Динамические системы, вып. 25 (2008), 125–134

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.98

Нова теорема Радона-Нікодима для інтегралу Бохнера

Ф. С. Стонякін

Таврійський національний університет ім. В.І. Вернадського,
Сімферополь 95007. *E-mail: fedyor@mail.ru*

Анотація. Введено нове поняття субдиференціалу за скінченною мірою для функцій множини, що приймають значення у віддільних дійсних локально опуклих просторах (ЛОП). Доведено нову форму теореми Радона-Нікодима про представність абсолютно неперервних ЛОП-значних функцій множини сильної обмеженої вариації у вигляді інтегралу Бохнера. Розглянуто важливий приклад класу відображень, що задовільняють умовам цього результату.

Ключові слова: компактний субдиференціал, теорема Радона-Нікодима, локально опуклий простір, метризовний простір, К-ліпшицеве відображення.

Вступ

Добре відомо ([1] — [6]), що класична теорема Радона-Нікодима про представність абсолютно неперервних функцій множини у вигляді інтегралу Бохнера не є вірною для відображень у довільні локально опуклі простори (ЛОП). Це призвело, зокрема, до поняття *властивості Радона-Нікодима* (RNP). Довільне σ-адитивне μ-абсолютно неперервне відображення борелевської σ-алгебри (I) подмножин дійсного напівсегмента $I = [a; b)$ у простір з RNP, яке має сильну обмежену вариацію, можна подати у вигляді невизначеного інтегралу Бохнера. Простори з RNP відіграють важливу роль у теорії банахових та локально опуклих просторів з огляду на з'вязок з цілою низкою задач сучасної теорії ймовірностей, теорії ігор, гармонійного аналізу та топології ([7] — [10]). У той же час, обмеженість класу просторів з RNP призвела до активної роботи над створенням теорем типу Радона-Нікодима для відображень у векторні простори ([5], [11] — [18]).

У цій роботі ми по-новому підходимо до розв'язання даної задачи для відображень $F : (I) \to E$, де E — довільний дійсний віддільний ЛОП, та вводимо поняття K_μ-субдиференціалу за довільною скінченною мірою μ (визначення 1), на базі якого доводимо нову форму теореми Радона-Нікодима про представність μ-абсолютно неперервних відображень у вигляді невизначеного інтегралу Бохнера (теорема 1). Також розглядається приклад класу відображень, що задовільняють умовам теореми 1.

© *Ф. С. СТОНЯКІН*

1. Поняття K_μ-субдиференціалу функцій множини

У даному пункті для відображень $F:(I)\to E$ ми введемо нове у нелінійному аналізі поняття K_μ-субдиференціалу за довільною скінченною мірою μ, що задана на (I). На базі цього поняття у наступному пункті ми отримаємо основний результат роботи. Будемо позначати через $U(0)$ довільний замкнений опуклий окіл нуля у ЛОП E, а через $\overline{conv}A$ — замкнену опуклу оболонку множини $A\subset E$.

Означення 1. *Частинним K_μ-субдиференціалом F у точці $x\in I$, що відповідає довільному $\delta>0$*, назвемо множину

$$\partial_K^\mu F(x,\delta)=\overline{conv}\left\{\frac{F([\alpha;\beta))}{\mu([\alpha;\beta))}\ \middle|\ x-\delta<\alpha\leqslant x<\beta<x+\delta\right\}\ ;$$

якщо $\mu([\alpha;\beta))=0$, то будемо вважати, що (ϑ — нуль у E)

$$\frac{F([\alpha;\beta))}{\mu([\alpha;\beta))}=\begin{cases}\vartheta, & \text{якщо } F([\alpha;\beta))=\vartheta\ ,\\ \infty, & \text{якщо } F([\alpha;\beta))\neq\vartheta\ .\end{cases}$$

Множину $\partial_K^\mu F(x)=\bigcap\limits_{\delta>0}\partial_K^\mu F(x,\delta)$ назвемо *K_μ-субдиференціалом*, а відображення F *K_μ-субдиференційовним у точці x*, якщо множина $\partial_K^\mu F(x)$ є компактною та $\forall U=U(0)\subset E\ \exists\delta=\delta_U>0:(0<\delta<\delta_U)\Rightarrow(\partial_K^\mu F(x,\delta)\subset\partial_K^\mu F(x)+U(0))$.

Раніше нами (див. [24] — [26]) розглядалося поняття K-субдиференціалу для відображень $f:\overline{I}=[a;b]\to E$.

Означення 2. Для довільного $\delta>0$ *частинним K-субдиференціалом f у точці $x\in I$, що відповідає $\delta>0$*, називається слідуюча множина:

$$\partial_K f(x,\delta)=\overline{conv}\left\{\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\ \middle|\ x-\delta<\alpha\leqslant x<\beta<x+\delta\right\}\ .$$

Множина $\partial_K f(x)=\bigcap\limits_{\delta>0}\partial_K f(x,\delta)$ називається *K-субдиференціалом*, а відображення f *K-субдиференційовним у точці x*, якщо $\partial_K f(x)$ є компактом та

$$\forall U=U(0)\subset E\quad\exists\delta=\delta_U>0:(0<\delta<\delta_U)\Rightarrow(\partial_K f(x,\delta)\subset\partial_K f(x)+U(0))\ .$$

Припустимо, що функція множини $F:(I)\to E$ є адитивною. Тоді $F([\alpha;\beta))=$ $=\widetilde{F}(\beta)-\widetilde{F}(\alpha)\ \forall\alpha,\beta\in I$, де $\widetilde{F}(x)=F([a;x))\ \forall x\in[a;b]$. Якщо m — класична міра Лебега на I, то K_m-субдиференціал $\partial_K^m F(x)$ співпадає з K-субдиференціалом $\partial_K\widetilde{F}(x)$ відображення $\widetilde{F}$. З огляду на це K_m-субдиференціал функції множини F домовимося називати просто K-субдиференціалом та позначати $\partial_K F(x)$.

Безпосередньою перевіркою можна встановити наступні властивості K_μ-субдифе-ренціалу.

Пропозиція 1. *Якщо відображення F є диференційовним за мірою μ у точці $x \in I$, то*

$$\partial_K^{\mu} F(x) = \left\{ \frac{dF}{d\mu}(x) \right\} = \left\{ \lim_{[\alpha;\beta)\to x} \frac{F([\alpha;\beta))}{\mu([\alpha;\beta))} \right\} .$$

Пропозиція 2. *Нехай відображення F є адитивним. Якщо $\widetilde{F}$ є диференційовним у звичайному сенсі зправа та зліва, то K-субдиференціал F у точці x дорівнює наступному векторному відрізку*

$$\partial_K F(x) = \left[\widetilde{F}'_-(x); \widetilde{F}'_+(x) \right] .$$

Пропозиція 3. *(i) (**однорідність**) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \partial_K^{\mu}(\lambda \cdot F)(x) = \lambda \cdot \partial_K^{\mu} F(x)$;*

*(ii) (**субадитивність**) $\partial_K^{\mu}(F_1 + F_2)(x) \subset \partial_K^{\mu} F_1(x) + \partial_K^{\mu} F_2(x)$;*

(iii) $A \in L(E;G) \Rightarrow \left(\partial_K^{\mu}(A[F])(x) = \overline{A(\partial_K^{\mu} F(x))} \right)$.

У пункті 3 буде доведено, що K_{μ}-субдиференційовність є значним узагальненням звичайної диференційовності за мірою.

2. Нова форма теореми Радона-Нікодима для інтегралу Бохнера відображень у ЛОП

У даному пункті ми покажемо, що для довільної скінченної міри μ кожне σ-адитивне μ-абсолютно неперервне відображення борелевської σ-алгебри (I) підмножин дійсного напівсегмента $I = [\alpha;\beta)$ у віддільний дійсний ЛОП, яке має сильну обмежену вариацію та μ-майже скрізь є K_{μ}-субдиференційовним, можна подати у вигляді невизначеного інтегралу Бохнера $F(Q) = \int\limits_Q f d\mu$, $Q \in (I)$. Почнемо з низки допоміжних тверджень.

Лема 1. *Нехай E — дійсний віддільний ЛОП, $F : (I) \to E$ є K_{μ}-субдиференційовним у точці $x \in I$. Якщо послідовність напівсегментів $[\alpha_n;\beta_n)$ стягується до точки x, то $\partial_K^{\mu} F(x)$ містить усі можливі частинні границі послідовності*

$$\frac{F([\alpha_n;\beta_n))}{\mu([\alpha_n;\beta_n))}\ (n \in \mathbb{N}) . \tag{2.1}$$

Більше того, якщо E — простір Фреше, то такі границі обов'язково існують.

Доведення. Помітимо, що відповідно до означення частинних K_{μ}-субдиференціалів усі можливі частинні границі послідовності (2.1) містяться у кожному частинному K_{μ}-субдиференціалі $\partial_K^{\mu} F(x,\delta)$, $\delta > 0$, й тому містяться і в $\partial_K^{\mu} F(x)$.

Нехай тепер E — простір Фреше. Для деякої послідовності ε_n-окілів нуля $U_{\varepsilon_n}(0)$ ($\varepsilon_n \to 0$) маємо

$$\frac{F([\alpha_n;\beta_n))}{\mu([\alpha_n;\beta_n))} \subset \partial_K^{\mu} F(x, \max\{x-\alpha_n;\beta_n - x\}) \subset \partial_K^{\mu} F(x) + U_{\varepsilon_n}(0) \ , \text{ тоді}$$

$$\left(\frac{F([\alpha_n;\beta_n))}{\mu([\alpha_n;\beta_n))} + U_{\varepsilon_n}(0)\right) \bigcap \partial_K^{\mu} F(x) \neq \varnothing \ .$$

Оберемо послідовність точок x_n з вищевказаних перетинів. Оскільки множина $\partial_K^{\mu} F(x)$ є компактною, а тому й секвенціально компактною [27] (простір є метризовним), то $\{x_n\}$ містить збіжну підпослідовність $x_{n_i} \to x_0$, $x_0 \in \partial_K^{\mu} F(x)$. Тоді

$$\frac{F([\alpha_n;\beta_n))}{\mu([\alpha_n;\beta_n))} \to x_0 \ ,$$

що і доводиться. □

Нагадаємо, що відображення F є μ-абсолютно неперервним, якщо $\forall Q \in (I)$ з рівності $\mu(Q) = 0$ випливає рівність $F(Q) = \vartheta$ (ϑ — нуль у E). Під селектором багатозначного відображення $\partial_K^{\mu} F : I \to 2^E$ будемо розуміти довільне відображення $\widehat{\partial}_K^{\mu} F : I \to E$ таке, що $\widehat{\partial}_K^{\mu} F(x) \in \partial_K^{\mu} F(x)$ для μ-майже всіх $x \in I$.

Лема 2. *Нехай E — віддільний дійсний ЛОП, відображення $F : (I) \to E$ є σ-адитивним, μ-абсолютно неперервним та μ-майже скрізь K_μ-субдиференційовним на I. Тоді для довільного функціоналу $\ell \in E^*$ та селектору $\widehat{\partial}_K^{\mu} F$ маємо*

$$\frac{d}{d\mu}\ell(F(x)) = \ell(\widehat{\partial}_K^{\mu} F(x)) \quad \mu\text{-майже скрізь на } I \ . \tag{2.2}$$

Доведення. З огляду на пропозицію 3(iii) маємо $\partial_K^{\mu} \ell(F(x)) = \ell(\partial_K^{\mu} F(x))$. Далі, з μ-абсолютної неперервності F (а тому й $\ell(F)$), а також з класичної теореми Радона-Нікодима, дійснозначна функція множини $\ell(F)$ μ-майже скрізь на I є диференційовною за мірою μ. Тому множина $\ell(\partial_K^{\mu} F(x))$ є одноточковою μ-майже скрізь на I та вірна рівність (2.2). □

Нехай $\{\|\cdot\|_j\}_{j\in J}$ — визначальна система напівнорм у ЛОП E. Нагадаємо, що $F : (I) \to E$ має сильну обмежену варіацію, якщо для довільного $j \in J$ величина $V_j(F) = \sup\{\|F([x_{k-1};x_k))\|_j\}$ є скінченною, де $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. За стандартною схемою (див. [2], с.102), з урахуванням леми 1, перевіряється

Лема 3. *Нехай E — дійсний банахів простір, $F : (I) \to E$ має сильну обмежену вариацію та μ-майже скрізь на I є K_μ-субдиференційовним. Тоді довільний селектор $\widehat{\partial}_K^{\mu} F$ μ-майже скрізь є сепарабельнозначним.*

Тепер переходимо до основного результату. Нагадаємо, що інтегровність деякого відображення за Бохнером (або сильна інтегровність) у ЛОП E означає його інтегровність в усіх фактор-просторах, які побудовані по ядрам визначальних напівнорм ЛОП E, що поповнені відносно фактор-норм (див., наприклад [29]).

Теорема 1. *Нехай E — дійсний віддільний ЛОП, σ-адитивне абсолютно неперервне відносно скінченної міри μ відображення $F:(I)\to E$ має на I сильну обмежену вариацію та є μ-майже скрізь на I K_μ-субдиференційовним. Тоді довільний селектор $\widehat{\partial}_K^{\mu}F\in\partial_K^{\mu}F$ є інтегровним за Бохнером на (I), причому*

$$F(Q)=(B)\int\limits_Q \widehat{\partial}_K^{\mu}F(t)d\mu(t)\quad \forall Q\in(I)\ . \tag{2.3}$$

Доведення. 1) Розглянемо довільний селектор $\widehat{\partial}_K^{\mu}F:I\to E$ та функціонал $\ell\in E^*$. Враховуючи μ-абсолютну неперервність $\ell(F)$ та рівність (2.2), отримаємо

$$\ell(F(Q))=\int\limits_Q \frac{d}{d\mu}\left[\ell(F(t))\right]d\mu(t)=\int\limits_Q \ell\left(\widehat{\partial}_K^{\mu}F(t)\right)d\mu(t)\quad \forall Q\in(I)\ ,$$

звідки випливає інтегровність за Петісом $\widehat{\partial}_K^{\mu}F$ на I та рівність

$$F(Q)=(P)\int\limits_Q \widehat{\partial}_K^{\mu}F(t)d\mu(t)\quad \forall Q\in(I)\ . \tag{2.4}$$

2) Покажемо, що довільний селектор $\widehat{\partial}_K^{\mu}F$ у рівності (2.4) є інтегровним за Бохнером. Нехай $\widehat{E}_j$ — поповнення фактор-просторів $E_j=E/ker\|\cdot\|_j$ відносно фактор-норм $\|\cdot\|_j^{\frown}=\|\cdot\|_j$, $\varphi_j:E\to E_j$, $F_j=\varphi_j(F):S\to\widehat{E}_j$. Застосовуючи φ_j до обох частин (2.4), отримаємо

$$F_j(Q)=(P)\int\limits_Q \widehat{\partial}_K^{\mu}F_j(t)d\mu(t)\quad \forall Q\in(I)\ . \tag{2.5}$$

З огляду на слабку вимірність кожного селектора $\widehat{\partial}_K^{\mu}F$, довільний селектор $\widehat{\partial}_K^{\mu}F_j=\varphi_j(\widehat{\partial}_K^{\mu}F)$ є слабко вимірним, а згідно з лемою 3, μ-майже скрізь сепарабельнозначним й тому (див. [2], с. 86) сильно вимірним. Далі, введемо наступну послідовність функцій множини на (I):

$$f_n(t)=\frac{F\left(\left[a+(k-1)\frac{b-a}{2^n};\ a+k\frac{b-a}{2^n}\right)\right)}{\mu\left(\left[a+(k-1)\frac{b-a}{2^n};\ a+k\frac{b-a}{2^n}\right)\right)}$$

$$\text{для } t\in\left[a+(k-1)\frac{b-a}{2^n};\ a+k\frac{b-a}{2^n}\right)\quad k=\overline{1,2^n},\ n\in\mathbb{N}\ . \tag{2.6}$$

Оскільки F має сильну обмежену вариацію та кожна точка з I належить лише одному з напівсегментів вигляду (2.6), то для довільних $n\in\mathbb{N}$ и $j\in J$ маємо

$$\int\limits_I \|f_n(t)\|_j d\mu(t)\leqslant V_j(F)<+\infty\ . \tag{2.7}$$

Помітимо, що для кожної точки $t \in I$ K_μ-субдиференційовності відображення F (а тому й F_j; $\partial_K^\mu F_j(t) = \varphi_j(\partial_K^\mu F(t))$ за пропозицією 3(iii)) є послідовність сегментів вигляду (2.6), що стягуються до точки t. Тоді за лемою 1 множина частинних границь послідовості $\{f_n^j(t)\}_{n=1}^\infty$, де $f_n^j(t) = \varphi_j(f_n(t))$ є непорожньою та міститься у $\partial_K^\mu F_j(t)$. Позначимо через $\ell_j(t) = \varliminf_{n\to\infty} \|f_n^j(t)\|\widehat{\ }_j$ та $\forall i \in \mathbb{N}$ оберемо таку функцію $f_{n_i}^j(t)$, що $\|f_{n_i}^j(t)\|\widehat{\ }_j < \ell_j(t) + \frac{1}{i}$.

Не зменьшуючи загальності міркувань та переходячи, якщо потрібно, до підпослідовності, маємо

$$f_{n_i}^j(t) = \varphi_j \left(\frac{F\left(\left[a + (k-1)\frac{b-a}{2^{n_i}};\ a + k\frac{b-a}{2^{n_i}}\right)\right)}{\mu\left(\left[a + (k-1)\frac{b-a}{2^{n_i}};\ a + k\frac{b-a}{2^{n_i}}\right)\right)} \right) =$$

$$= \frac{F_j\left(\left[a + (k-1)\frac{b-a}{2^{n_i}};\ a + k\frac{b-a}{2^{n_i}}\right)\right)}{\mu\left(\left[a + (k-1)\frac{b-a}{2^{n_i}};\ a + k\frac{b-a}{2^{n_i}}\right)\right)} \longrightarrow \widetilde{\partial}_K^\mu F_j(t)$$

для деякого селектору $\widetilde{\partial}_K^\mu F_j(t) \in \partial_K^\mu F_j(t)$ μ-майже скрізь на I. Маємо

$$\|\widetilde{\partial}_K^\mu F_j(t)\|\widehat{\ }_j \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|f_n^j(t)\|\widehat{\ }_j \tag{2.8}$$

μ-майже скрізь на I $\forall j \in J$.

Оскільки $\widetilde{\partial}_K^\mu F_j$ є сильно вимірним, то з (2.7), (2.8) та теореми Фату [28] випливає, що

$$\int\limits_I \|\widetilde{\partial}_K^\mu F_j(t)\|\widehat{\ }_j d\mu(t) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_I \|f_n^j(t)\|\widehat{\ }_j d\mu(t) = \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_I \|f_n^j(t)\|_j d\mu(t) \leqslant V_j(F) < \infty\ ,$$

тобто селектор $\widetilde{\partial}_K^\mu F_j$ є інтегровним за Бохнером на I [2, 28], причому з (2.5) випливає

$$F_j(Q) = (B)\int\limits_Q \widetilde{\partial}_K^\mu F_j(t) d\mu(t) \quad \forall Q \in (I). \tag{2.9}$$

Оскільки простір $\widehat{E}_j$ є банаховим, то з огляду на (2.9) та диференційовність інтегралу Бохнера у випадку банахових просторів (див. [2], с. 101 та [28], с. 142)

$$\partial_K^\mu F_j(t) = \frac{d}{d\mu} F_j(t) \quad \mu - \text{майже скрізь на } I \text{ (похідна береться у } \widehat{E}_j)\ ,$$

тобто множина $\partial_K^\mu F_j(t) = \varphi_j(\partial_K^\mu F(t))$ μ-майже скрізь є одноточковою на I. Отже, для кожного $j \in J$ довільний селектор $\widehat{\partial}_K^\mu F_j(t) = \widetilde{\partial}_K^\mu F_j(t) = \partial_K^\mu F_j(t) = \varphi_j(\widehat{\partial}_K^\mu F(t))$ є інтегровним за Бохнером на I. З огляду на довільність вибору $j \in J$ це означає інтегровність за Бохнером у ЛОП E довільного селектору $\widehat{\partial}_K^\mu F$ K_μ-субдиференціалу $\partial_K^\mu F$. Залишається лише помітити, що рівність (2.3) тепер безпосередньо випливає з (2.4). Теорему доведено. □

Зауваження 1. Нехай E — метризовний ЛОП. Оскільки для інтеграла Бохнера відображень (I) у E виконуються усі умови теореми 1 (K_μ-субдиференційовність μ-майже скрізь випливає зі зліченності визначальної системи напівнорм простору E (див. [27] та пропозицію 1), то відображення $F:(I)\to E$ є σ-адитивним, μ-абсолютно неперервним, μ-майже скрізь K_μ-субдиференційовним на I та має сильну обмежену вариацію тоді й тільки тоді, коли має місце рівність (2.3).

Зауваження 2. Відома ціла низка теорем типа Радона-Нікодима ([5], [11] — [18]) для векторнозначних функций множини F, в котрих поряд з умовами абсолютної неперервності та обмеженості сильної вариації на відображення $F:(I)\to E$ накладається умова компактності середнього образа (або близька до неї)

$$\left\{\frac{F(Q)}{\mu(Q)}\ \middle|\ Q\in(I),\ \mu(Q)>0\right\}\ ,$$

котра значно складніша за умову K_μ-субдиференційовності μ-майже скрізь на I (у ній розглядаються довільні вимірні множини Q, а не лише напівсегменти).

3. K_μ-липшицеві відображення

Тепер перед нами виникають два питання: чи існують відображення, що задовільняють умовам теореми 1 та чи не можна у ній замінити умову (μ-майже скрізь) K_μ-субдиференційовності звичайною диференційовністю за мірою? У цьому пункті роботи ми введемо новий клас K_μ-ліпшицевих відображень (I) у віддільні ЛОП E та покажемо, що довільне відображення цього класу задовільняє умовам теореми 1. Більше того, ми наведемо приклад K_μ-ліпшицева відображення, яке є μ-майже скрізь K_μ-субдиференційовним, але ніде не є диференційовним за мірою μ всюди, крім однієї точки I.

Означення 3. Будемо казати, що відображення F є *K_μ-ліпшицевим* на I (або $F\in Lip_{K,\ \mu}(I)$), якщо існує такий опуклий компакт $C\subset E$, для якого

$$F(Q)\subset C\cdot\mu(Q)\quad\forall Q\in(I)\ . \tag{3.1}$$

Якщо μ — класична міра Лебега на прямій, то будемо казати, що відображення F є *K-ліпшицевим* на I та позначати $F\in Lip_K(I)$.

Ми зберігаємо усі позначення попередніх пунктів. Помітимо, що коли $F\in$ $\in Lip_{K,\ \mu}(I)$, то F є μ-абсолютно неперервним та має сильну обмежену вариацію (бо $\|C\|_j<\infty$ $\forall j\in J$). Далі, $\partial_K^\mu F(x,\delta)\subset C$ $\forall x\in I$ та достатньо малого $\delta>0$, звідки $\bigcap\limits_{\delta>0}\partial_K^\mu F(x,\delta)\neq\varnothing$ $\forall x\in I$. Оскільки $\widetilde{\partial}_K^\mu F_j(x)=\varphi_j(\widetilde{\partial}_K^\mu F(x))\in\varphi_j(C)$, а множина $\varphi_j(C)$ є секвенціально компактною (див. доведення леми 1) у банаховому просторі $\widehat{E}_j$, то за лемою 1 $F_j=\varphi_j(F)$ є K_μ-субдиференційовним на I, причому $\widetilde{\partial}_K^\mu F_j(t)\in\partial_K^\mu F_j(t)$. Тепер за теоремою 1

$$F_j(Q)=(B)\int\limits_Q\widetilde{\partial}_K^\mu F_j(t)d\mu(t)\quad\forall Q\in(I)\ ,$$

звідки за означенням інтегралу Бохнера

$$F(Q) = (B)\int\limits_Q \widetilde{\partial}_K^{\mu} F(t)d\mu(t) \quad \forall Q \in (I)\ .$$

Тепер наведемо приклад K-ліпшицева відображення, яке не є диференційовним всюди, за виключенням однієї точки. Позначимо через m класичну міру Лебега на дійсній прямій.

Приклад 1. Нехай E_T — простір дійсних функцій $\xi = \xi(\theta)$, що задані на $T = (0;1)$ з визначальною системою напівнорм $\{\|\cdot\|_t\}_{t\in T}$, яка відповідає топології поточкової збіжності. Задамо відображення $F : (I) \to E_T$, де $I = [0;1)$, наступним чином:

$$F(Q,\theta) = m\left(Q\bigcap[0;\theta)\right)\ \forall Q \in (I) \text{ та } \forall\theta \in I\ .$$

Покладемо $\widetilde{F}(x) = F([0;x))\ \forall x \in I$. Для довільного $s \in T$ та достатньо малого $\triangle s > 0$ маємо

$$\frac{\widetilde{F}(s+\triangle s) - \widetilde{F}(s)}{\triangle s}(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{для } 0 < s < s+\triangle s \leqslant \theta < 1\ , \\ 0, & \text{для } 0 < \theta \leqslant s < s+\triangle s < 1\ ; \end{cases}$$

$$\frac{\widetilde{F}(s-\triangle s) - \widetilde{F}(s)}{-\triangle s}(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{для } 0 < s-\triangle s < s \leqslant \theta < 1\ , \\ 0, & \text{для } 0 < \theta \leqslant s-\triangle s < s < 1\ ; \end{cases}$$

і тому $\widetilde{F}$ має на I ліву та праву похідні: $\widetilde{F}'_+(s) = F_s^1(\cdot)$, $\widetilde{F}'_-(s) = F_s^2(\cdot)$, де

$$F_s^1(\theta) = 1 \quad \text{для} \quad 0 < s < \theta < 1\ , \qquad F_s^1(\theta) = 0 \quad \text{для} \quad 0 < \theta \leqslant s < 1\ ;$$

$$F_s^2(\theta) = 1 \quad \text{для} \quad 0 < s \leqslant \theta < 1\ , \qquad F_s^2(\theta) = 0 \quad \text{для} \quad 0 < \theta < s < 1\ .$$

Помітимо, що $F_s^1(\cdot) \neq F_s^2(\cdot)$ для довільного $s \in T$. Тому відображення F ніде на T не є диференційовним. Однак з огляду на твердження 2 F скрізь на T є K-субдиференційовним та $\partial_K F(s) = [F_s^1(\theta); F_s^2(\theta)]$ (векторний відрізок) $\forall s \in T$.

Покажемо, що $F \in Lip_K(I)$. Легко перевірити, що F має сильну обмежену вариацію та є абсолютно неперервним відносно міри m. Отже, за теоремою 1

$$F(Q)(\theta) = (B)\int\limits_Q \partial_K^{\mu} F(s,\cdot)ds = (B)\int\limits_Q F_s^1(\theta)ds \quad \forall Q \in (I)\ .$$

Більше того, за теоремою про середнє для інтеграла Бохнера [3]

$$F(Q)(\theta) = (B)\int\limits_Q F_s^1(\theta)ds \in \overline{conv}\ D \cdot m(Q) \quad \forall Q \in (I)\ ,$$

де $D = \{F_s^1(\cdot)\}_{s\in T}$. Безпосередньою перевіркою встановлюється секвенціальна компактність, а тому й компактність множини D. Далі, множина $\overline{conv}\ D$ є компактною з огляду на віддільність ЛОП E, а також на відому теорему М.Г. Крейна [27]. Отже, для (опуклого) компакту $C = \overline{conv}\ D \subset E$ вірно включення (3.1), тобто $F \in Lip_K(I)$.

Заключення

У першому пункті роботи введено нове поняття K_μ-субдиференціалу для функцій множини у ЛОП. Основний результат роботи міститься у другому пункті, де доведено нову форму теореми Радона-Нікодима про представність у вигляді інтегралу Бохнера для відображень $F : (I) \to E$ (теорема 1). У останньому пункті роботи введено клас K_μ-ліпшицевих відображень, що задовільняють умовам теореми 1; побудовано приклад, якиий показує, що у випадку неметризовних ЛОП K_μ-субдиференціал може краще описувати диференціальні властивості интегралу Бохнера, ніж звичайна похідна за мірою.

Автор висловлює щиру вдячність професору І.В. Орлову та рецензенту за увагу до роботи та корисні зауваження і обговорення.

Перелік цитованих джерел

1. *Bochner S.* Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vectorraumes.//Fund. Math. — 1933. — Vol. 20. — P. 262 – 276.
2. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962. — 829 с.
3. *Diestel J., Uhl J.J.* Vector Measures. — Amer. Math. Soc., Providence, 1977.
4. *Mikusinski J.* The Bochner Integral. — Basel: Birkhäuser Verlag, 1978.
5. *Chi G.* A geometric characterization of Frechet spaces with the RNT. — Proc. Amer. Math. Soc., 1975. — Vol. 48. — P. 371 – 380.
6. *J.M.A.M. van Neerven.* Approximating Bochner integral by Riemann sums.// Indag. Math. (N.S.) — 2002. — Vol.13. — P. 197 – 208.
7. *Cerone P., Cho Y.J., Dragomir S.S., Kim J.K., Kim S.S.* Norm estimates for the difference between Bochner integral and the convex combination of functions values.// arXiv: math/0309062v1 [math. CA] — 4 Sep 2003. — P. 1 – 17.
8. *Boyd C., Dineen S., Rueda M.P.* Asplund operators on locally convex spaces.// Proc. of the second ISAAC congress, 2000, Vol. 2, N 8. — Kluwer Acad. Publ., Int. Soc. Anal.Comput. — P. 1049 – 1056.
9. *Boyd C., Dineen S., Rueda M.P.* Locally Asplund spaces of holomorphic functions.//Mich. Math. J. — 2002. — Vol. 50, no. 3. — P. 493 – 506.
10. *Amarante M., Maccheroni F., Marinassi M., Montrucchio L.* Cores of Non-Atomic Market Games. — New York: NY 10027, 2005.
11. *Dunford N., Pettis B.J.*, Linear operations on summable functions. — Trans. Amer. Math. Soc. — 1940, Vol. 47. — P. 323 – 392.
12. *Phillips R.S.* On weakly compact subsets of a Banach space.// Amer. J. Math. — 1943. — Vol. 65, no. 3. — P. 108–136.
13. *Rieffel M.A.* The Radon – Nikodym theorem for the Bochner integral.// Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 131. — P. 466–487.
14. *Moedomo S., Uhl J.J.* Radon – Nikodym theorems for the Bochner and Pettis integrals.// Pacific J. of Math. — 1971. — Vol. 38, no. 2. — P. 531 – 536.

15. *Sumbicini A.R.* Un Theorema de Radon-Nikodym in spaze locamente con-vessi rispetto alla integrazione per seminorm.// Riv. Mat. Univ. Parma. — 1995 — Vol. 4, no. 5. — P. 49-60.
16. *Ганиев И.Г., Сайдалиев З.* Теорема Радона-Никодима для векторных мер со значениями в K-пространстве измеримых функций.//Успехи математических наук. — 1995. — т. 50, вып. 2. — С. 209-210.
17. *Р. дель Кампо, Э. де Амо.* Техника секвенциальной плотности в приближённой версии теоремы Радона-Никодима.// — Сибирский математический журнал — 2007. — т. 48, N 3. — С. 586-592.
18. *Gilliam D.* Geometry and the Radon-Nikodym theorems in strict Mackey convergence spaces.// Pacific J. of Math. — 1976. — Vol. 65, no. 2 — P. 353 – 364.
19. *Мордухович Б.Ш.* Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988. — 360 с.
20. *Borwein J. M., Zhu Q. J.* A survey of subdifferential calculus with applications.// Nonlinear analysis. Ser. A: Theory and methods. — 1999. — V. 38, no. 6 — P. 62–76.
21. *Demyanov V.F.* The rise of nonsmooth analysis: its main tools.// Кибернетика и системный анализ. — 2002 — Вып. 4 — С. 63 – 85.
22. *Демьянов В.Ф., Рощина В.А.* Обобщённые субдифференциалы и экзостеры// Владикавказский математический журнал. — 2006. — Т.8 — № 4. — С. 19–31.
23. *Girejko E., Piccoli B.* On some consepts of generalized differentials.//Set-valued analysis. — 2007. — V. 15 — P. 163 – 183.
24. *Орлов И.В., Стонякин Ф.С.* K-субдифференциалы и K-теорема о среднем для отображений в локально выпуклые пространства.// Международная конференция, посвящённая памяти И.Г. Петровского "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы". Тезисы докладов. — М.: МГУ, 2007. — С. 220–221.
25. *Орлов И.В., Стонякин Ф.С.* Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты.// Современная математика. Фундаментальные направления. — Объём 18с.— В печати.
26. *Стонякин Ф.С.* Компактный субдифференциал вещественных функций.//Динамические системы. — Симферополь: ТНУ, 2007. — Вып. 23 — С. 99–112.
27. *Эдвардс Э.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969 — 1069 с.
28. *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.* Функциональный анализ. — К.: Вища школа, 1990. — 600 с.
29. *Chakraborty N.D., Jaker Ali Sk.* On strongly Pettis integrable functinos in Locally Convex Spaces.//Revista Mathematika de la Univ. Compl. de Madrid. — 1993. — Vol. 6, no. 2 — P. 241–262.

Получена 15.05.2008