конечные рациональные базисы для отдельных примеров подгрупп группы $GL(n, K)$ описаны в книге [8] и в работах [2], [4]. Знание этих базисов позволяет дать эффективные критерии для G-эквивалентности путей и кривых. Такой подход использовался в работах [9] и [10] при решении задачи об эквивалентности кривых относительно движений в $\mathbf{R}^n$, в частности для действия полупрямого произведения $\mathbf{R}^n \lhd SL(n, \mathbf{R})$ групп $\mathbf{R}^n$ и $SL(n, \mathbf{R})$. В работе [4] этим методом была решена задача об эквивалентности кривых, в случае действия симплектической группы $Sp(2n, \mathbf{C})$, а в [2] — для действия групп $\mathbf{R}^n \lhd O(n, \mathbf{R})$ и $\mathbf{R}^n \lhd SO(n, \mathbf{R})$. В работах [3], [5] даны необходимые и достаточные условия для эквивалентности путей при действии псевдоортогональной группы $O(n, p, \mathbf{R})$ и специальной псевдоортогональной группы $SO(n, p, \mathbf{R})$.

Данная работа посвящена решению задачи о G-эквивалентности кривых, лежащих в n-мерном псевдоевклидовом пространстве X над полем K, в случае, когда G есть одна из следующих групп: $K^n \lhd O(n,p,K)$, $K^n \lhd SO(n,p,K)$, $O(n,p,K)$ и $SO(n,p,K)$.

2. Предварительные сведения

Пусть X — n-мерное линейное пространство над полем K, где $K = \mathbf{R}$, либо $K = \mathbf{C}$. Элементы из X будем представлять в виде n-мерных вектор-столбцов $x = \{x_j\}_{j=1}^n$, где $x_j \in K$, $j = \overline{1,n}$. Пусть $(g,x) \to gx$ левое действие в X группы $GL(n,K)$ всех обратимых линейных преобразований пространства X, т. е. обычное умножение матрицы g на вектор-столбец x.

В дальнейшем через I будем обозначать интервал (a,b) из $\mathbf{R}$ (возможны случаи, когда $a = -\infty$ или $b = +\infty$).

I-путем в X называется вектор-функция $x : I \to X$, $x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$, у которой все координатные отображения $x_j : I \to K$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Производной r-го порядка от I-пути $x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$ назовем вектор $x^{(r)}(t) = \{\,{x_j}^{(r)}(t)\}_{j=1}^n$, где ${x_j}^{(r)}(t)$ — r-ая производная координатной функции $x_j(t)$, $j = \overline{1,n}$, $r = 1,2,\ldots$ Ясно, что $x^{(r)}(t)$ также является I-путем для всех r.

I-путь $x(t)$ называется регулярным, если $x^{(1)}(t) := x'(t) \neq 0$ для всех $t \in I$.

Поскольку X — конечномерно, то в X существует единственная топология τ, наделяющая X структурой отделимого топологического векторного пространства. В частности, можно считать, что топология τ порождается евклидовой нормой $\|x\| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$.

I-путь $x(t)$ называется простым, если отображение $x : I \to X$ инъективно и обратное к нему отображение $x^{-1} : \bigl(x(I),\tau\bigr) \to I$ является непрерывным ([6], лекция 1). Отметим, что существуют не простые I-пути, для которых $x(t)$ есть инъекция. Для простых регулярных путей верна следующая

Теорема 1. ([6], лекция 1). *Пусть $x(t)$ — простой регулярный I_1-путь, а $y(t)$ — простой регулярный I_2-путь. Если $x(I_1) = y(I_2)$, то существует такой C^∞-диффеоморфизм $\varphi : I_2 \to I_1$, что $y(t) = x\bigl(\varphi(t)\bigr)$ и $\varphi'(t) \neq 0$ для всех $t \in I_2$.*

Для каждого I-пути $x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$ через $M(x)(t)$ обозначим $n \times n$-матрицу $({x_i}^{(j-1)}(t))_{i,j=1}^n$, где j-ый столбец имеет координаты ${x_i}^{(j-1)}(t)$, ${x_i}^{(0)}(t) = x_i(t)$, $i,j = \overline{1,n}$. Через $M'(x)$ обозначается матрица $({x_i}^{(j)}(t))_{i,j=1}^n$. I-путь $x(t)$ называется сильно регулярным, если определитель $\det M(x)(t)$ не равен нулю при всех $t \in I$. Если $x(t)$ — не регулярный путь, то $\overset{(1)}{x}(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in I$, и поэтому $\det M(x)(t_0) = 0$, т. е. $x(t)$ не является сильно регулярным путем. Следовательно, каждый сильно регулярный I-путь является регулярным путем. Заметим, что в работах [3], [4], [5], [9], [10] термин «регулярный путь» использовался для понятия сильно регулярного пути в приведенном выше смысле.

Пусть G — подгруппа группы $GL(n,K)$. Два I-пути $x(t)$ и $y(t)$ называются G-эквивалентными, если существует такой элемент $g \in G$, что $y(t) = gx(t)$ для всех $t \in I$. Ясно, что, в этом случае, $y^{(j)}(t) = g\,x^{(j)}(t)$, $j = 1,2,\ldots$, и поэтому $M(y)(t) = gM(x)(t)$.

Очевидно также, что справедливость последнего равенства влечет G-эквивалентность I-путей $x(t)$ и $y(t)$.

Отождествим X с K^n и рассмотрим две билинейные формы, заданные на K^n:

$$(x,y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$

$$[x,y]_p = x_1y_1 + \ldots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \ldots - x_ny_n,$$

где $p \in \{1,\ldots,n-1\}$. Обозначим через E — единицу группы $GL(n,K)$, а через $E_p = (E_{ij}^{(p)})_{i,j=1}^n$ матрицу из $GL(n,K)$, для которой $E_{ii}^{(p)} = 1$ при $i = 1,2,\ldots,p$, $E_{ii}^{(p)} = -1$ при $i = p+1, p+2, \ldots, n$, $E_{ij}^{(p)} = 0$ при $i \neq j$.

Пусть $O(n,K)$ $\big($соответственно, $O(n,p,K)\big)$ ортогональная (соответственно, псевдоортогональная) подгруппа в $GL(n,K)$, т. е. $O(n,K) = \big\{g \in GL(n,K) : g^Tg = E\big\} = \big\{g \in GL(n,K) : (gx,gy) = (x,y)$ для любых $x,y \in K^n\big\}$ $\big($соответственно, $O(n,p,K) = \big\{g \in GL(n,K) : g^TE_pg = E_p\big\} = \big\{g \in GL(n,K) : [gx,gy]_p = [x,y]_p$ для любых $x,y \in K^n\big\}\big)$, где g^T — транспонированная матрица к матрице g. Через $SO(n,K)$ $\big($соответственно, $SO(n,p,K)\big)$ обозначим специальную ортогональную (соответственно, специальную псевдоортогональную) подгруппу в $GL(n,K)$, т. е. $SO(n,K) = \big\{g \in O(n,K) : \det g = 1\big\}$, $\big(SO(n,p,K) = \big\{g \in O(n,p,K) : \det g = 1\big\}\big)$.

Дадим теперь необходимые и достаточные условия G-эквивалентности сильно регулярных I-путей $x(t)$ и $y(t)$ с помощью матриц $M(x)(t)$ и $M(y)(t)$, в случае, когда G есть одна из групп $O(n,K)$, $O(n,p,K)$, $SO(n,K)$, $SO(n,p,K)$.

Теорема 2. (i). *Два сильно регулярных I-пути $x(t)$ и $y(t)$ — $O(n,K)$-эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства:*

$$\big(M(x)\big)^{-1}(t)M'(x)(t) = \big(M(y)\big)^{-1}M'(y)(t); \tag{2.1}$$

$$M^T(x)(t)M(x)(t) = M^T(y)(t)M(y)(t); \tag{2.2}$$

для всех $t \in I$;

(ii). *Два сильно регулярных I-пути $x(t)$ и $y(t)$ — $SO(n,K)$-эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены равенства* (2.1), (2.2) *и равенство*

$$\det M(x)(t) = \det M(y)(t)\big) \tag{2.3}$$

для всех $t \in I$;

(iii). *Два сильно регулярных I-пути $x(t)$ и $y(t)$ — $O(n,p,K)$-эквивалентны, $p \in \{1,\ldots,n-1\}$, в том и только в том случае, когда верно равенство* (2.1) *и равенство*

$$M^T(x)(t)E_pM(x)(t) = M^T(y)(t)E_pM(y)(t) \tag{2.4}$$

при каждом $t \in I$;

(iv). *Два сильно регулярных I-пути $x(t)$ и $y(t)$ — $SO(n,p,K)$-эквивалентны, $p \in \{1,\ldots,n-1\}$, в том и только в том случае, когда верны равенства* (2.1), (2.3) *и* (2.4) *при каждом $t \in I$.*

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 3 из [5] (см. также лемму 3 из [4]). Для $p = n-1$ и $K = \mathbf{R}$ утверждение теоремы 2 (iii) получено в [3].

Согласно теореме 2, необходимым и достаточным условием G-эквивалентности сильно регулярных I-путей $x(t)$ и $y(t)$ в случае, когда G есть одна из групп $O(n,K)$, $O(n,p,K)$, $SO(n,K)$, $SO(n,p,K)$ являются равенства для соответствующих рациональных функций от переменных $x_i(t)$, ${x_i}^{(j)}(t)$, $i,j=\overline{1,n}$. В связи с этим, естественно рассматривать дифференциальное поле $K\langle x\rangle$ всех рациональных функций от счетного числа переменных

$$x_1,\ldots,x_n,{x_1}^{(1)}(t),\ldots,{x_n}^{(1)}(t),\ldots,{x_1}^{(r)}(t),\ldots,{x_n}^{(r)}(t),\ldots,$$

с операцией дифференцирования $d\left({x_i}^{(r)}(t)\right) = {x_i}^{(r+1)}(t)$. Элементы из $K\langle x\rangle$ обычно называют d-рациональными функциями, а само поле $K\langle x\rangle$ называют d-полем.

Если $\varphi \in K\langle x\rangle$ и $\varphi(gx) = \varphi(x)$ для всех $g \in G$, то, в этом случае, говорят, что d-рациональная функция φ — G-инвариантна относительно левого действия $(g,x) \to gx$ подгруппы $G \subset GL(n,K)$ в K^n.

Поскольку $\big(M(gx)\big)^{-1}M'(gx) = \big(M(x)\big)^{-1}g^{-1}gM'(x) = \big(M(x)\big)^{-1}M'(x)$, то элементы матрицы $\big(M(x)\big)^{-1}(t)\big(M'(x)(t)\big)$ являются G-инвариантными d-рациональными функциями из $K\langle x\rangle$. Кроме того, элементы матрицы $M^T(x)(t)M(x)(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{i,j=1}^n$ (соответственно, $M^T(x)(t)E_pM(x)(t) = \big(b_{ij}(t)\big)_{i,j=1}^n$) имеют вид $a_{ij}(t) = \big(x^{(i-1)}(t),x^{(j-1)}(t)\big)$ (соответственно, $b_{ij}(t) = \big[x^{(i-1)}(t),x^{(j-1)}(t)\big]_p$), $i,j=\overline{1,n}$, при этом, для каждого $g \in O(n,K)$ (соответственно $g \in O(n,p,K)$) верно равенство $\big(g\,x^{(i-1)}(t),g\,x^{(j-1)}(t)\big) = \big(x^{(i-1)}(t),x^{(j-1)}(t)\big)$ (соответственно, $\big[g\,x^{(i-1)}(t),g\,x^{(j-1)}(t)\big]_p$ $= \big[x^{(i-1)}(t),x^{(j-1)}(t)\big]_p$) для всех $t \in I$.

Таким образом, элементы матриц из (2.1) и (2.2) являются $O(n,K)$-инвариантными d-рациональными функциями из $K\langle x\rangle$, а элементы матриц из (2.1) и (2.4) — $O(n,p,K)$-инвариантными d-рациональными функциями из $K\langle x\rangle$ при всех $t \in I$. Следовательно, для установления $O(n,K)$-эквивалентности (соответственно, $O(n,p,K)$-эквивалентности) сильно регулярных I-путей $x(t)$ и $y(t)$ достаточно установить равенства $\varphi\big(x(t)\big) = \varphi\big(y(t)\big)$ для всех $O(n,K)$-инвариантных (соответственно, $O(n,p,K)$-инвариантных) d-рациональных функций из $K\langle x\rangle$ и всех $t \in I$.

Пусть G — подгруппа группы $GL(n,K)$ и $K\langle x\rangle^G$ множество всех G-инвариантных d-рациональных функций из $K\langle x\rangle$. Известно ([8], §3), что $K\langle x\rangle^G$ является дифференциальным подполем d-поля $K\langle x\rangle$. Система элементов $A = \{\varphi_j\}_{j\in J}$ из $K\langle x\rangle^G$ называется системой образующих дифференциального поля $K\langle x\rangle^G$, если любой элемент $\varphi \in K\langle x\rangle^G$ может быть получен из конечного числа элементов множества A применением конечного число раз операций d-поля $K\langle x\rangle^G$. Известно следующее описание систем образующих для d-полей $K\langle x\rangle^{O(n,K)}$ и $K\langle x\rangle^{SO(n,K)}$ (см., например, [8], §12, теоремы 12.5 и 12.7).

Теорема 3. (i). *В d-поле $K\langle x\rangle^{O(n,K)}$ его образующими являются многочлены $\big(x^{(j-1)},x^{(j-1)}\big)$, $j=\overline{1,n}$;*

(ii). *В d-поле $K\langle x\rangle^{SO(n,K)}$ его образующими являются многочлены* $\det M(x)$ *и $\big(x^{(j-1)},x^{(j-1)}\big)$, $j=\overline{1,(n-1)}$.*

Следующая теорема является вариантом теоремы 3 для d-поля $\mathbf{C}\langle x\rangle^{O(n,p,\mathbf{C})}$ и d-поля $\mathbf{C}\langle x\rangle^{SO(n,p,\mathbf{C})}$.

Теорема 4. *(i). В d-поле* $\mathbf{C}\langle x\rangle^{O(n,p,\mathbf{C})}$ *его образующими являются многочлены* $\left[x^{(j-1)}, x^{(j-1)}\right]_p$, $j=\overline{1,n}$;

(ii). В d-поле $\mathbf{C}\langle x\rangle^{SO(n,p,\mathbf{C})}$ *его образующими является следующий конечный набор многочленов* $\left[x^{(j-1)}, x^{(j-1)}\right]_p$, $j=\overline{1,(n-1)}$ *и* $i^{(n-p)}\det M(x)$, *где* $i^2=-1$.

Доказательство. Пусть $H=\{H_{km}\}_{k,m=1}^{n}\in GL(n,\mathbf{C})$, где $H_{kk}=1$ при $k=\overline{1,p}$, $H_{kk}=i$ (здесь i — мнимая единица, т.е. $i^2=-1$) при $k=\overline{(p+1),n}$ и $H_{km}=0$ при $k\neq m$. Ясно, что $H^T=H$ и $H^2=E_p=H^{-2}$. Положим $G(H)=\left\{HgH^{-1}:g\in O(n,p,\mathbf{C})\right\}$ и покажем, что $G(H)=O(n,\mathbf{C})$. Действительно, если $h=HgH^{-1}$, где $g\in O(n,p,\mathbf{C})$, то используя равенства $H^TH=E_p$, $H^T=E_pH^{-1}$, получим

$$\begin{aligned}h^Th=(HgH^{-1})^T(HgH^{-1})=(H^T)^{-1}g^TH^THgH^{-1}=(H^T)^{-1}g^TE_pgH^{-1}=\\=(H^T)^{-1}E_pH^{-1}=(E_pH^{-1})^{-1}E_pH^{-1}=HE_p^{-1}E_pH^{-1}=E,\end{aligned}$$

т. е. $h=HgH^{-1}\in O(n,\mathbf{C})$, и потому $G(H)\subset O(n,\mathbf{C})$. Включение $O(n,\mathbf{C})\subset G(H)$ устанавливается аналогично.

Покажем теперь, что d-рациональная функция $f(x)$ инвариантна относительно действия группы $O(n,p,\mathbf{C})$ тогда и только тогда, когда d-рациональная функция $\varphi(x)=f(H^{-1}x)$ инвариантна относительно действия группы $O(n,\mathbf{C})$.

Действительно, если $f\in\mathbf{C}\langle x\rangle^{O(n,p,\mathbf{C})}$, то для $\varphi(x)=f(H^{-1}x)$ и $h\in O(n,\mathbf{C})$ имеем, что $h=HgH^{-1}$ для некоторого $g\in O(n,p,\mathbf{C})$ и

$$\varphi(hx)=\varphi(HgH^{-1}x)=f(H^{-1}HgH^{-1}x)=f(gH^{-1}x)=f(H^{-1}x)=\varphi(x),$$

т. е. $\varphi\in\mathbf{C}\langle x\rangle^{O(n,\mathbf{C})}$.

Аналогично показывается, что включение $\varphi\in\mathbf{C}\langle x\rangle^{O(n,\mathbf{C})}$ влечет включение $f\in\mathbf{C}\langle x\rangle^{O(n,p,\mathbf{C})}$.

Согласно теореме 3(i), многочлены $\varphi_j(x)=\left(x^{(j-1)},x^{(j-1)}\right)$, $j=\overline{1,n}$, являются системой образующих в d-поле $\mathbf{C}\langle x\rangle^{O(n,\mathbf{C})}$. Поэтому, в силу доказанного выше, система многочленов $f_j(x)=\varphi_j(Hx)$, $j=\overline{1,n}$, является системой образующих в d-поле $\mathbf{C}\langle x\rangle^{O(n,p,\mathbf{C})}$. Осталось заметить, что

$$\begin{aligned}f_j(x)=\left(Hx^{(j-1)},Hx^{(j-1)}\right)=\left(Hx^{(j-1)}\right)^T\left(Hx^{(j-1)}\right)=\\=\left(x^{(j-1)}\right)^TH^2x^{(j-1)}=\left(x^{(j-1)}\right)^TE_px^{(j-1)}=\left[x^{(j-1)},x^{(j-1)}\right]_p,\quad j=\overline{1,n}.\end{aligned}$$

Аналогично, с использованием теоремы 3(ii), устанавливается, что систему образующих d-поля $\mathbf{C}\langle x\rangle^{SO(n,p,\mathbf{C})}$ составляет набор многочленов $\left[x^{(j-1)},x^{(j-1)}\right]_p$, $j=\overline{1,(n-1)}$ вместе с многочленом

$$\det M(Hx)=\det M\big(\{x_1,\dots,x_p,ix_{p+1},\dots,ix_n\}\big)=i^{(n-p)}\det M(x).$$

□

Объединяя теоремы 2, 3 и 4 получим следующее

Следствие 1. *(i). Два сильно регулярных I-пути $x(t)$ и $y(t)$ — $O(n,K)$-эквивалентны (соответственно, $SO(n,K)$-эквивалентны) тогда и только тогда, когда $\big(x^{(j-1)}(t),x^{(j-1)}(t)\big) = \big(y^{(j-1)}(t),y^{(j-1)}(t)\big)$ для всех $t\in I$, $j=\overline{1,n}$ (соответственно, $\big(x^{(j-1)}(t),x^{(j-1)}(t)\big) = \big(y^{(j-1)}(t),y^{(j-1)}(t)\big)$ и $\det M(x)(t)=\det M(y)(t)$ для всех $t\in I$, $j=\overline{1,(n-1)}$);*

(ii). Два сильно регулярных I-пути $x(t)$ и $y(t)$ — $O(n,p,K)$-эквивалентны $\big($соответственно, $SO(n,p,K)$-эквивалентны$\big)$, $p\in\{1,\dots,n-1\}$, в том и только в том случае, когда $\big[x^{(j-1)}(t),x^{(j-1)}(t)\big]_p = \big[y^{(j-1)}(t),y^{(j-1)}(t)\big]_p$ для всех $t\in I$, $j=\overline{1,n}$ $\big($соответственно, $\big[x^{(j-1)}(t),x^{(j-1)}(t)\big]_p = \big[y^{(j-1)}(t),y^{(j-1)}(t)\big]_p$ и $\det M(x)(t) = \det M(y)(t)$ для всех $t\in I$, $j=\overline{1,(n-1)}\big)$.

3. Эквивалентность путей относительно группы движений псевдоевклидова пространства

Рассмотрим группу $Aff(K^n)$ всех аффинных преобразований пространства K^n. Каждое преобразование из $Aff(K^n)$ является суперпозицией линейного невырожденного преобразования $g\in GL(n,K)$ и сдвига, порожденного элементом $u=\{u_j\}_{j=1}^n\in K^n$, т.е. любое аффинное преобразование $(u,g)\in Aff(K^n)$ действует в K^n по правилу

$$(u,g)(x)=gx+u, \tag{3.1}$$

где $x,u\in K^n$, $g\in GL(n,K)$.

В группе $Aff(K^n)$ операция умножения определяется равенством

$$(u,g)(v,h)=(u+gv,gh),$$

где $u,v\in K^n$, $g,h\in GL(n,K)$. В этом случае, говорят, что группа $Aff(K^n)$ есть полупрямое произведение групп K^n и $GL(n,K)$, что записывается в виде $Aff(K^n) = K^n\lhd GL(n,K)$. Если G — подгруппа в $GL(n,K)$, то множество $K^n\lhd G=\{(u,g)\in K^n\lhd GL(n,K): g\in G\}$ является подгруппой в $K^n\lhd GL(n,K)$, и она также называется полупрямым произведением групп K^n и G.

Известно $\big($см., например, [1], гл. XVII, §2$\big)$, что группа $\mathbf{R}^n\lhd O(n,\mathbf{R})$ совпадает с группой всех движений евклидова пространства $\big(\mathbf{R}^n,(\,.\,,.)\big)$, т. е. с группой всех биекций U из $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^n$, для которых $(Ux,Uy)=(x,y)$ при всех $x,y\in\mathbf{R}^n$. Точно также, группа $\mathbf{R}^n\lhd O(n,p,\mathbf{R})$ есть группа всех движений в псевдоевклидовом пространстве $\big(\mathbf{R}^n,[\,.\,,.]_p\big)$, т. е. группа всех биекций V из $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^n$, для которых $[Vx,Vy]_p=[x,y]_p$ при всех $x,y\in\mathbf{R}^n$ $\big($см., например, [7], гл. III, §1$\big)$.

Пусть H — подгруппа в $K^n\lhd GL(n,K)$. Два I-пути $x(t)$ и $y(t)$, заданные в X, называются H-эквивалентными, если существует такое $(u,g)\in H$, что $y(t)=gx(t)+u$ для всех $t\in I$.

Следующее утверждение сводит задачу о $K^n\lhd G$-эквивалентности I-путей $x(t)$ и $y(t)$ к задаче G-эквивалентности I-путей $x'(t)$ и $y'(t)$.

Утверждение 1. *Два I-пути $x(t)$ и $y(t)$, заданные в X, являются $K^n\lhd G$-эквивалентными тогда и только тогда, когда I-пути $x'(t)$ и $y'(t)$ — G-эквивалентны.*

Доказательство. Если I-пути $x(t)$ и $y(t)$ — $K^n \lhd G$-эквивалентны, то $y(t) = gx(t) + u$ для всех $t \in I$ и некоторых $u = \{u_i\}_{i=1}^n \in K^n$ и $g = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^n \in G$. Поскольку

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n g_{ij}x_j(t) + u_i,$$

то

$$y_i'(t) = \sum_{j=1}^n g_{ij}x_j'(t) \tag{3.2}$$

для всех $i = \overline{1,n}$, т. е. $y'(t) = gx'(t)$, $t \in I$, что влечет G-эквивалентность I-путей $x(t)$ и $y(t)$.

Обратно, пусть верно равенство $y'(t) = gx'(t)$ для некоторого $g = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^n \in G$ и всех $t \in I$. Тогда верно равенство (3.2), и поэтому для $u_i(t) = y_i(t) - \sum\limits_{j=1}^n g_{ij}x_j(t)$ имеем, что $u_i'(t) = 0$ для всех $t \in I$, т. е. $u_i(t) = u_i^{(0)} \in K$, $t \in I$, $i = \overline{1,n}$. Следовательно, для $u = \{u_i^{(0)}\}_{i=1}^n \in K^n$ верно равенство $y(t) = gx(t) + u$ для всех $t \in I$, т.е. I-пути $x(t)$ и $y(t)$ — $K^n \lhd G$-эквивалентны. $\square$

Из утверждения 1 и следствия 1 вытекает следующий критерий $K^n \lhd G$-эквивалентности I-путей $x(t)$ и $y(t)$, в случае, когда G есть одна из групп $O(n,K)$, $O(n,p,K)$, $SO(n,K)$, $SO(n,p,K)$, $p \in \{1,\dots,n-1\}$.

Теорема 5. *Пусть $x(t)$ и $y(t)$ такие I-пути в K^n, что I-пути $x'(t)$ и $y'(t)$ — сильно регулярны. Тогда*

(i). I-пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $K^n \lhd O(n,K)$-эквивалентными тогда и только тогда, когда $\big(x^{(m)}(t), x^{(m)}(t)\big) = \big(y^{(m)}(t), y^{(m)}(t)\big)$ для всех $t \in I$, $m = \overline{1,n}$;

(ii). I-пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $K^n \lhd O(n,p,K)$-эквивалентными тогда и только тогда, когда $\big[x^{(m)}(t), x^{(m)}(t)\big]_p = \big[y^{(m)}(t), y^{(m)}(t)\big]_p$ для всех $t \in I$, $m = \overline{1,n}$;

(iii). I-пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $K^n \lhd SO(n,K)$-эквивалентными тогда и только тогда, когда $\big(x^{(m)}(t), x^{(m)}(t)\big) = \big(y^{(m)}(t), y^{(m)}(t)\big)$ и $\det M'(x)(t) = \det M'(y)(t)$ для всех $t \in I$, $m = \overline{1,(n-1)}$;

(iv). I-пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $K^n \lhd SO(n,p,K)$-эквивалентными в том и только в том случае, когда $\big[x^{(m)}(t), x^{(m)}(t)\big]_p = \big[y^{(m)}(t), y^{(m)}(t)\big]_p$ и $\det M'(x)(t) = \det M'(y)(t)$ для всех $t \in I$, $m = \overline{1,(n-1)}$.

4. Эквивалентность кривых относительно действия групп $K^n \lhd O(n,p,K)$, $K^n \lhd SO(n,p,K)$, $O(n,p,K)$ и $SO(n,p,K)$.

Два пути $x : I_1 \to K^n$ и $y : I_2 \to K^n$ называются D-эквивалентными (соответственно, D_+-эквивалентными) $\big([8], §4\big)$, если существует такой C^∞-диффеоморфизм φ из I_2 на I_1, что $\varphi'(t) \neq 0$ $\big($соответственно, $\varphi'(t) > 0\big)$ и $y(t) = x\big(\varphi(t)\big)$ для всех $t \in I_2$.

Ясно, что D-эквивалентность (соответственно, D_+-эквивалентность) есть отношение эквивалентности на множестве всех путей, заданных в K^n.

Класс $\gamma = \overline{x}$ (соответственно, $\gamma = \hat{x}$) всех путей в K^n, D-эквивалентных (соответственно, D_+-эквивалентных) пути $x(t)$, называется кривой (соответственно, ориентированной кривой) в K^n, порожденной этим путем $\big([8], \S 4\big)$. В этом случае, путь y из класса γ называется параметризацией кривой γ.

Для каждого I-пути $x : I \to K^n$ его образ $x(I)$ в K^n называется носителем пути x и обозначается через $\widetilde{x}$, т. е. $\widetilde{x} = \big\{\{x_j(t)\}_{j=1}^n : t \in I\big\} \subset K^n$.

Ясно, что D-эквивалентные пути $x(t)$ и $y(t)$ имеют один и тот же носитель, т.е. $\widetilde{x} = \widetilde{y}$. Поэтому носителем кривой $\gamma = \overline{x}$ называют множество $\widetilde{x}$.

Заметим, что из равенства носителей $\widetilde{x} = \widetilde{y}$ путей $x(t)$ и $y(t)$, вообще говоря, не следует их D-эквивалентность. В то же время, согласно теореме 1, для простых регулярных путей $x(t)$ и $y(t)$ равенство $\widetilde{x} = \widetilde{y}$ влечет D-эквивалентность путей $x(t)$ и $y(t)$.

Таким образом, с точностью до D-эквивалентности, простые регулярные пути однозначно определяются их носителями, и поэтому, кривые, порождаемые такими путями, могут быть отождествлены со своими носителями.

Если x — простой (соответственно, регулярный) путь и $y \in \overline{x}$, то, очевидно, путь y также является простым (соответственно, регулярным). Кривую γ будем называть простой (соответственно, регулярной, сильно регулярной), если $\gamma = \overline{x}$, где $x(t)$ — простой (соответственно, регулярный, сильно регулярный) путь.

Пусть H — подгруппа в группе $Aff(K^n)$. Если $h = (u, g) \in H$ и $x(t)$ – I-путь в K^n, то $y(t) = h\big(x(t)\big) = g\big(x(t)\big) + u$ $\big($см. равенство (3.1)$\big)$ есть I-путь в K^n. Кривую (ориентированную кривую), порожденную I-путем $y(t)$, будем обозначать через $h\gamma$, где $\gamma = \overline{x}$, (соответственно, $\gamma = \hat{x}$) т. е. $h\gamma = \overline{hx}$ (соответственно, $h\gamma = \widehat{hx}$).

Утверждение 2. *Пусть $\gamma_1 = \overline{x}$, $\gamma_2 = \overline{y}$ — простые регулярные кривые, порожденные I_1-путем $x(t)$ и I_2-путем $y(t)$. Следующие условия эквивалентны:*

- (i) *существует такое $h \in H$, что $\gamma_2 = h\gamma_1$;*
- (ii) *существуют такие $h \in H$ и C^∞-диффеоморфизм $\varphi : I_2 \to I_1$, что $\varphi'(t) \neq 0$ и $y(t) = hx\big(\varphi(t)\big)$ для любого $t \in I_2$.*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Равенство $\overline{y} = \gamma_2 = h\overline{x}$ означает, что $\widetilde{y} = h\widetilde{x}$, где $h = (u, g)$, $u = \{u_i\}_{i=1}^n \in K^n$, $g = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^n \in GL(n, K)$, и $z(t) = (hx)(t) = gx(t) + u$ $\big($см. равенство (3.1)$\big)$ есть простой I_1-путь из класса $\overline{y}$.

Следовательно, носители простых регулярных путей $y(t) = \big\{y_1(t), \dots, y_n(t)\big\}$ и $z(t) = \left\{\sum\limits_{j=1}^n g_{1j}x_j(t) + u_1, \dots, \sum\limits_{j=1}^n g_{nj}x_j(t) + u_n\right\}$ совпадают. Согласно теореме 1, существует такой C^∞-диффеоморфизм $\varphi : I_2 \to I_1$, что $\varphi'(t) \neq 0$ и $y(t) = z\big(\varphi(t)\big) = hx\big(\varphi(t)\big)$ для всех $t \in I_2$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть $y(t) = hx\big(\varphi(t)\big)$ для любого $t \in I_2$ и некоторых $h \in H$ и C^∞-диффеоморфизма $\varphi : I_2 \to I_1$ с $\varphi'(t) \neq 0$, $t \in I_2$. Пути $x(t)$ и $x\big(\varphi(t)\big)$ — D-эквивалентны, и потому $\overline{x} = \overline{x \circ \varphi}$. Следовательно, $\gamma_2 = \overline{y} = \overline{h(x \circ \varphi)} = h\left(\overline{x \circ \varphi}\right) = h\overline{x} = h\gamma_1$. □

Пусть H-подгруппа в группе $K^n \lhd GL(n, K)$. Кривые γ_1 и γ_2 будем называть H-эквивалентными, если существует такое $h \in H$, что $\gamma_2 = h\gamma_1$.

Ясно, что H-эквивалентность путей $x(t)$ и $y(t)$ влечет H-эквивалентность кривых $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Обратное, вообще говоря, неверно (см. утверждение 2).

Естественно возникает задача о существовании таких параметризаций $x(t)$ и $y(t)$ кривых γ_1 и γ_2 соответственно, что H-эквивалентность кривых γ_1 и γ_2 влечет H-эквивалентность путей $x(t)$ и $y(t)$. В случае ориентированных кривых для групп $\mathbf{R}^n \lhd O(n,\mathbf{R})$ и $\mathbf{R}^n \lhd SO(n,\mathbf{R})$, такая задача с помощью инвариантных параметризаций решена в работе [2], для группы $\mathbf{R}^n \lhd SL(n,\mathbf{R})$ — в [10], а для центрально-аффинных групп в [9]. В этом разделе дается решение указанной задачи для ориентированных кривых при действии групп $K^n \lhd O(n,p,K)$, $K^n \lhd SO(n,p,K)$, $O(n,p,K)$ и $SO(n,p,K)$.

Пусть $x(t)$ — I-путь в K^n, для которого $\big[x'(t),x'(t)\big]_p \neq 0$ для всех $t \in I = (a,b)$ $\big($такой путь будем называть невырожденным и, соответственно, кривую $\overline{x}$ (ориентированную кривую $\hat{x}$) также будем называть невырожденной$\big)$. Ясно, что, в этом случае, $x'(t) \neq 0$ при каждом $t \in I$, т. е. невырожденный I-путь $x(t)$ всегда является регулярным. Отметим, что в работе [2] термин «невырожденный путь» использовался для понятия сильно регулярного пути в нашем смысле.

Поскольку $\big[x'(t),x'(t)\big]_p$ — непрерывная функция на I, то для любых $c,d \in (a,b)$, $c<d$, существует конечный интеграл

$$l_x(c,d) = \int_c^d \Big|\big[x'(t),x'(t)\big]_p\Big|^{1/2} dt. \tag{4.1}$$

Следовательно, существуют конечные или бесконечные пределы

$$l_x(a,d) = \lim_{c\to a} l_x(c,d), \tag{4.2}$$

$$l_x(c,b) = \lim_{d\to b} l_x(c,b). \tag{4.3}$$

Следуя работам [2], [10], будем говорить, что I-путь $x(t)$ имеет тип

(L1), если $l_x(a,d) < \infty$ и $l_x(c,b) < \infty$;

(L2), если $l_x(a,d) < \infty$ и $l_x(c,b) = +\infty$;

(L3), если $l_x(a,d) = +\infty$ и $l_x(c,b) < \infty$;

(L4), если $l_x(a,d) = +\infty$ и $l_x(c,b) = +\infty$.

Ясно, что определение типа невырожденного пути $x(t)$ не зависит от выбора точек $c,d \in I$.

Определим интервал $I(x) = \big(A(x),B(x)\big) \subset \mathbf{R}$ по следующему правилу:

(i) если $x(t)$ имеет тип (L1), то $A(x)=0$ и $B(x) = \int\limits_a^b \Big|\big[x'(t),x'(t)\big]_p\Big|^{1/2} dt$;

(ii) если $x(t)$ имеет тип (L2), то $A(x)=0$ и $B(x)=+\infty$;

(iii) если $x(t)$ имеет тип (L3), то $A(x)=-\infty$ и $B(x)=0$;

(iv) если $x(t)$ имеет тип (L4), то $A(x)=-\infty$ и $B(x)=+\infty$;

Укажем связь между типами D_+-эквивалентных невырожденных путей. Пусть $x(t)$ – I_1-путь, $y(t)$ — I_2-путь, $I_1=(a_1,b_1)$, $I_2=(a_2,b_2)$. Предположим, что пути $x(t)$ и $y(t)$ являются невырожденными и D_+-эквивалентными, в частности, существует C^∞-диффеоморфизм из I_2 на I_1, для которого $\varphi'(t)>0$ и $y(t) = x\big(\varphi(t)\big)$ для всех $t \in I_2$.

Заметим, что в случае D_+-эквивалентности путей $x(t)$ и $y(t)$ невырожденность пути $x(t)$ влечет невырожденность пути $y(t)$. В силу (4.1), для $a_2 < c < d < b_2$, имеем, что

$$l_y(c,d) = \int_c^d \left|\big[y'(t), y'(t)\big]_p\right|^{1/2} dt = \int_c^d \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| \cdot \left|\left[\frac{d}{d\varphi}x\big(\varphi(t)\big), \frac{d}{d\varphi}x\big(\varphi(t)\big)\right]_p\right|^{1/2} dt.$$

Поскольку $\varphi'(t) > 0$, то

$$l_y(c,d) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \left|\left[\frac{d}{d\varphi}x\big(\varphi(t)\big), \frac{d}{d\varphi}x\big(\varphi(t)\big)\right]_p\right|^{1/2} d\varphi = l_x\big(\varphi(c), \varphi(d)\big).$$

Согласно равенствам (4.2) и (4.3), имеем, что

$$l_y(a_2, d) = \lim_{c \to a_2} l_y(c,d) = \lim_{s \to a_1} l_x\big(s, \varphi(d)\big) = l_x\big(a_1, \varphi(d)\big), \tag{4.4}$$

$$l_y(c, b_2) = \lim_{d \to b_2} l_y(c,d) = \lim_{r \to b_1} l_x\big(\varphi(c), r\big) = l_x\big(\varphi(c), b_1\big). \tag{4.5}$$

Это означает, что типы D_+-эквивалентных путей $x(t)$ и $y(t)$ совпадают.

Из равенств (4.4), (4.5) вытекает

Утверждение 3. *Если невырожденные I_1-путь $x(t)$ и I_2-путь $y(t)$ — D_+-эквивалентны, то типы путей $x(t)$ и $y(t)$ совпадают и $I(x) = I(y)$.*

Отметим также следующее полезное свойство $K^n \lhd O(n,p,K)$-эквивалентных невырожденных путей.

Утверждение 4. *Пусть $x(t)$ — невырожденный I - путь в K^n, $(u,g) \in K^n \lhd O(n,p,K)$ и $y(t) = gx(t) + u$, $t \in I$. Тогда типы путей $x(t)$ и $y(t)$ совпадают и $I(x) = I(y)$.*

Доказательство непосредственно следует из равенств

$$\big[y'(t), y'(t)\big]_p = \big[gx'(t), gx'(t)\big]_p = \big[x'(t), x'(t)\big]_p.$$

Определим теперь специальную параметризацию для невырожденного I-пути $x(t)$. Рассмотрим функцию p_x, отображающую $I = (a,b)$ на $I(x)$ и задаваемую по следующему правилу (ср. [2], [10]) : если I-путь $x(t)$ имеет

(i) тип (L1) или (L2), то

$$p_x(t) = l_x(a,t) = \int_a^t \left|\big[x'(t), x'(t)\big]_p\right|^{1/2} dt;$$

(ii) тип (L3), то

$$p_x(t) = -l_x(t,b) = -\int_t^b \left|\big[x'(t), x'(t)\big]_p\right|^{1/2} dt;$$

(iii) тип (L4), то, выбрав фиксированную точку $a_I \in I$, полагаем

$$p_x(t) = p_{x,a_I} = l_x(a_I, t) = \int_{a_I}^t \left|\big[x'(t), x'(t)\big]_p\right|^{1/2} dt.$$

Ясно, что, взяв другую точку $a'_I \in I$, получим, что $p_{x,a_I}(t) - p_{x,a'_I}(t) = l_x(a_I, a'_I) = const$, т. е. в случае типа (L4), функция $p_x(t)$ определяется с точностью до константы. Если $I = (-\infty, +\infty)$, то берется точка $a_I = 0$.

Поскольку $x(t)$ — невырожденный I-путь, то $\big|[x'(t), x'(t)]_p\big| > 0$ для всех $t \in I$, и поэтому функция $p_x(t)$ является C^∞-диффеоморфизмом.

В силу неравенства $p'_x(t) > 0$, $t \in I$, для функции $p_x(t)$ существует обратная функция $q_x(s)$, отображающая $I(x)$ на I, при этом, q_x также есть C^∞-диффеоморфизм и $q'_x(s) > 0$ для всех $s \in I(x)$. Следовательно, $y(s) = x\big(q_x(s)\big)$ есть невырожденный $I(x)$-путь, который D_+-эквивалентен I-пути $x(t)$, в частности, $\hat{x} = \hat{y}$.

Следующее утверждение описывает полезные свойства параметризации $x\big(q_x(s)\big)$ для ориентированной кривой $\hat{x}$.

Утверждение 5. *Пусть $x(t)$ — невырожденный I-путь в K^n, $I = (a,b)$, φ — C^∞ -диффеоморфизм из $J = (c,d)$ на I, $\varphi'(r) > 0$, $r \in J$, $h = (a,g) \in K^n \lhd O(n,p,K)$, $p \in \{1, \ldots, n-1\}$. Тогда*

(i). $p_{hx}(t) = p_x(t)$ $\big($соответственно, $q_{hx}(s) = q_x(s)\big)$ для всех $t \in I$ $\big($соответственно, для всех $s \in I(x) = I(hx)$;

(ii). Если I-путь $x(t)$ имеет тип (L1), (L2) или (L3) $\big($соответственно, (L4)$\big)$, то

$$p_{x\circ\varphi}(r) = p_x\big(\varphi(r)\big) \tag{4.6}$$

и

$$\varphi\big(q_{x\circ\varphi}(s)\big) = q_x(s) \tag{4.7}$$

(соответственно,

$$p_{x\circ\varphi}(r) = p_x\big(\varphi(r)\big) + s_0 \tag{4.8}$$

и

$$\varphi\big(q_{x\circ\varphi}(s + s_0)\big) = q_x(s)\big) \tag{4.9}$$

для всех $r \in J$, $s \in I(x) = I(x \circ \varphi)$, где $s_0 = l_x\big(\varphi(a_J), a_I\big)$;

(iii). Для $I(x)$-пути $z(s) = x\big(q_x(s)\big)$ верны равенства $I(x) = I(z)$ и

$$\big|[z'(s), z'(s)]_p\big| = 1, \quad p_z(s) = s = q_z(s) \tag{4.10}$$

для всех $s \in I(x)$.

Доказательство. Пункт (i) следует из равенств

$$\big|[(hx)'(t), (hx)'(t)]_p\big| = \big|[gx'(t), gx'(t)]_p\big| = \big|[x'(t), x'(t)]_p\big|.$$

(ii). Пусть I-путь $x(t)$ имеет тип (L1) или (L2). Используя неравенство $\varphi'(r) > 0$, $r \in J$, и сделав замену переменных $t = \varphi(r)$, получим, что

$$p_{x\circ\varphi}(r) = \int_c^r \big|[(x\circ\varphi)'(s), (x\circ\varphi)'(s)]_p\big|^{1/2} ds =$$

$$= \int_c^r \frac{d\varphi}{ds} \left| \left[\frac{d}{d\varphi} x\big(\varphi(s)\big), \frac{d}{d\varphi} x\big(\varphi(s)\big) \right]_p \right|^{1/2} ds =$$

$$= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(r)} \big|[x'(t), x'(t)]_p\big|^{1/2} dt = p_x\big(\varphi(r)\big)$$

для всех $r \in J$. Аналогично, получаем равенство (4.6) и в случае, когда $x(t)$ есть I-путь типа (L3).

Если же I-путь $x(t)$ имеет тип (L4), то

$$p_{x\circ\varphi}(r) = \int_{a_J}^{r} \left|[(x\circ\varphi)'(s), (x\circ\varphi)'(s)]_p\right|^{1/2} ds,$$

где $a_J \in J$. Следовательно,

$$p_{x\circ\varphi}(r) =$$
$$= \int_{a_J}^{r} \frac{d\varphi}{ds} \left| \left[\frac{d}{d\varphi} x\big(\varphi(s)\big), \frac{d}{d\varphi} x\big(\varphi(s)\big) \right]_p \right|^{1/2} ds = \int_{\varphi(a_J)}^{\varphi(r)} \left|[x'(t), x'(t)]_p\right|^{1/2} dt =$$
$$= \int_{a_I}^{\varphi(r)} \left|[x'(t), x'(t)]_p\right|^{1/2} dt + \int_{\varphi(a_J)}^{a_I} \left|[x'(t), x'(t)]_p\right|^{1/2} dt =$$
$$= p_x\big(\varphi(r)\big) + s_0.$$

Поскольку $q_x : I(x) \to I$, $q_{x\circ\varphi} : I(x) \to J$ — обратные функции для функций p_x и $p_{x\circ\varphi}$, соответственно, то равенства (4.7) и (4.9) следуют, соответственно, из равенств (4.6) и (4.8).

(iii). Если I-путь $x(t)$ имеет тип (L1) или (L2), то, согласно п. (ii), для $\varphi(s) = q_x(s)$, $s \in I(x)$, получим, что

$$\int_{A(x)}^{s} \left|[z'(r), z'(r)]_p\right|^{1/2} dr = p_z(s) = p_{x\circ\varphi}(s) = p_x\big(q_x(s)\big) = s,$$

и, следовательно, $\left|[z'(s), z'(s)]_p\right| = 1$ для всех $s \in I(x)$. Если I-путь $x(t)$ имеет тип (L3), то

$$-\int_{s}^{B(x)} \left|[z'(r), z'(r)]_p\right|^{1/2} dr = p_z(s) = p_x\big(q_x(s)\big) = s,$$

что также влечет равенство $\left|[z'(s), z'(s)]_p\right| = 1$.

Если же I-путь $x(t)$ имеет тип (L4), то $I(x) = (-\infty, +\infty)$, $a_{I(x)} = 0$ и для $\varphi(s) = q_x(s)$, $s \in I(x) = (-\infty, +\infty)$ имеем, что

$$\int_{0}^{s} \left|[z'(r), z'(r)]_p\right|^{1/2} dr = p_z(s) = p_{x\circ\varphi}(s) = p_x\big(q_x(s)\big) + l_x\big(q_x(0), a_I\big) = s + s_0$$

для всех $s \in I(x)$, где $s_0 = l_x\big(q_x(0), a_I\big)$ — константа. При $s = 0$ получим, что $s_0 = 0$, т. е. $p_z(s) = s$ для всех $s \in I(x)$. Следовательно, в этом случае, также верно равенство $\left|[z'(s), z'(s)]_p\right| = 1$ для всех $s \in I(x)$.

Поскольку $q_z(s)$ есть обратная функция к $p_z(s) = s$, то $q_z(s) = s$. Равенство $I(z) = I(x)$ следует непосредственно из (4.10). $\square$

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — невырожденные I-пути, $h \in K^n \lhd O(n,p,K)$ и $y(t) = hx(t)$, $t \in I$. Из утверждений 4 и 5(i) вытекает, что $K^n \lhd O(n,p,K)$-эквивалентные невырожденные кривые $\overline{x}$ и $\overline{y}$ имеют одну и ту же параметризацию $q_x(s) = q_y(s)$, $s \in I(x) = I(y)$, т. е. $x \circ q_x \in \overline{x}$ и $y \circ q_x \in \overline{y}$. В связи с этим, параметризацию вида $z(s) = x\big(q_x(s)\big)$ для кривой $\overline{x}$ естественно называть инвариантной параметризацией относительно действия группы $K^n \lhd O(n,p,K)$.

Из утверждений 3 и 5(ii) вытекает также следующее

Следствие 2. *Если x — невырожденный I-путь, y — невырожденный J-путь и $\hat{x} = \hat{y}$, то типы путей x и y совпадают, $I(x) = I(y)$ и $x\big(q_x(s)\big) = y\big(q_y(s+s_0)\big)$ для всех $s \in I(x)$, где s_0 — некоторая константа, которая равна нулю, в случаях, когда I-путь $x(t)$ имеет тип (L1), (L2) или (L3).*

Доказательство. Ориентированная кривая $\hat{x} = \hat{y}$ есть класс всех путей, D_+-эквивалентных пути $x(t)$. Следовательно, пути x и y — D_+-эквивалентны, т. е. существует такой C^∞-диффеоморфизм $\varphi : J \to I$, что $\varphi'(r) > 0$ и $y(r) = x\big(\varphi(r)\big)$ для всех $r \in J$. Согласно утверждению 3, имеем, что типы путей x и y совпадают и $I(x) = I(y)$. Если I-путь $x(t)$ имеет тип (L1), (L2) или (L3), то, в силу утверждения 5 (ii), получим, что

$$y\big(q_y(s)\big) = (x \circ \varphi)\big(q_y(s)\big) = x\big(\varphi\big(q_{x\circ\varphi}(s)\big)\big) = x\big(q_x(s)\big)$$

для всех $s \in I(x) = I(y)$.

Если же I-путь $x(t)$ имеет тип (L4), то, опять используя утверждение 5 (ii), имеем, что

$$y\big(q_y(s)\big) = x\big(\varphi\big(q_{x\circ\varphi}(s)\big)\big) = x\big(q_x(s - s_0)\big)$$

для всех $s \in I(x)$, где $s_0 = l_x\big(\varphi(a_J), a_I\big)$. □

В соответствии со следствием 2, будем говорить, что невырожденная ориентированная кривая γ имеет тип (L1) $\big($соответственно, (L2), (L3), (L4)$\big)$, если такой же тип имеет путь $x \in \gamma$; в этом случае, полагаем $I(\gamma) = I(x)$.

Из утверждения 4 вытекает, что $K^n \lhd O(n,p,K)$-эквивалентные ориентированные кривые γ и β всегда имеют одинаковый тип и $I(\gamma) = I(\beta)$.

Теорема 6. *Пусть x — невырожденный I-путь, y — невырожденный J-путь, $x_1(s) = x\big(q_x(s)\big)$, $s \in I(x)$, $y_1(r) = y\big(q_y(r)\big)$, $r \in I(y)$, $\gamma = \hat{x}_1$, $\beta = \hat{y}_1$, $h = (u,g) \in K^n \lhd O(n,p,K)$. Если путь $x(t)$ имеет тип (L1), (L2) или (L3), то $\beta = h\gamma$ тогда и только тогда, когда $I(x) = I(y)$ и $y_1(s) = hx_1(s)$ для всех $s \in I(x)$.*

Если же путь $x(t)$ имеет тип (L4), то $\beta = h\gamma$ в том и только в том случае, когда $I(x) = I(y) = (-\infty, +\infty)$ и $y_1(s+s_0) = (hx_1)(s)$ для всех $s \in I(x)$ и некоторого $s_0 \in I(x)$.

Доказательство. Если путь $x(t)$ имеет тип (L1), (L2) или (L3), $I(x) = I(y)$ и $y_1(s) = hx_1(s)$ для всех $s \in I(x)$, то, очевидно, что $\beta = h\gamma$. Если же путь $x(t)$ имеет тип (L4) и $y_1(s + s_0) = hx_1(s)$ для всех $s \in I(x)$ и некоторого $s_0 \in I(x)$, то путь $z(s) = y_1(s + s_0)$ также имеет тип (L4) и из включения $z \in \beta$ следует равенство $\beta = h\gamma$.

Пусть теперь $\hat{y}_1 = \beta = h\gamma = h\hat{x}_1$. Следовательно, $I(x)$-путь $z(s) = (hx_1)(s) = gx_1(s) + u$ принадлежит классу эквивалентности $\hat{y}_1$. Это означает, что $I(x)$-путь z и $I(y)$-путь y_1 являются D_+-эквивалентными, т. е. существует такой C^∞- диффеоморфизм φ из $I(y)$ на $I(x)$, что $y_1(s) = z\big(\varphi(s)\big)$, $\varphi'(s) > 0$ для всех $s \in I(y)$.

Согласно утверждениям $5(ii), (iii)$ и следствию 2, имеем, что типы путей z и y_1 совпадают, $I(z) = I(y_1)$ и

$$y_1(s + s_0) = y_1\big(q_{y_1}(s + s_0)\big) = z\big(q_z(s)\big) \tag{4.11}$$

для всех $s \in I(z)$, где s_0 — константа, равная нулю, в случае, когда $I(x)$-путь $z(s)$ имеет тип (L1), (L2) или (L3).

В силу утверждения 5(i), (iii), получим, что $I(y_1) = I(z) = I(x)$ и $q_z(s) = q_{x_1}(s)$, в частности,

$$z\big(q_z(s)\big) = \big(hx_1\big)\big(q_{x_1}(s)\big) = (hx_1)(s) \tag{4.12}$$

для всех $s \in I(x)$.

Из равенств (4.11) и (4.12) вытекает, что $I(y) = I(y_1) = I(x_1) = I(x)$ и

$$y_1(s + s_0) = (hx_1)(s) \tag{4.13}$$

для всех $s \in I(x_1)$. Если I-путь x имеет тип (L1), (L2) или (L3), то $s_0 = 0$, т. е. $y_1(s) = (hx_1)(s)$. Если же I-путь x имеет тип (L4), то $I(x) = I(y) = (-\infty, +\infty)$ и верно равенство (4.13) для некоторого $s_0 \in \mathbf{R}$. □

Из следствия 1(ii), теорем 5$(ii), (iv)$ и 6 вытекает следующая

Теорема 7. *Пусть γ и β — ориентированные кривые, порожденные соответственно невырожденными I-путем x и J-путем y, $u(s) = x\big(q_x(s)\big)$, $s \in I(x)$, $v(r) = y\big(q_y(r)\big)$, $r \in I(y)$. Тогда*

(i). Если пути $u(s)$ и $v(r)$ сильно регулярны, то кривые γ и β являются $O(n,p,K)$-эквивалентными тогда и только тогда, когда $I(x) = I(y)$ и

$$\left[\overset{(m-1)}{u}(s), \overset{(m-1)}{u}(s)\right]_p = \left[\overset{(m-1)}{v}(s), \overset{(m-1)}{v}(s)\right]_p \tag{4.14}$$

для всех $s \in I(x)$ и $m = \overline{1, n}$;

(ii). Если пути $u(s)$ и $v(r)$ сильно регулярны, то кривые γ и β являются $SO(n,p,K)$-эквивалентными тогда и только тогда, когда $I(x) = I(y)$ и верны равенства (4.14) *и*

$$\det M(u)(s) = \det M(v)(s))$$

для всех $s \in I(x)$ и $m = \overline{1,(n-1)}$;

(iii). Если пути $u'(s)$ и $v'(s)$ сильно регулярны, то кривые γ и β — $K^n \lhd O(n,p,K)$-эквивалентны в том и только в том случае, когда $I(x) = I(y)$ и верны равенства (4.14) *для всех $s \in I(x)$, $m = \overline{2,(n+1)}$;*

(iv). Если пути $u'(s)$ и $v'(s)$ сильно регулярны, то кривые γ и β — $K^n \lhd SO(n,p,K)$-эквивалентны в том и только в том случае, когда $I(x) = I(y)$ и верны равенства (4.14) *и*

$$\det M'(u)(s) = \det M'(v)(s))$$

для всех $s \in I(x)$, $m = \overline{2, n}$.

Список цитируемых источников

1. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры — М.: Наука, 1979. — 512 с.
2. *Арипов Р.Г., Хаджиев Дж.* Полная система глобальных дифференциальных и интегральных инвариантов кривой в евклидовой геометрии // Известия ВУЗов. Математика — 2007. — №7. — С. 3–15.
3. *Муминов К.К.* Эквивалентность путей и поверхностей для действия псевдоортогональной группы // Uzbek Math. J. — 2005. — №2. — С. 35–43.

4. *Муминов К.К.* Эквивалентность кривых относительно действия симплектической группы // Известия ВУЗов. Математика — 2009. — №6. — С. 31–36.
5. *Муминов К.К., Гаффоров Р.А.* Эквивалентность путей относительно действия специальной псевдоортогональной группы // Uzbek Math. J. — 2010. — №4. — С. 135–141.
6. *Постников М.М.* Гладкие многообразия. — М.: Наука, 1987. — 478 с.
7. *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы пространства — М.: Наука, 1969. — 548 с.
8. *Хаджиев Дж.* Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых — Ташкент: ФАН, 1998. — 136 с.
9. *Khadjiev Dj., Peksen O.* On invariants of curves in Centra-affine geometry // J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ) — 2004. — V.44. — №3. — P. 603–613.
10. *Khadjiev Dj., Peksen O.* The complete system of global integral and differential invariants for equi-affine curves // Differential Geometry and Applications — 2004. — V.20. — №2. — P. 167–175.
11. *Vinberg E.B., Popov V.L.* Invariant theory, in Algebraic geometry. IV. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 55 (translated from 1989 Russian edition) Springer-Verlag, Berlin, 1994. vi+284 pp.
12. *Weyl Hermann.* The Classical Groups: Their Invariants and Representations — Princeton University, 1997. — 316 p.

Получена 01.06.2013