Динамические системы, вып. 23 (2007), 99–112

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.98: 519.3

Компактный субдифференциал вещественных функций

Ф. С. Стонякин

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: fedyor@mail.ru*

Аннотация. Введено понятие компактного субдифференциала для вещественных функций, найдены необходимые и достаточные условия компактной субдифференцируемости. Для выпуклых функций исследована связь с классическим субдифференциалом. Доказана формула конечных приращений и ряд теорем о среднем для компактных субдифференциалов. Получены соответствующие условия монотонности и локального экстремума в терминах компактных субдифференциалов.

Введение

Многие важные для анализа функции не являются всюду дифференцируемыми в обычном смысле, но обладают существенными дифференциальными свойствами, как, например, выпуклые функции. Для таких функций в качестве аналога производной часто используется субдифференциал, являющийся базовым понятием выпуклого анализа и широко применяемый в современной математике ([2], [4], [9], [10]). Напомним классическое определение.

Определение 1. Число x^* называется субградиентом выпуклой функции $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ в точке x, если для всех $z \in [a;b]$ выполняется неравенство:

$$f(z) - f(x) \geq x^*(z - x).$$

Множество всех субградиентов выпуклой функции f в точке x называется субдифференциалом функции f в точке x и обозначается $\partial f(x)$.

Наличие множества полезных свойств субдифференциалов привело к многочисленным обобщениям этого понятия (см., например, [2], [3], [5]). В настоящей работе предлагается новый подход к данной задаче — вводится понятие компактного субдифференциала числовой функции. Для отображений со значениями в локально выпуклых пространствах это понятие введено И. В. Орловым в [8]. В числовой ситуации компактный субдифференциал обладает рядом дополнительных свойств, включая усиленную форму теоремы о среднем. В работе изучены эти свойства и осуществлён вывод соответствующих аналогов теоремы о среднем, найдены условия монотонности и экстремума в терминах компактных субдифференциалов.

1. Компактная субдифференцируемость числовых функций

Введём понятие K-предела системы числовых множеств.

Определение 2. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложениям при $\delta \to +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств $\mathbb{R}$, $B = \bigcap\limits_{\delta>0} B_\delta$. Будем говорить, что B является K-пределом системы $\{B_\delta\}$ и обозначать $B = K - \lim\limits_{\delta\to 0} B_\delta$, если:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta_\varepsilon > 0 : (0 < \delta < \delta_\varepsilon) \Rightarrow (B_\delta \subset B + O_\varepsilon(0)).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что K-предел обладает свойством линейности.

Обозначим $\partial f(x_0, h) = \overline{conv}\left\{\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}; 0 <\mid \triangle x \mid\leqslant h\right\}$, где $\overline{conv}$ — выпуклая замкнутая оболочка множества.

Определение 3. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется компактно субдифференцируемой или K-субдифференцируемой в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если существует компактный K-предел $\partial_K f(x_0) = K - \lim\limits_{h\to 0} \partial f(x_0, h)$. Множество $\partial_K f(x_0)$ называется компактным субдифференциалом или K-субдифференциалом функции f в точке x_0.

Замечание 1. Ясно, что $\partial_K f(x)$ является отрезком числовой оси.

Любая дифференцируемая функция является K-субдифференцируемой. Однако существуют K-субдифференцируемые функции, которые не являются дифференцируемыми. Нпример, функция $f(x) = |x|$ не дифференцируема в точке $x_0 = 0$, при этом $\partial_K f(0) = [-1; 1]$

Получим критерий K-субдифференцируемости числовых функций в терминах производных чисел.

Теорема 1. *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ K-субдифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда существуют конечные нижняя и верхняя производные в этой точке:*

$$\alpha = \varliminf_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{и} \quad \beta = \varlimsup_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

При этом $\partial_K f(x) = [\alpha; \beta]$.

Доказательство. Пусть $\partial_K f(x) = [\alpha; \beta]$. Покажем, что $\beta = \varlimsup\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Сначала установим, что β является одной из предельных точек функции $\varphi(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Имеем:

$$\beta \in \partial_K f(x) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \ \exists\ell_k \in \partial f(x, h_k), \quad \partial f(x, h_k) \subset O_\varepsilon(\partial_K f(x))$$

для $0 < h_k < \delta$, $\ell_k \in O_\varepsilon(\beta)$. Следовательно, $\ell_k = \sum_{i=1}^{2} \alpha_{k_i}\varphi(h_{k_i})$, где $\alpha_{k_i} \geqslant 0$, $\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2} = 1$. Отсюда $\ell_k \leqslant \varphi(h_{k_{i_0}}) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2} \varphi(h_{k_i})$ и, следовательно, $\varphi(h_{k_{i_0}}) \in O_\varepsilon(\beta)$. Поскольку $\partial f(x, h_k) \subset O_\varepsilon(\partial_K f(x))$, то

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : 0 < h_{k_{i_0}} < \delta \Rightarrow \varphi(h_{k_{i_0}}) \in O_\varepsilon(\beta),$$

откуда $\beta = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi(h_{k_{i_0}})$, т.е. β — одно из производных чисел f в точке x. Допустим, что β не является наибольшим из всех производных чисел и γ — другое производное число. Тогда существует сходящаяся к нулю последовательность $\{\ell_m\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что $\varphi(\ell_m) \to \gamma$ при $m \to \infty$. Пусть $\varepsilon < \frac{\gamma-\beta}{2}$, тогда $\varphi(\ell_m) \in O_\varepsilon(\gamma)$ для некоторого $m \geqslant m_0$, откуда

$$\partial f(x, \ell_m) = \overline{conv}\,\{\varphi(\triangle x); 0 < |\triangle x| \leqslant \ell_m\} \nsubseteq O_\varepsilon([\alpha;\beta]) \quad \forall m \geq m_0,$$

что противоречит определению $\partial_K f(x)$. Итак, $\beta = \overline{\lim\limits_{h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Аналогично доказывается, что $\alpha = \underline{\lim\limits_{h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Пусть теперь существуют конечные $\alpha = \underline{\lim\limits_{h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ и $\beta = \overline{\lim\limits_{h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Докажем, что функция f компактно субдифференцируема в точке x и при этом $\partial_K f(x) = [\alpha;\beta]$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем такое $\delta > 0$, что $0 < |h| < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha - \frac{\varepsilon}{2} < \varphi(h) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$. Докажем, что $\partial f(x, h) \subset O_\varepsilon([\alpha;\beta])$ при выбранных $|h| < \delta$. Пусть $y \in \widetilde{\partial} f(x, h) = \overline{conv}\,\{\varphi(h);\ 0 < |\triangle x| \leqslant h\}$. Тогда $y = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \varphi(h_i)$, где $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$. В силу выбора ε и δ,

$$y \leqslant \sum_{i=1}^{2} \alpha_i(\beta + \frac{\varepsilon}{2}) = \beta + \frac{\varepsilon}{2}; \qquad y \geqslant \sum_{i=1}^{2} \alpha_i(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}) = \alpha - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому $y \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}([\alpha;\beta]) \subset O_\varepsilon([\alpha;\beta])$, т.е. $\partial f(x, h) \subset O_\varepsilon([\alpha;\beta])$, а значит, функция f K-субдифференцируема в точке x и $\partial_K f(x) \subset [\alpha;\beta]$. Поскольку α и β являются предельными точками функции $\varphi(x, h)$ при $h \to 0$, то $\partial_K f(x) = [\alpha;\beta]$. □

Следствие 1. *Если существуют конечные односторонние производные $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$, то функция f компактно субдифференцируема в точке x, и $\partial_K f(x) = [\alpha;\beta]$, где α и β — соответственно наименьшее и наибольшее из чисел $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$.*

В частности, всякая выпуклая функция компактно субдифференцируема в любой внутренней точке области определения, при этом выпуклый и компактный субдифференциалы совпадают.

Однако существуют K-субдифференцируемые функции, не имеющие ни одной из односторонних производных. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x},\ \text{если}\ x \neq 0, \\ 0,\ \text{если}\ x = 0, \end{cases}$$

не имеет ни $f'_+(0)$, ни $f'_-(0)$, но при этом в силу теоремы 1 $\partial_K f(0) = [-1;1]$.

Замечание 2. Аналогичным образом можно ввести правосторонний и левосторонний K-субдифференциалы. Субдифференцируемость в таком случае будет определяться конечными односторонними производными числами.

2. Свойства компактного субдифференциала числовых функций

Ряд простейших свойств K-субдифференциала не требует его компактности. Однако важное свойство субаддитивности использует компактность K-субдифференциала. Напомним сначала известный факт.

Лемма 1. *Пусть $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$. Если замыкание $\overline{A_1}$ или $\overline{A_2}$ компактно, то*

$$\overline{A_1 + A_2} = \overline{A_1} + \overline{A_2} \tag{2.1}$$

(Здесь имеется в виду алгебраическая сумма множеств).

Обозначим $\triangle f(x,h) = f(x+h) - f(x)$.

Теорема 2. *Если функции f и g являются K-субдифференцируемыми в точке x, то функция $f+g$ также K-субдифференцируема в точке x, причём*

$$\partial_K(f+g)(x) \subset \partial_K f(x) + \partial_K g(x). \tag{2.2}$$

Доказательство. Учитывая, что $conv\{a_h + b_h\} \subset conv\{a_h\} + conv\{a_h\}$ имеем:

$$\partial(f+g)(x,\delta) = \overline{conv}\left\{\frac{\triangle f(x,h)}{h} + \frac{\triangle g(x,h)}{h}; 0 < |h| \leqslant \delta\right\} \subset$$

$$\subset \overline{conv\left\{\frac{\triangle f(x,h)}{h}; 0 < |h| \leqslant \delta\right\} + conv\left\{\frac{\triangle g(x,h)}{h}; 0 < |h| \leqslant \delta\right\}}.$$

Для произвольной окрестности нуля $U \subset \mathbb{R}$ выберем замкнутую окрестность нуля U' так, чтобы $U' + U' \subset U$, и $\delta_{U'} > 0$ такое, чтобы при $0 < \delta < \delta_{U'}$:

$$\partial f(x,\delta) \subset \partial_K f(x) + U', \quad \partial g(x,\delta) \subset \partial_K g(x) + U'.$$

Тогда,

$$conv\left\{\frac{\triangle f(x,h)}{h}; 0 < |h| \leqslant \delta\right\} + conv\left\{\frac{\triangle g(x,h)}{h}; 0 < |h| \leqslant \delta\right\} \subset$$

$$\subset \partial f(x,\delta) + \partial g(x,\delta) \subset (\partial_K f(x) + U') + (\partial_K g(x) + U') \subset (\partial_K f(x) + \partial_K g(x)) +$$

$$+ (U' + U') \subset (\partial_K f(x) + \partial_K g(x)) + U.$$

Так как множество $\partial_K f(x) + \partial_K g(x)$ компактно, а U замкнуто, то по лемме 1

$$\overline{conv\left\{\frac{\triangle f(x,h)}{h}; 0 < |h| \leqslant \delta\right\} + conv\left\{\frac{\triangle g(x,h)}{h}; 0 < |h| \leqslant \delta\right\}} \subset$$

$$\subset (\partial_K f(x) + \partial_K g(x)) + U \Rightarrow \partial(f+g)(x,\delta) \subset (\partial_K f(x) + \partial_K g(x)) + U.$$

Переходя к K-пределу при $\delta \to +0$, получаем (2.2). □

Замечание 3. Равенство в (2.2) может не иметь места.
Пример 1. Пусть $f(x) = |x|,\ g(x) = -|x|;\ x_0 = 0$. Тогда $(f+g)(x) \equiv 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \partial_K(f+g)(x) \equiv 0$. В то же время $\partial_K f(0) = \partial_K g(0) = [-1;1]$. Очевидно:

$$\partial_K(f+g)(0) = \{0\} \subsetneqq [-1;1] \cdot [-1;1] = \partial_K f(0) \cdot \partial_K g(0).$$

В некоторых классах функций компактный субдифференциал является аддитивным. Это выполняется, например, в классе выпуклых функций, где компактный субдифференциал совпадает с выпуклым. Справедлива также

Теорема 3. *Если функция f является K-субдифференцируемой в точке x, а функция g дифференцируема в точке x, то функция $f+g$ также K-субдифференцируема в точке x, причём*

$$\partial_K(f+g)(x) = \partial_K f(x) + \partial_K g(x) = \partial_K f(x) + g'(x). \tag{2.3}$$

Доказательство. Покажем, что $\partial_K(f+g)(x) \supset \partial_K f(x) + \partial_K g(x)$.
В силу определения компактного субдифференциала, $\forall \varepsilon > 0\ \exists h > 0\ \forall 0 < |\delta| \leqslant h:$

$$\begin{cases} \partial f(x), \delta) \subset \partial_K f(x) + O_{\frac{\varepsilon}{8}}(0); \\ \frac{\triangle g(x,\delta)}{\delta} \in g'(x) + O_{\frac{\varepsilon}{4}}(0). \end{cases}$$

Пусть $c_1 \in \partial_K f(x)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists h > 0\ \forall 0 < \delta \leqslant h \quad \exists c_{2\delta} \in \partial f(x,\delta):$
$c_{2\delta} \in c_1 + O_{\frac{\varepsilon}{8}}(0)$. В силу определения $\partial f(x,h)$ для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем

$$c_{3\delta} \in conv \left\{ \frac{\triangle f(x, \triangle x)}{\triangle x};\ 0 < |\triangle x| \leqslant \delta \right\}$$

так, чтобы $c_{3\delta} \in c_{2\delta} + O_{\frac{\varepsilon}{8}}(0) \in c_1 + O_{\frac{\varepsilon}{4}}(0)$. При этом $c_{3\delta} = \sum\limits_{k=1}^{2} \alpha_k \cdot \frac{\triangle f(x,\ h_k)}{h_k}$, где $\alpha_k \geqslant 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Пусть также $h_k < \delta$. Тогда

$$\overline{c}_\delta := \sum_{k=1}^{2} \alpha_k \cdot \frac{\triangle f(x,h_k)}{h_k} + \sum_{k=1}^{2} \alpha_k \cdot \frac{\triangle g(x,h_k)}{h_k} = \sum_{k=1}^{2} \alpha_k \cdot \frac{\triangle (f+g)(x,h_k)}{h_k} \in \partial(f+g)(x_0,\delta).$$

С другой стороны,
$\overline{c}_\delta = \sum\limits_{k=1}^{2} \alpha_k \cdot \frac{\triangle f(x,h_k)}{h_k} + \sum\limits_{k=1}^{2} \alpha_k \cdot \frac{\triangle g(x,h_k)}{h_k} \in c_1 + O_{\frac{\varepsilon}{4}}(0) + \sum\limits_{k=1}^{2} \alpha_k (g'(x) + O_{\frac{\varepsilon}{4}}(0)) =$
$= [c_1 + g'(x_0)] + O_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$, откуда

$$\overline{c}_\delta \in [c_1 + g'(x)] + O_{\frac{\varepsilon}{2}}(0).$$

Выберем теперь $\widetilde{c}_\delta \in \partial_K(f+g)(x)$ так, чтобы:

$$\widetilde{c}_\delta \in \overline{c}_\delta + O_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \in [c_1 + g'(x)] + O_\varepsilon(0). \tag{2.4}$$

Поскольку множество $\partial_K(f+g)$ замкнуто, то, в силу (2.4),
$[c_1 + g'(x)] \in \partial_K(f+g)(x)$. Следовательно,

$$\partial_K f(x) + g'(x) \subset \partial_K(f+g)(x). \tag{2.5}$$

Включение (2.5) вместе с (2.2) даёт равенство (2.3). □

Проверим необходимое условие K-субдифференцируемости.

Лемма 2. *Если функция f K-субдифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. В соответствии с определением компактного субдифференциала имеем: $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists h > 0, \forall\delta \in (0; h]$:

$$\partial f(x, \delta) \subset \partial_K f(x) + O_\varepsilon(0) \Rightarrow \frac{\triangle f(x, \triangle x)}{\triangle x} \in \partial_K f(x) + O_\varepsilon(0)$$

при $0 < |\triangle x| \leqslant h$. Поэтому

$$f(x + \triangle x) - f(x) \in (\partial_K f(x) + O_\varepsilon(0)) \triangle x \longrightarrow 0 \quad \text{при} \triangle x \to 0,$$

т.е., функция f является непрерывной в точке x. $\square$

Выясним теперь вопрос о K-субдифференцируемости композиции.

Теорема 4. *Если функция f K-субдифференцируема в точке x_0, а функция g K-субдифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, то функция $g(f(x))$ также K-субдиф-ференцируема в точке x_0, причём:*

$$\partial_K g(f(x_0)) \subset \partial_K g(y_0) \cdot \partial_K f(x_0). \tag{2.6}$$

Доказательство. K-субдифференцируемость функций f и g в соответствующих точках означает, что $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists h > 0 \ \forall 0 < \delta \leqslant h$:

$$\begin{cases} \partial f(x_0, \delta) \subset \partial_K f(x_0) + O_\varepsilon(0); \\ \partial g(y_0, \delta) \subset \partial_K g(y_0) + O_\varepsilon(0). \end{cases}$$

Поскольку $\partial g(y_0, \delta) = \overline{conv}\left\{\frac{\triangle g(y_0, \triangle y)}{\triangle y}; 0 < |\triangle y| \leqslant \delta\right\}$, то $g(y) - g(y_0) \in (\partial_K g(y_0) + O_\varepsilon(0)) \cdot (y - y_0)$ при $y \in O_{\overline{h}}(0)$ для некоторого $\overline{h} > 0$. Аналогично, $f(x) - f(x_0) \in (\partial_K g(x_0) + O_\varepsilon(0))(x - x_0)$ при $x \in O_\delta(0)$ для некоторого $\delta > 0$. Согласно лемме 2, f непрерывна в точке x_0, откуда $\forall\overline{h} > 0 \quad \exists\delta > 0$: $x \in O_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_{\overline{h}}(f(x_0))$. Следовательно,

$$g(f(x_0 + \triangle x)) - g(f(x_0)) = g(y_0 + \triangle y) - g(y_0) \in (\partial_K g(y_0) + O_\varepsilon(0)) \cdot \triangle y \subset$$

$$\subset [\partial_K g(y_0) + O_\varepsilon(0)] \cdot [\partial_K f(x_0) + O_\varepsilon(0)] \cdot \triangle x \subset [\partial_K g(y_0) \cdot \partial_K f(x_0) + C \cdot O_\varepsilon(0)] \cdot \triangle x,$$

где C – константа, не зависящая от ε, δ, h. Итак, $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 : \ (0 < |\triangle x| \leqslant \delta) \Rightarrow$

$$\frac{\triangle g(f(x_0, \triangle x))}{\triangle x} \in \partial_K g(y_0) \cdot \partial_K f(x_0) + C \cdot O_\varepsilon(\delta).$$

Множество $\partial_K g(y_0)\cdot\partial_K f(x_0)$ является выпуклым и компактным для произвольного $\varepsilon > 0$, следовательно,

$$\partial g(f(x_0,\delta)) = \overline{conv}\left\{\frac{\triangle g(f(x_0,\triangle x))}{\triangle x};\ 0 < |\triangle x| \leqslant \delta\right\} \subset \partial_K g(y_0)\cdot\partial_K f(x_0) +$$

$$+\ C\cdot O_\varepsilon(0) \quad \text{при} \quad 0 < \delta \leqslant h.$$

Поэтому существует $K - \lim\limits_{\delta\to 0}\partial g(f(x_0,\delta)) = \partial_K g(f(x_0))$. Кроме того, $\partial_K g(f(x_0))$ является компактным множеством, что и завершает доказательство. $\square$

Замечание 4. Равенства в (2.6) может и не быть. Рассмотрим, например, функции:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ x-1, & \text{если } x \geqslant 2; \end{cases} \qquad (x_0 = 2)$$

$$g(y) = \begin{cases} 2y, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 1; \\ y+1, & \text{если } y \geqslant 1. \end{cases} \qquad (y_0 = f(x_0) = 1)$$

В соответствии с теоремой 1, $\partial_K f(2) = \left[\frac{1}{2};1\right]$ и $\partial_K g(1) = [1;2]$, однако, $g(f(x)) \equiv x$ при $x \geqslant 0$, откуда $\partial_K g(f(2)) = 1$. Очевидно,

$$\partial_K g(f(2)) = \{1\} \subsetneqq [1;2]\cdot\left[\frac{1}{2};1\right] = \partial_K g(1)\cdot\partial_K f(2).$$

Отметим, что в доказательстве теоремы 4, как и теоремы 3 существенно использовалась компактность K-субдифференциалов.

3. N-свойство Лузина и лемма Сакса для K-субдифференциалов

Будем рассматривать компактно субдифференцируемые функции $f : E \to \mathbb{R}$, где $E \subset \mathbb{R}$. Здесь и далее mes — классическая мера Лебега на прямой. Обобщим на K-субдифференциалы классическую лемму Сакса [11].

Лемма 3. *Обозначим $E_\ell = \{x \in E; |\partial_K f(x)| \le \ell\}$. Для произвольного измеримого $A \subset E_\ell$ имеет место неравенство:*

$$mes^* f(A) \leqslant \theta_1\cdot\ell\cdot mes(A), \tag{3.1}$$

где θ_1 — абсолютная константа.

Доказательство. Для произвольных $\delta > 0$ и $x \in A$ выберем $h < \delta$ и множество $Q(x) = [x-h; x+h]$ так, чтобы при любом $\overline{h} \in (0;h]$ и соответствующих $K_{\overline{h}}, K_{-\overline{h}} \in \partial_K f(x)$, было

$$|f(x+\overline{h}) - f(x) - K_{\overline{h}}\cdot\overline{h}| < \delta\cdot\overline{h}; \quad |f(x-\overline{h}) - f(x) - K_{-\overline{h}}\cdot\overline{h}| < \delta\cdot\overline{h}.$$

Поскольку $|\partial_K f(x)| \leq \ell$, то

$$|f(x+\overline{h}) - f(x) - K_{\overline{h}} \cdot \overline{h}| < (|K_{\overline{h}}| + \delta) \cdot \overline{h} \leqslant (\ell+\delta) \cdot \overline{h},$$

$$|f(x-\overline{h}) - f(x) - K_{-\overline{h}} \cdot \overline{h}| < (|K_{-\overline{h}}| + \delta) \cdot \overline{h} \leqslant (\ell+\delta) \cdot \overline{h}.$$

При этом $mesf([x-h; x+h]) = \sup\limits_{x_1,\ x_2 \in [x-h;\ x+h]} |f(x_2) - f(x_1)| = |f(x'') - f(x')|$ для некоторых $x', x'' \in [x-h;\ x+h]$ в силу непрерывности f. Поэтому из неравенств

$$|f(x') - f(x)| < (\ell+\delta) \cdot h' \leqslant (\ell+\delta) \cdot h,\ |f(x'') - f(x)| < (\ell+\delta) \cdot h'' \leqslant (\ell+\delta) \cdot h$$

вытекает:

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant |f(x'') - f(x)| + |f(x') - f(x)| < (\ell+\delta) \cdot (h+h) = (\ell+\delta) \cdot mes[x-\overline{h};\ x+\overline{h}].$$

Итак, $\forall \delta > 0 \quad \exists h > 0, \overline{h} \in (0; h]$:

$$mesf\left([x-\overline{h}; x+\overline{h}]\right) < (\ell+\delta) \cdot mes\left([x-\overline{h}; x+\overline{h}]\right). \tag{3.2}$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ и $p > \ell$. Выберем ограниченное открытое множество $G \subset \mathbb{R}$ такое, что

$$A \subset G \quad \text{и} \quad mesG < mesA + \varepsilon.$$

Обозначим через $\overline{K_p}$ семейство замкнутых множеств $E \subset G$, для которых $mesf(E) \leqslant \leqslant p \cdot mes(E)$. В силу (3.2), $\overline{K_p}$ покрывает множество A в смысле Безиковича [1] и по теореме Безиковича ([1], теор. 1.1) можно выделить такую последовательность $E_n \subset \overline{K_p}$, что $A \subset \bigcup\limits_n E_n \subset G$ и $\sum\limits_n I_{E_n}(x) \leqslant \theta_1$, где $I_X(\cdot)$ — характеристическая функция мнжества X. Отсюда

$$mesf(A) \leqslant mesf\left(\bigcup_n E_n\right) \leqslant \sum_n mesf(E_n) \leqslant p \cdot \theta_1 \cdot mes\left(\bigcup_n E_n\right) \leqslant$$
$$\leqslant p \cdot \theta_1 \cdot mesG \leqslant p \cdot \theta_1 \cdot (mesA + \varepsilon).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $p \to \ell$ в последнем неравенстве, получаем (3.1). Согласно теореме Безиковича, константа θ_1 зависит лишь от размерности рассматриваемого пространства. □

Следствие 2. (N – свойство Лузина для K-субдифференциалов). *Если f K-субдифференцируема на $\overline{e}$ и $mes(\overline{e}) = 0$, то $mesf(\overline{e}) = 0$.*

Доказательство. Представим $\overline{e}$ в виде $\overline{e} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{e}_n$, где $\overline{e_n} = \{x \in \overline{e}; |\partial_K f(x)| \leqslant n\}$. Очевидно, $\overline{e_n}$ измеримо и $mes(\overline{e_n}) = 0$. Согласно предыдущей лемме и в силу измеримости функции f, $mesf(\overline{e_n}) \leqslant \theta_1 \cdot n \cdot mes(\overline{e_n}) = 0$, откуда $mesf(\overline{e_n}) = 0$. Поэтому

$$mesf(\overline{e}) = mesf\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{e_n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} mesf(\overline{e_n}) = 0.$$

□

Теперь, используя доказанное N-свойство Лузина, можно легко проверить следующее утверждение, аналогичное классической лемме Сакса [11].

Лемма 4. (Лемма Сакса для K-субдифференциалов). *Если f K-субдифференцируема на E, то для всякого $\ell \geqslant 0$ и произвольного измеримого множества $A \subseteq E_\ell$ имеет место неравенство:*

$$mesf(A) \leqslant \ell \cdot mes(A).$$

Доказательство данного утверждения аналогично доказательству леммы 3, с заменой теоремы Безиковича на теорему Витали о покрытиях. Множество $f(A)$ измеримо, поскольку f непрерывна и обладает на E_ℓ N-свойством Лузина ([6], с.231).

4. Обобщённая формула конечных приращений для вещественных функций и её следствия

В этом пункте выводится формула конечных приращений для вещественных компактно субдифференцируемых функций. Как следствия этой формулы, получен ряд теорем о среднем. Будем рассматривать функции $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. Мы отправляемся от обобщённой формулы Лагранжа [7], с заменой оценки производной на оценку K-субдифференциала.

Теорема 5. *Пусть функция f непрерывна на $[a;b]$ и K-субдифференцируема на $[a;b]\backslash e$, где $e \subset [a;b]$ измеримо и $mesf(e) = 0$. Если $\partial_K f(x) \leqslant \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ неотрицательна и суммируема по Лебегу на $[a;b]\backslash e$, то*

$$f(b) - f(a) \leqslant \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(x)dx. \tag{4.1}$$

Доказательство. Пусть

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при } x \in [a;b]\backslash e, \\ 0, & \text{при } x \in e. \end{cases}$$

Положим $\Phi(x) = \int\limits_{[a;b]\backslash e} \varphi(t)dt = \int\limits_a^x \widetilde{\varphi}(t)dt \quad (a \leqslant x \leqslant b)$.

Согласно теореме Лебега о дифференцировании интеграла по верхнему пределу, $\Phi'(x) = \widetilde{\varphi}(x)$ почти всюду на $[a;b]$, откуда $\Phi'(x) = \widetilde{\varphi}(x)$ почти всюду на $[a;b]\backslash e$. Таким образом, если e_1 – множество точек из $[a;b]\backslash e$, в которых не выполнено равенство $\Phi'(x) = \widetilde{\varphi}(x)$, то $mes(e_1) = 0$. Поскольку f ввиду K-субдифференцируемос-ти, обладает на $[a;b]\backslash e$ N-свойством Лузина (следствие 2), то $mesf(e_1) = 0$. Следовательно, $mesf(e \bigcup e_1) = 0$. Фиксировав $\varepsilon > 0$, выберем покрытие множества $f(e \bigcup e_1)$ системой непересекающихся интервалов:

$$\bigcup_n (\alpha_n; \beta_n) \supset f(e \bigcup e_1); \quad \sum_n (\beta_n - \alpha_n) =: \sum_n \varepsilon_n < \varepsilon.$$

Обозначая $x_n = \sup f^{-1}((\alpha_n;\beta_n))$, положим $\varphi_\varepsilon(x) = \sum\limits_{n:x_n\leqslant x} \varepsilon_n$.
Очевидно, функция $\varphi_\varepsilon(x)$ возрастает на $[a;b]$, непрерывна справа и имеет скачки ε_n в точках x_n. Докажем, что для любого $x' \in [a;b]$ найдётся такой $x \geqslant x'$, что

$$f(x) - f(a) \leqslant \int\limits_{[a;x]\setminus e} \varphi(t)dt + \varphi_\varepsilon(x) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon. \tag{4.2}$$

Пусть U – множество точек из $[a;b]$, для которых (4.2) неверно, то есть

$$(x' \in U) \Leftrightarrow \left(\forall x \geqslant x' : f(x) - f(a) > \int\limits_{[a;b]\setminus e} \varphi(t)dt + \varphi_\varepsilon(x) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon\right). \tag{4.3}$$

Очевидно, U – отрезок в $[a;b]$. Допустим, что $U \neq \varnothing, c = \inf U$. Так как найдётся такая последовательность $x_k \to c-0$, для которой (4.2) выполнено, то, переходя к пределу при $x = x_k \to c-0$ и учитывая, что $\varphi_\varepsilon(c-0) \leqslant \varphi_\varepsilon(c)$, получим (4.2) при $x = c$. Таким образом, $c \notin U$ и $U = (c;b]$. Рассмотрим два возможных случая положения точки c:

а) Если $c \notin e\bigcup e_1$, то существуют $\partial_K f(x)$ и $\Phi'(c)$, причём $\Phi'(c) = \varphi(c)$. Найдём такой интервал $c < x < c+\delta$, в котором:

$$\partial_K f(c) \subset \partial f(c,\delta) = \overline{conv}\left\{\frac{\triangle f(c,h)}{h};\ 0 < |h| \leqslant \delta\right\} \subset O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\partial_K f(c)),$$

$$\varphi(c) \leqslant \frac{\Phi(x)-\Phi(c)}{x-c} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая $\partial_K f(c) \leqslant \varphi(c)$, получаем

$$f(x) - f(c) \subset (x-c)O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\partial_K f(c)) \leqslant \left(\varphi(c) + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x-c) = \varphi(c)(x-c) + \frac{\varepsilon}{2}(x-c) \leqslant$$

$\leqslant \Phi(x) - \Phi(c) + \varepsilon(x-c)$. Отсюда

$$f(x) - f(c) \leqslant \Phi(x) - \Phi(c) + \varepsilon(x-c). \tag{4.4}$$

Далее, так как $c \notin U$, то (4.3) неверно при некотором $x \geqslant c$. Но поскольку (4.3) выполняется при $x > c$, то (4.3) неверно именно при $x = c$, то есть:

$$f(c) - f(a) \leqslant \Phi(x) - \Phi(a) + \varphi_\varepsilon(c) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon. \tag{4.5}$$

Складывая (4.4) и (4.5) и учитывая монотонность $\varphi_\varepsilon(x)$, получаем:

$$f(x) - f(a) \leqslant \Phi(x) - \Phi(a) + \varphi_\varepsilon(x) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon$$

при $x \in [c;c+\delta]$, что противоречит определению точки c.

b) Если $c \in e \bigcup e_1$, то $c \in f^{-1}((\alpha_{n_0};\beta_{n_0}))$ при некотором натуральном n_0. Следовательно, для любого $x \in f^{-1}((\alpha_{n_0};\beta_{n_0}))$:

$$f(x) - f(c) \leqslant \beta_{n_0} - \alpha_{n_0} = \varepsilon_{n_0}.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $x \to x_{n_0} := \sup f^{-1}((\alpha_{n_0};\beta_{n_0}))$, с учётом непрерывности функции f получим

$$f(x_{n_0}) - f(c) \leqslant \varepsilon_{n_0}. \tag{4.6}$$

Из (4.5) и (4.6) следует, что

$$f(x_{n_0}) - f(a) \leqslant [\Phi(c) - \Phi(a)] + [\varphi_\varepsilon(c) + \varepsilon_{n_0}] + [\varepsilon(c-a) + \varepsilon] <$$

$$< \Phi(x_{n_0}) - \Phi(a) + \varphi_\varepsilon(x_{n_0}) + \varepsilon(x_{n_0} - a) + \varepsilon,$$

то есть (4.2) выполнено при $x = x_{n_0} > c$, что противоречит определению множества U. Таким образом, $U = \varnothing$. Полагая теперь $x = b$ в (4.2) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем (4.1). □

Из теоремы 5 легко вытекают следующие результаты.

Теорема 6. *Пусть функция f непрерывна на $[a;b]$ и K-субдифференцируема на $[a;b]\backslash e$, где множество $e \subset [a,b]$ измеримо и $mesf(e) = 0$. Если $\partial_K f(x) \leqslant C$ $\forall x \in [a,b]\backslash e$, то $\mid f(b) - f(a) \mid \leqslant C \cdot \mathrm{mes}([a;b]\backslash e)$.*

Теорема 7. *Пусть функция f непрерывна на $[a;b]$ и K-субдифференцируема на $[a;b]\backslash e$, где множество $e \subset [a,b]$ измеримо и $mesf(e) = 0$. Если $\mid \partial_K f(x) \mid \leq C$ $\forall x \in [a,b]\backslash e$, то $\mid f(b) - f(a) \mid \leqslant C \cdot \mathrm{mes}([a;b]\backslash e)$.*

Отметим, что, в отличие от классической формулы Лагранжа, конечность или счётность "исключительного"множества e здесь не обязательна.

5. Лемма Ферма, теоремы Ролля, Коши и Дарбу для K-субдифференциалов

Лемма 5. ***(Лемма Ферма для K-субдифференциалов)*** *Если $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ K-субдифференцируема в точке экстремума $x_0 \in [a;b]$, то $0 \in \partial_K f(x_0)$.*

Доказательство. Так как функция f компактно субдифференцируема в точке x_0, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : (0 < |h| < \delta) \Rightarrow \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in O_\varepsilon(\partial_K f(x_0)).$$

Поэтому для всякого h с $0 < |h| < \delta$ найдётся такое число $K_h \in \partial_K f(x_0)$, что

$$f(x_0+h) - f(x_0) = (K_h + \varepsilon) \cdot h. \tag{5.1}$$

Поскольку x_0 – точка экстремума, то $f(x_0+h)-f(x_0)$ сохраняет знак для достаточно малых h.

Если $0 \notin \partial_K f(x_0)$, то в силу того, что $\partial_K f(x_0) = [\alpha;\beta]$ для некоторых $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, имеем: либо $\partial_K f(x_0) > 0$, либо $\partial_K f(x_0) < 0$. Следовательно, правая часть (5.1) меняет знак при изменении знака h, в то время, как левая часть (5.1) сохраняет знак. Это противоречие завершает доказательство леммы. □

Теорема 8. ***(Теорема Ролля для K-субдифференциалов).*** *Если функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a;b]$ и K-субдифференцируема на $(a;b)$, причём $f(a)=f(b)$, то $\exists c \in (a;b) :\ 0 \in \partial_K f(c)$.*

Эта теорема выводится из леммы 5 по стандартной схеме.

Теорема 9. ***(Теорема о среднем для K-субдифференциалов).*** *Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$ и K-субдифференцируема на $(a;b)$. Тогда $\exists c : a < c < b$, такое, что*

$$f(b)-f(a) \in \partial_K f(c)\cdot(b-a).$$

Эта теорема также выводится из теоремы 8 стандартным образом.

Следствие 3. ***(Условие монотонности функции в терминах K-субдифференциалов).*** *Если в любой точке некоторого интервала K-субдифференциал функции является неотрицательными (положительным), то функция не убывает (возрастает) на этом интервале.*

Доказательство. Действительно, если $x_1 < x_2$, то по теореме 9

$$f(x_2)-f(x_1) \in \partial_K f(\xi)\cdot(x_2-x_1),$$

где $x_1 < \xi < x_2$. Поэтому знак $f(x_2)-f(x_1)$ совпадает со знаком $\partial_K f(\xi)$. □

Выведем аналоги теорем Коши и Дарбу для компактных субдифференциалов.

Теорема 10. ***(Теорема Коши для K-субдифференциалов).*** *Пусть функции f и g непрерывны на $[a,b]$ и K-субдифференцируемы на $(a;b)$, причём $g(a) \neq g(b)$. Тогда $\exists c \in (a;b)$:*

$$0 \in \partial_K f(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot \partial_K g(c).$$

Доказательство. Введём вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = [f(x)-f(a)]\cdot[g(b)-g(a)] - [f(b)-f(a)]\cdot[g(x)-g(a)].$$

Тогда $\varphi(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и K-субдифференцируема внутри $(a;b)$, причём $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. В сответствии с теоремой 8, $\exists c \in (a;b) : 0 \in \partial_K \varphi(c)$. Ввиду того, что компактный субдифференциал субаддитивен, имеем:

$$\partial_K \varphi(x) \subset \partial_K f(x)\cdot[g(b)-g(a)] - \partial_K g(x)\cdot[f(b)-f(a)],$$

откуда

$$0 \in \partial_K \varphi(c) \Rightarrow 0 \in \partial_K f(c) \cdot [g(b) - g(a)] - \partial_K g(c) \cdot [f(b) - f(a)].$$

Следовательно, $\quad 0 \in \partial_K f(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot \partial_K g(c).$ $\square$

Лемма 6. *Пусть функция f K-субдифференцируема на $[a;b]$, причём $\partial_K f(a) < 0 < \partial_K f(b)$. Тогда $\exists c \in (a;b): \quad 0 \in \partial_K f(c)$.*

Доказательство. Для достаточно малого $\delta > 0$ при $0 < |\triangle x| < \delta$ имеем:

$$\partial_K f(a) = K - \lim_{\delta \to 0} \left(\overline{conv} \left\{ \frac{\triangle f(a, \triangle x)}{\triangle x};\ 0 < |\triangle x| \leqslant \delta \right\} \right) < 0 \Rightarrow \frac{f(a + \triangle x) - f(a)}{\triangle x} < 0,$$

откуда $f(a + \triangle x) - f(a) < 0 \Rightarrow f(a) \neq \min\limits_{x \in [a;\ b]} f(x)$;

$$\partial_K f(b) = K - \lim_{\delta \to 0} \left(\overline{conv} \left\{ \frac{\triangle f(b, \triangle x)}{\triangle x};\ 0 < |\triangle x| \leqslant \delta \right\} \right) > 0 \Rightarrow \frac{f(b + \triangle x) - f(b)}{\triangle x} > 0$$

при $|\triangle x| \leqslant \delta$, откуда $f(b + \triangle x) - f(b) < 0 \Rightarrow f(b) \neq \min\limits_{x \in [a;\ b]} f(x)$.

Следовательно, функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на отрезке $[a;b]$ в точке $c \in (a;b)$. Согласно лемме 5.1, $0 \in \partial_K f(c)$. $\square$

Теорема 11. ***(Теорема Дарбу для K-субдифференциалов)**. Пусть функция f K-субдифференцируема на $[a;b]$, причём $\partial_K f(a) \leqslant A < B \leqslant \partial_K f(b)$. Тогда $\forall A < C < B \quad \exists c \in (a;b): \ C \in \partial_K f(c)$.*

Доказательство. Введём функцию $\varphi(x) = f(x) - Cx$. В силу субаддитивности компактного субдифференциала $\partial_K \varphi(x) \subset \partial_K f(x) - C$. Отсюда

$$\partial_K \varphi(a) \subset \partial_K f(a) - C \leqslant A - C < 0,$$

$$\partial_K \varphi(b) \subset \partial_K f(b) - C \geqslant B - C > 0.$$

В силу леммы 6, это влечёт $C \in \partial_K f(c)$. $\square$

Автор выражает признательность И. В. Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список цитируемых источников

1. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. — М.: Мир, 1978. — 153с.
2. *Demyanov V.F.* The rise of nonsmooth analysis: its main tools.// Кибернетика и системный анализ. — 2002 — Вып.4 — с.63 – 85
3. *Демьянов В.Ф., Рощина В.А.* Обощённые субдифференциалы и экзостеры //Владикавказский математический журнал.— 2006 — т.8 — Вып.4 — с.19 – 31.
4. *Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.* Субдифференциалы: теория и приложения. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-е, 1992. — 270с.

5. *Мордухович Б.Ш.* Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988. — 360с.
6. *Натансон И.П.* Теория функций действительного переменного. — М.: Наука, 1974. — 480с.
7. *Орлов И.В.* Формула конечных приращений для отображений в индуктивные шкалы пространств //Математическая физика, анализ, геометрия. — 2001 — т.8 — №4 — с.419 – 439.
8. *Орлов И.В., Стонякин Ф.С.* K-субдифференциалы и K-теорема о среднем для отображений в локально выпуклые пространства//Международная конференция, посвящённая памяти И.Г. Петровского "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы". Тезисы докладов — М.: МГУ, 2007. — с.220 – 221.
9. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980.— 320с.
10. *Рокафеллар.Р.* Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 472с.
11. *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: "Факториал Пресс 2004. — 496с.

Получена 11.05.2007