Динамические системы, вып. 22 (2007), 115–139

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.98

К вопросу об определении некоммутативного пространства $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана

М.А. Муратов *, В.И. Чилин **
* Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: kromsh@mail.ru*
** Национальный университет Узбекистана,
Ташкент 700174, Узбекистан. *E-mail: chilin@usd.uz*

Аннотация. В работе приводится один из вариантов построения некоммутативного пространства $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ τ – интегрируемых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$.

1. Введение

Один из первых подходов к введению некоммутативного аналога кольца измеримых функций был предложен И.Сигалом [1], который рассмотрел $*$-*алгебру* $S(\mathcal{M})$ *измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$. В этой работе были построены банаховы пространства интегрируемых и интегрируемых с квадратом операторов и получены обобщения таких основных результатов теории меры, как теоремы Фишера-Рисса, Радона-Никодима, теоремы Лебега о монотонной сходимости и вариант теоремы Фубини. Часть этих результатов была использована для описания и изучения одного специального класса колец операторов, названных стандартными.

Впоследствии, для целей некоммутативного интегрирования, изучались $*$-подалгебры $S(\mathcal{M}, \tau)$ в $S(\mathcal{M})$ всех τ-измеримых операторов, ассоциированные с точным нормальным полуконечным следом τ на $\mathcal{M}$ (см. например, [2, 4, 9]). Алгебры $S(\mathcal{M}, \tau)$ и $S(\mathcal{M})$ являются $*$-алгебрами замкнутых, плотно определенных линейных операторов, действующих в том же гильбертовом пространстве H, что и сама алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$. При этом все эти операторы присоединены к $\mathcal{M}$, а алгебраические операции в этих $*$-алгебрах совпадают с операциями "сильной суммы "сильного произведения перехода к сопряженному оператору и обычного умножения на скаляры. Сама алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ является $*$-подалгеброй как в $S(\mathcal{M}, \tau)$, так и в $S(\mathcal{M})$, и совпадает с множеством всех ограниченных операторов из $S(\mathcal{M}, \tau)$ и из $S(\mathcal{M})$.

Теория некоммутативного интегрирования получила дальнейшее развитие в работах многих авторов (см., например, [8, 11, 12]). Была построена некоммутативная теория пространств $L_p(\mathcal{M},\tau)$ для $1 < p < \infty$ не только в случае, когда τ — точный нормальный полуконечный след, но и для случая состояния или веса (см., например, [4, 6, 9, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 25] и др.). Подробный обзор содержится в работе [16]. Следует ометить, что во всех этих исследованиях пространство $L_1(\mathcal{M},\tau)$ предполагалось построенным по И. Сигалу [1]. В свою очередь, построения И. Сигала, несмотря на подробные и четкие с математической точки зрения рассуждения, были достаточно сложными и громоздкими. В то же время, развитая в последние годы теория s-чисел и убывающих перестановок линейных операторов (см., например [7, 9, 10, 25]) посволяет сделать такие построения более изящными и прозрачными.

В настоящей работе предлагается построение некоммутативного пространства $L_1(\mathcal{M},\tau)$, ассоциированного с точным нормальным полуконечным следом на алгебре фон Немана $\mathcal{M}$, использующее понятие убывающей перестановки измеримого оператора.

Для полноты изложения мы приводим формулировки некоторых утверждений и фактов, имеющих отношение к рассматриваемому вопросу, с соответствующими ссылками на первоисточники. Используется терминология и обозначения теории алгебр фон Неймана из [21, 22] и теории некоммутативного интегрирования [1, 2, 4, 7, 9].

2. Предварительный сведения. Алгебры измеримых и τ-измеримых операторов

В этом разделе рассматриваются $*$-алгебры $S(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M},\tau)$ измеримых и τ-измеримых операторов, присоединеных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. (См. [1, 23])

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана линейных оператров, дествующих в гильбертовом пространстве H, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $P(\mathcal{M})$ – структура всех ортопроекторов в $\mathcal{M}$.

2.1. Операторы, присоединеные к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$

Определение 1. Линейное подпространство D в H называется *присоединенным* к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ (обозначение: $D\ \eta\ \mathcal{M}$), если

$$U(D) \subseteq D$$

для каждого унитарного оператора $U \in \mathcal{M}'$.

Определение 2. Линейный оператор T с областью определения $\mathcal{D}(T)$, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *присоединенным* к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ (обозначение: $T\ \eta\ \mathcal{M}$), если

$$UT \subseteq TU$$

для каждого унитарного оператора $U \in \mathcal{M}'$.

Легко видеть, что ограниченный линейный оператор $T \in B(H)$ присоединен к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $T \in \mathcal{M}$.

Предложение 1. *(i) Если D замкнутое подпространство в H и $P = P_D$ ортогональный проектор на D, то $D\ \eta\ \mathcal{M}$ в том и только в том случае, когда $P \in P(\mathcal{M})$.*

(ii) Если $T\ \eta\ \mathcal{M}$ предзамкнутый оператор, то

ii1) $\overline{T}\ \eta\ \mathcal{M}$,

ii2) $T^*\ \eta\ \mathcal{M}$.

(iii) Если T замкнутый оператор и $T = W|T|$ - его полярное разложение, то $T\ \eta\ \mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда

$$W \in \mathcal{M} \quad \text{и} \quad |T| \eta\ \mathcal{M}.$$

(iv) Если T самосопряженный оператор, $T\, \eta\, \mathcal{M}$ и $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ спектральное семейство проекторов для T, то

$$E_\lambda \in P(\mathcal{M}) \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.2. *-Алгебра $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов

Определение 3. Линейное подпространство $D \subseteq H$ назыается *сильно плотным* в H относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если

(i) $D\ \eta\ \mathcal{M}$;

(ii) Существует последовательность ортопроекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(\mathcal{M})$ такая, что

ii1) $P_n \uparrow I$,

ii2) $P_n(H) \subseteq D$,

ii3) $P_n^{\perp}$ является конечным проектором для каждого $n = 1, 2, \ldots$

В этом случае говорят, что подпространство D *определено* последовательностью $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Из условия $P_n \uparrow I$ в определении 3 непосредственно следует, что каждое сильно плотное подпространство является плотным в H.

Определение 4. Линейный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *измеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если

(i) $T\ \eta\ \mathcal{M}$;

(ii) Область определения $\mathcal{D}(T)$ оператора T сильно плотна в H;

(iii) Оператор T замкнут.

Предложение 2. *Если T замкнутый оператор с плотной областью определения и $T = W|T|$ - полярное разложение оператора T, то оператор T измерим относительно $\mathcal{M}$ тогда и только тогда , когда*

$$W \in \mathcal{M} \quad \text{и} \quad |T| \quad \text{измерим относительно} \quad \mathcal{M}.$$

Пусть T и S - операторы, измеримые относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Тогда замыкания $\overline{T+S}$ и $\overline{TS}$ операторов $T+S$ и TS являются измеримыми относительно $\mathcal{M}$ операторами. Эти замыкания называются *сильной суммой и сильным произведением* операторов T и S соответственно, и обозначаются

$$\overline{T+S} = T \dotplus S, \quad \overline{TS} = T \cdot S.$$

Обозначим через $S(\mathcal{M})$ множество всех операторов, измеримых относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Ясно, что

$$\mathcal{M} \subseteq S(\mathcal{M}).$$

Теорема 1. *Множество $S(\mathcal{M})$ является $*$-алгеброй над полем $\mathbb{C}$ с единичным элементом I относительно операций сильной суммы и сильного произведения и операции перехода к сопряженному оператору.*

2.3. *-Алгебра $S(\mathcal{M},\tau)$ τ - измеримых операторов, присоединеных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$

В этом подразделе мы рассмотрим $*$-подалгебру $S(\mathcal{M},\tau)$ в $S(\mathcal{M})$. (См. [2, 3, 4, 9].)

Определение 5. Линейное подпространство D в H называется τ-плотным, если

(i) $D \ \eta \ \mathcal{M}$;

(ii) Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in P(\mathcal{M})$, что

ii1) $P(H) \subseteq D$,

ii2) $\tau(I-P) \leq \varepsilon$.

Определение 6. Линейный оператор T в H, называется τ-измеримым, если

(i) $T \ \eta \ \mathcal{M}$;

(ii) $\mathcal{D}(T)$ τ-плотно в H;

(iii) Оператор T замкнут.

Обозначим множество всех τ-измеримых операторов через $S(\mathcal{M},\tau)$. Легко видеть, что

$$\mathcal{M} \subseteq S(\mathcal{M},\tau) \subseteq S(\mathcal{M}).$$

При этом $T \in S(\mathcal{M},\tau)$ в том и только в том случае, когда $T \in S(\mathcal{M})$ и $\mathcal{D}(T)$ – τ-плотно в H.

Предложение 3. *Пусть T – замкнутый оператор с плотной областью определения $\mathcal{D}(T)$, такой, что $T \ \eta \ \mathcal{M}$, и пусть $T = U|T|$ – полярное разложение оператора T. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $T \in S(\mathcal{M},\tau)$;

(ii) $U \in \mathcal{M}$ *и* $|T| \in S(\mathcal{M},\tau)$;

(iii) $\tau(E_\lambda^\perp) < \infty$ *для некоторого* $\lambda > 0$, *где* $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ *– спектральное семейство проекторов для оператора* $|T|$;

(iv) $\tau(E_\lambda^\perp) \to 0$ *при* $\lambda \to +\infty$;

Замечание 1. (i). Если $\mathcal{M}$ - фактор типа I и τ - точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, то

$$\mathcal{M} = S(\mathcal{M},\tau) = S(\mathcal{M}).$$

(ii). Если $\mathcal{M}$ - фактор типа II_∞ и τ - точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, то

$$\mathcal{M} \neq S(\mathcal{M},\tau) = S(\mathcal{M}).$$

Теорема 2. *Множество* $S(\mathcal{M},\tau)$ *является* $*$*-подалгеброй в* $S(\mathcal{M})$.

2.4. Сходимости по мере в кольце $S(\mathcal{M},\tau)$

Определение 7. Последовательность операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{M},\tau)$ сходится к оператору $T \in S(\mathcal{M},\tau)$ по мере ($T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$), если для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется номер N, что для каждого $n \geq N$ существует такой проектор $P_n \in P(\mathcal{M})$, что

(i) $\tau(P_n^\perp) < \delta$,

(ii) $(T_n - T)P_n \in \mathcal{M}$,

(iii) $\|(T_n - T)P_n\| < \varepsilon$.

Сходимость по мере в $S(\mathcal{M},\tau)$ совпадает со сходимостью в топологии $t = t_\tau$, базис окрестностей нуля которой образуют множества вида:

$$V_{\varepsilon,\delta} = \{T \in S(\mathcal{M}): \text{ существует такой проектор } P \in P(\mathcal{M}), \text{ что}$$

$$\tau(P^\perp) < \delta, \ \ TP \in \mathcal{M}, \ \ \|TP\| < \varepsilon\},$$

где ε и δ произвольные положительные числа.

Предложение 4. *Если* $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}, T \subset S(\mathcal{M})_h$, $T_n \leq T_{n+1}$ *для любых* $n = 1, 2, \ldots$ *и* $T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$, *то* $T_n \uparrow T$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 3. $(S(\mathcal{M}), t_\tau)$ *является полным топологическим векторным пространством.*

3. Невозрастающие перестановки τ-измеримых операторов

В этом подразделе рассматриваются невозрастающие перестановки τ - измеримых операторов и приводятся их основные свойства. (См. [5, 7, 9, 10, 25].)

Пусть $\mathcal{M}$ полуконечная алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$ и $S(\mathcal{M},\tau)$ – $*$-алгебра всех τ-измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$.

Определение 8. Функцией распределения оператора $T \in S(\mathcal{M},\tau)$ называется функция $n(T)(t)$, определяемая равенством:

$$n(T)(t) = \tau(E_{(t,\infty)}(|T|)), \quad t \geq 0,$$

где $E_{(t,\infty)}(|T|)$ - спектральный проектор оператора $|T|$, соответствующий интервалу (t,∞).

Согласно предложения 3, оператор T τ-измерим тогда и только тогда, когда $n(T)(t) < \infty$ для достаточно больших t и поэтому

$$\lim_{t\to\infty} n(T)(t) = 0.$$

Кроме того, отображение

$$[0,\infty) \ni t \mapsto n(T)(t) \in [0,\infty]$$

является неубывающим и непрерывным справа.

Определение 9. Невозрастающей перестановкой оператора $T \in S(\mathcal{M},\tau)$ называется функция $\mu(T)(t)$, определяемая равенством:

$$\mu(T)(t) = \inf\{\|TP\| : P \in P(\mathcal{M}), \tau(P^\perp) \le t\}, \quad t > 0.$$

Предложение 5. *Для любого оператора $T \in S(\mathcal{M},\tau)$ и любого числа $t > 0$ функция*

$$(0,\infty) \ni t \mapsto \mu(T)(t) \in [0,\infty)$$

невозрастает, непрерывна справа и

$$\mu(T)(t) = \inf\{s \ge 0 : n(T)(s) \le t\}.$$

При этом,

$$n(T)(\mu(T)(t)) \le t.$$

Непосредственно из предложения 5 вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{N}$ произвольная подалгебра фон Неймана алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, содержащая все спектральные проекторы оператора $|T|$. Тогда*

$$\mu(T)(t) = \inf\{\|TP\| : P \in P(\mathcal{N}), \tau(P^\perp) \le t\}, \quad t > 0.$$

Замечание 2. В коммутативном случае, когда $\mathcal{M} = L_\infty(\Omega,\Sigma,m)$ и $\tau(f) = \int_\Omega f d\mu$ след на $\mathcal{M}$, где (Ω,Σ,m) локализуемое пространство с мерой , $*$-алгебра $S(\mathcal{M},\tau)$ совпадает с алгеброй всех комплексных функций f на (Ω,Σ,m), которые ограничены почти всюду, кроме множества конечной меры. При этом

$$\mu(f)(t) = \inf\{s \ge 0 : m(\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > s\} \le t)\}.$$

Следовательно, в этом случае, $\mu(f)(t)$ совпадает с классической невозрастающей перестановкой f^* измеримой функции f (Свойства невозрастающих перестановок измеримых функций и их приложений в теории симметричных функциональных пространств подробно изложены в монографии [24]).

В следующем предложении приводится полезная геометрическая интерпретация функции $\mu(T)(t)$.

Предложение 6. *Пусть $t > 0$ и*

$$\mathfrak{R}_t = \{R \in S(\mathcal{M},\tau) : \tau(s(|R|)) \leq t\},$$

где $s(|R|)$ - носитель оператора $|R|$ (см.[21]). Тогда для любого оператора $T \in S(\mathcal{M},\tau)$ имеет место равенство:

$$\mu(T)(t) = \inf\{\|T-R\| : R \in \mathfrak{R}_t, (T-R) \in \mathcal{M}\}.$$

В следующих утверждениях собраны основные свойства функции $\mu(T)(t)$.

Предложение 7. *Пусть операторы $T, S \in S(\mathcal{M},\tau)$. Тогда*

(i) $\mu(T)(t) = \mu(|T|)(t) = \mu(T^*)(t)$ и $\mu(\alpha T)(t) = |\alpha|\mu(T)(t)$ для всех $t > 0$ и $\alpha \in \mathbb{C}$.

(ii) Если $\tau(s(|T|)) < \infty$, то $\mu(T)(t) = 0$ для всех $t \geq \tau(s(|T|))$. В частности, если $E \in P(\mathcal{M})$, то $\mu(TE)(t) = 0$ для $t > \tau(E)$

(iii) Если $|T| \leq |S|$, то $\mu(T)(t) \leq \mu(S)(t)$ при $t > 0$;

(iv) Если $T \in \mathcal{M}$, то

$$\lim_{t\downarrow 0} \mu(T)(t) = \|T\|;$$

если же оператор T не принадлежит $\mathcal{M}$, то

$$\lim_{t\downarrow 0} \mu(T)(t) = \infty.$$

(v) Если f непрерывная возрастающая функция на $[0,\infty)$, которая удовлетворяет условию $f(0) \geq 0$, то для всех $t > 0$

$$\mu(f(|T|))(t) = f(\mu(T))(t).$$

В частности, при всех $t > 0$ и $p > 0$

$$\mu(|T|^p) = (\mu(T))^p(t).$$

(vi) Если $S, R \in \mathcal{M}$, то для всех $t > 0$

$$\mu(STR)(t) \leq \|S\|\|R\|\mu(T)(t)$$

Предложение 8. *Пусть операторы $T, S \in S(\mathcal{M},\tau)$. Тогда*

(i) $\mu(T+S)(t+s) \leq \mu(T)(t) + \mu(S)(s)$, $t, s > 0$;

(ii) $\mu(TS)(t+s) \leq \mu(T)(t)\mu(S)(s)$, $t, s > 0$;

(iii) $\mu(T)(t+s) \leq \mu(T+S)(t) \leq \mu(T)(t-s)$, $t, s > 0$, $t-s > 0$, если $\tau(r(S)) < s$ ($r(S)$ – правый носитель оператора S [21]).

Следствие 2. *Пусть $T, S \in \mathcal{M}$. Тогда для любого $t > 0$*

$$|\mu(T)(t) - \mu(S)(t)| \leq \|T-S\|.$$

Определение 10. Для каждого положительного самосопряженного оператора $T \in S(\mathcal{M}, \tau)_+$ положим:

$$\tau(T) = \sup_n \tau\left(\int_0^n \lambda dE_\lambda\right) = \int_0^\infty \lambda d\tau(E_\lambda),$$

где $\{E_\lambda\}$ – спектральное семейство проекторов оператора T.

Теорема 4. *Пусть* $T \in S(\mathcal{M}, \tau)_+$. *Тогда*

$$\tau(T) = \int_0^\infty \mu(T)(t)dt.$$

Доказательство. Пусть сначала оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)_+$ имеет ступенчатый вид:

$$T = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i,$$

где $\alpha_i > 0,\ E_i \in P(\mathcal{M}),\ \tau(E_i) < \infty,\ E_i E_j = 0$ при $i \neq j,\ i, j = \overline{1, n}$. Без ограничения общности, можно считать, что $\alpha_1 < ... < \alpha_n$. Ясно, что

$$E_{(s,\infty)}(T) = \begin{cases} s(T) = \sum_{i=1}^n E_i, & 0 \leq s < \alpha_1; \\ \sum_{i=k}^n E_i, & \alpha_{k-1} \leq s < \alpha_k,\ 2 \leq k \leq n; \\ 0, & \alpha_n \leq s. \end{cases}$$

Поэтому,

$$n(T)(s) = \begin{cases} \tau(s(T)) = \sum_{i=1}^n \tau(E_i), & 0 \leq s < \alpha_1; \\ \sum_{i=k}^n \tau(E_i), & \alpha_{k-1} \leq s < \alpha_k,\ 2 \leq k \leq n; \\ 0, & \alpha_n \leq s. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\mu(T)(t) = \inf\{s \geq 0 : n(T)(s) \leq t\} = \begin{cases} \alpha_n, & 0 \leq t < \tau(E_n); \\ \alpha_{k-1}, & \sum_{i=k}^n \tau(E_i) \leq t < \sum_{i=k-1}^n \tau(E_i),\ 2 \leq k \leq n; \\ 0, & \sum_{i=1}^n \tau(E_i) \leq t. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\tau(T) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau(E_i) = \int_0^\infty \mu(T)(t)dt.$$

Если $\tau(E_{i_1}) = ... = \tau(E_{i_l}) = +\infty$ для некоторых $i_1 < ... < i_l$, то

$$n(T)(s) = +\infty \quad \text{при} \quad 0 \leq s < \alpha_{i_1} \quad \text{и}$$

$$\mu(T)(t) = \alpha_{i_1-1} \quad \text{при} \quad t \geq \sum_{i\neq i_1,\dots i_l} \tau(E_i).$$

Поэтому, в этом случае,

$$\tau(T) = +\infty = \int_0^\infty \mu(T)(t)dt.$$

Пусть теперь $T \in \mathcal{M}_+$. Выберем последовательность операторов $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}_+$ ступенчатого вида, для которых $T_n \uparrow T$ и $\|T_n - T\| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\mu(T_n)(t) \leq \mu(T_{n+1})(t) \leq \mu(T)(t)$$

для всех $n = 1, 2, ...$ и $t > 0$. Согласно предложению 8(i) и следствию 2 имеем, что

$$|\mu(T_n)(t) - \mu(T)(t)| \leq \|T_n - T\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и потому $\mu(T_n)(t) \uparrow \mu(T)(t)$ при $n \to \infty$ для всех $t \geq 0$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \mu(T_n)(t)dt = \int_0^\infty \mu(T)(t)dt.$$

Поскольку след τ нормальный, то

$$\int_0^\infty \mu(T_n)(t)dt = \tau(T_n) \uparrow \tau(T), \quad \text{и потому}$$

$$\tau(T) = \int_0^\infty \mu(T)(t)dt.$$

Рассмотрим, наконец, произвольный оператор $T \in S(\mathcal{M},\tau)_+$ и положим

$$E_n = E_{[0,n]}(T), \; n = 1, 2, ...$$

Так как $0 \leq TE_n \leq TE_{n+1} \leq T$, то

$$\mu(TE_n)(t) \leq \mu(TE_{n+1})(t) \leq \mu(T)(t) \text{ для всех } t > 0 \text{ и } \; n = 1, 2, ...$$

Покажем, что $\lim_{n\to\infty} \mu(TE_n)(t) = \mu(T)(t)$. Предположим, что

$$s = \lim_{n\to\infty} \mu(TE_n)(t) < \mu(T)(t).$$

Тогда последовательность спектральных проекторов

$$E_{[\mu(TE_n)(t),n]}(t) = E_{[\mu(TE_n)(t),\infty)}(TE_n)$$

сходится в сильной операторной топологии к проектору $E_{[s,\infty)}(T)$, и поскольку (см. предложение 5)

$$n(TE_n)(\mu(TE_n)(t)) = \tau(E_{[\mu(TE_n)(t),\infty)}(TE_n)) \leq t,$$

то, в силу верхней полунепрерывности следа τ имеем, что

$$\tau(E_{(s,\infty)}(T)) \leq \tau(E_{[s,\infty)}(T)) \leq \liminf \tau(E_{(\mu(TE_n)(t),\infty)}(TE_n)) \leq t.$$

Следовательно, $\mu(T)(t) \leq s$, что противоречит нашему предположению. Поэтому $\mu(TE_n)(t) \uparrow \mu(T)(t)$ при $n \to \infty$ для всех $t \geq 0$. Следовательно,

$$\int_0^\infty \mu(TE_n)(t)dt \uparrow \int_0^\infty \mu(T)(t)dt.$$

Так как $TE_n \in \mathcal{M}$, то, по доказанному выше имеем, что

$$\tau(TE_n) = \int_0^\infty \mu(TE_n)(t)dt.$$

Кроме того, из определения $\tau(T)$ следует, что $\tau(TE_n) \uparrow \tau(T)$. Это означает, что

$$\tau(T) = \int_0^\infty \mu(T)(t)dt.$$

□

Следствие 3. *(i) Для любого оператора $T \in S(\mathcal{M},\tau)_+$ верно равенство:*

$$\tau(T) = \sup\{\tau(S) : S \in \mathcal{M}_+, S \leq T\}.$$

(ii) Если $T, S \in S(\mathcal{M},\tau)$ и $0 \leq T \leq S$, то $\tau(T) \leq \tau(S)$.

Следствие 4. *Если $T \in S(\mathcal{M},\tau)_+$, $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}_+$, $T_n \uparrow T$ при $n \to \infty$, то*

$$\tau(T_n) \uparrow \tau(T) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Предложение 9. *Для любых операторов $T, S \in S(\mathcal{M},\tau)_+$ и $\alpha \geq 0$ верны равенства:*
(i) $\tau(T+S) = \tau(T) + \tau(S)$;
(ii) $\tau(\alpha T) = \alpha\tau(T)$.

Доказательство. (i)Пусть $T, S \in S(\mathcal{M},\tau)_+$. Положим

$$T_n = TE_{(-\infty,n]}(T), \quad S_n = SE_{(-\infty,n]}(S).$$

Легко видеть, что

$$T_n, S_n \in \mathcal{M}_+, \quad 0 \leq T_n \uparrow T, \quad 0 \leq S_n \uparrow S.$$

Поэтому $0 \leq (T_n + S_n) \uparrow (T+S)$ и, в силу следствия 4, получим, что

$$\tau(T+S) = \sup_{n\geq 1} \tau(T_n + S_n) = \sup_{n\geq 1}(\tau(T_n) + \tau(S_n)) = \tau(T) + \tau(S).$$

(ii) Доказывается аналогично.

□

Следствие 5. *Пусть f непрерывная возрастающая функция на $[0,\infty)$, удовлетворяющая условию: $f(0)=0$. Тогда для каждого оператора $T\in S(\mathcal{M},\tau)$ имеет место равенство:*

$$\tau(f(|T|))=\int_0^\infty f(\mu(T))(t)dt.$$

В частности, для $0<p<\infty$

$$\tau(|T|^p)=\int_0^\infty (\mu(T))^p(t)dt$$

Следствие 6. *Пусть $T,S\in S(\mathcal{M},\tau)_+$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mu(T)(t)\le\mu(S)(t),\quad t>0$;

(ii) $n(T)(s)\le n(S)(s),\quad s\ge 0$;

(iii) $\tau(f(T))\le\tau(f(S))$ *для каждой непрерывной возрастающей функции* f *на* $[0,\infty)$, *удовлетворяющей равенству* $f(0)=0$.

Предложение 10. *Пусть $\{T_n\}_{n=1}^\infty, T\subset S(\mathcal{M},\tau)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $T_n\xrightarrow{t_\tau}T$;

(ii) $\lim_{n\to\infty}\mu(T-T_n)(t)=0$ *для каждого* $t>0$.

Доказательство. Базу окрестностей нуля топологии t_τ образуют множества

$$V(\varepsilon,\,\delta)=\{S\in S(\mathcal{M},\tau):\ \text{существует такой } P\in P(\mathcal{M}),\ \text{что}$$
$$SP\in\mathcal{M},\ \|SP\|_{\mathcal{M}}<\varepsilon,\tau(P^\perp)<\delta\},$$

где $\varepsilon,\,\delta>0$.

Пусть $S\in V(\varepsilon,\,\delta)$. Тогда существует такой проектор $P\in P(\mathcal{M})$, что $SP\in\mathcal{M}$, $\|SP\|<\varepsilon$ и $\tau(P^\perp)<\delta$. Следовательно,

$$\mu(S)(\delta)=\inf\{\|SE\|:E\in P(\mathcal{M}),\tau(E^\perp)\le\delta\}<\varepsilon.$$

Это означает, что если $T_n\xrightarrow{t_\tau}T$, то $\mu(T-T_n)(t)\to 0$ при $n\to\infty$ для любого $t>0$.

Обратно, пусть $\mu(S)(t)<\varepsilon$. Тогда

$$\inf\{\|SE\|:E\in P(\mathcal{M}),\tau(E^\perp)\le t\}<\varepsilon.$$

Следовательно, $S\in V(\varepsilon,\,t+\delta)$ для любого $\delta>0$. Это означает, что если $\mu(T-T_n)(t)\to 0$, то $T_n\xrightarrow{t_\tau}T$ при $n\to\infty$ для любого $t>0$. □

Предложение 11. *Пусть $T\in S(\mathcal{M},\tau)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $n(T)(\varepsilon)<+\infty$ *для любого* $\varepsilon>0$;

(ii) $\lim_{t\to\infty}\mu(T)(t)=0$;

(iii) *Существует последовательность операторов* $\{T_n\}_{n=1}^\infty\subset S(\mathcal{M},\tau)$ *такая, что* $T_n\xrightarrow{t_\tau}T$ *и* $\tau(s(|T_n|))<\infty$ *для каждого* $n=1,2,...$

Доказательство. $(i) \Rightarrow (iii)$. Пусть $n(T)(\varepsilon) < +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда по определению функции распределения, $\tau(E_{(\varepsilon,\infty)}(|T|)) < +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$. Пусть

$$T = U|T| = U\int_0^\infty \lambda dE_\lambda(|T|)$$

полярное разложение оператора T. Обозначим

$$T_n = U\int_{\frac{1}{n}}^n \lambda dE_\lambda(|T|),\ n = 1, 2, ..$$

Тогда $T_n \xrightarrow{t_\tau} T$ и $\tau(s(|T_n|)) < \infty$ для каждого $n = 1, 2, ...$

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Пусть последовательность операторов $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ такая, что $T_n \xrightarrow{t_\tau} T$ и $\tau(s(|T_n|)) < \infty$ для каждого $n = 1, 2, ...$ По утверждению 10, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0, для которого выполняется неравенство

$$\mu(T - T_{n_0})(1) < \varepsilon.$$

Так как в силу предложения 7(ii), $\mu(T_{n_0})(t) = 0$ для $t \geq \tau(s(|T_{n_0}|))$, то по предложению 8(i), имеем

$$\mu(T)(t) = \mu(T_{n_0} + (T - T_{n_0}))((t-1)+1) \leq \mu(T_{n_0})(t-1) + \mu(T - T_{n_0})(1) < \varepsilon$$

для $t \geq \tau(s(|T_{n_0}|)) + 1$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть $\lim_{t\to\infty} \mu(T)(t) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $t_0 > 0$, что $\mu(T)(t_0) < \varepsilon$. По предложению 5 имеем:

$$n(T)(\varepsilon) \leq n(T)(\mu(T)(t_0)) \leq t_0 < \infty.$$

□

Замечание 3. Если в предложении 11 выполнены условия (i) и (ii), то последовательность $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ из (iii) может быть выбрана ограниченной.

Предложение 12. *Пусть* $\{T_n\}_{n=1}^\infty, T \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ *и* $T_n \xrightarrow{t_\tau} T$. *Тогда:*

(i) $\mu(T)(t) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(T_n)(t)$ *для любого* $t > 0$;

(ii) $\mu(T)(t) = \lim_{n\to\infty} \mu(T_n)(t)$ *в каждой точке непрерывности* $s = t$ *функции* $s \mapsto \mu(T)(s)$; *в точках разрыва этой функции имеет место неравенство:* $\mu(T_n)(t) \leq \mu(T)(t)$.

Доказательство. (i) По предложению 8(i) для каждого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\mu(T)(t+\varepsilon) = \mu(T_n + (T - T_n))(t+\varepsilon) \leq \mu(T_n)(t) + \mu(T - T_n)(\varepsilon),$$

откуда следует, что

$$\mu(T)(t+\varepsilon) - \mu(T - T_n)(\varepsilon) \leq \mu(T_n)(t).$$

Переходя к пределу и используя предложение 10, получим:

$$\mu(T)(t+\varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(T_n)(t)$$

Так как функция $\mu(T)(t)$ непрерывна справа (см. предложение 5), то переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, получим, что

$$\mu(T)(t) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(T_n)(t) \ \text{ для каждого } \ t>0.$$

(ii) Рассмотрим такое ε, что $0<\varepsilon<t$. Тогда по тому же утверждению 8(i) имеем:

$$\mu(T_n)(t) = \mu(T+(T_n-T))((t-\varepsilon)+\varepsilon) \le \mu(T)(t-\varepsilon) + \mu(T_n-T)(\varepsilon),$$

откуда получаем, что

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(T_n)(t) \le \mu(T)(t-\varepsilon).$$

Поэтому, если $s=t$ точка непрерывности функции $s\mapsto \mu(T)(s)$, то при $\varepsilon\downarrow 0$ получим:

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(T_n)(t) \le \mu(T)(t).$$

Но, как было показано выше,

$$\mu(T)(t) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(T_n)(t) \ \text{ для каждого } \ t>0.$$

Поэтому, существует $\lim_{n\to\infty} \mu(T_n)(t)$ и

$$\mu(T)(t) = \lim_{n\to\infty} \mu(T_n)(t).$$

В остальных точках, очевидно,

$$\mu(T_n)(t) \le \mu(T)(t).$$

$\square$

Теорема 5. *Пусть* $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}, T \subset S(\mathcal{M},\tau)_+$ *и* $T_n \xrightarrow{t_\tau} T$. *Тогда:*

(i) (Некоммутативный аналог леммы Фату.)

$$\tau(T) \le \liminf_{n\to\infty} \tau(T_n);$$

(ii) (Некоммутативный аналог теоремы Леви о монотонной сходимости.) Если $T_n \le T$ *(или если* $\mu(T_n)(t) \le \mu(T)(t)$ *для любого* $t>0$ *),то*

$$\tau(T) = \lim_{n\to\infty} \tau(T_n).$$

Доказательство. (i) По теореме 4 и предложению 12(i) имеем:

$$\tau(T) = \int_0^\infty \mu(T)(t)dt \le \int_0^\infty \liminf_{n\to\infty} \mu(T_n)(t)dt.$$

Используя известную лемму Фату для сходящихся по мере последовательностей неотрицательных измеримых функций, имеем:

$$\int_0^\infty \liminf_{n\to\infty} \mu(T_n)(t)dt \le \liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty \mu(T_n)(t)dt.$$

Поэтому,

$$\tau(T) \le \liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty \mu(T_n)(t)dt = \liminf_{n\to\infty} \tau(T_n).$$

(ii) Так как $T_n \le T$, то

$$\tau(T_n) = \int_0^\infty \mu(T_n)(t)dt \le \int_0^\infty \mu(T)(t)dt = \tau(T).$$

Следовательно

$$\limsup_{n\to\infty} \tau(T_n) \le \tau(T).$$

Но по доказанному в пункте (i),

$$\tau(T) \le \liminf_{n\to\infty} \tau(T_n).$$

Поэтому

$$\tau(T) = \lim_{n\to\infty} \tau(T_n).$$

□

Предложение 13. *Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ не имеет минимальных проекторов. Тогда для каждого оператора $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ верно равенство:*

$$\int_0^t \mu(T)(s)ds = \sup\{\tau(E|T|E) : E \in P(\mathcal{M}), \tau(E) \le t\}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $T \ge 0$. Пусть

$$T = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda$$

спектральное разложение оператора T и $\mathcal{N}$ – максимальная коммутативная подалгебра фон Неймана в $\mathcal{M}$, содержащая все спектральные проекторы $\{E_\lambda\}$. Отметим, что $\mathcal{N}$ тоже не содержит минимальных проекторов. Так как $\mathcal{N}$ – коммутативная , то

$\mathcal{N} = L_\infty(\Omega,\Sigma,m)$ и $\tau(f) = \int_\Omega f dm$ - след на $\mathcal{N}$, где (Ω,Σ,m) локализуемое пространство с неатомической мерой m. $*$-Алгебра $S(\mathcal{N},\tau)$ совпадает с алгеброй всех комплексных функций f на (Ω,Σ,m), которые ограничены почти всюду, кроме множества конечной меры. В этом случае, если $T = f \in S(\mathcal{N},\tau)$, то $\mu(T)(t) = \mu(f)(t)$ совпадает с классической невозрастающей перестановкой $f^*(t)$ измеримой функции f (см замечание 2) .

Пространство (Ω,Σ,m) неатомическое, поэтому имеет место равенство (см. [24]):

$$\int_0^t f^*(s)ds = \sup\left\{\int_F |f|dm : F \subseteq \Omega, m(F) \le t\right\}.$$

Это означает, что

$$\int_0^t \mu(T)(s)ds = \int_0^t f^*(s)ds = \sup\{\tau(E|T|E) : E \in P(\mathcal{N}), \tau(E) \le t\} \le$$

$$\le \sup\{\tau(E|T|E) : E \in P(\mathcal{M}), \tau(E) \le t\}.$$

С другой стороны, если проектор $E \in P(\mathcal{M})$ такой, что $\tau(E) \le t$, то по теореме 4 и предложению 7(ii)(vi) имеем:

$$\tau(ETE) = \int_0^\infty \mu(ETE)(s)ds = \int_0^t \mu(ETE)(s)ds \le$$

$$\le \int_0^t \mu(T)(s)ds.$$

Следовательно,

$$\sup\{\tau(E|T|E) : E \in P(\mathcal{M}), \tau(E) \le t\} \le \int_0^t \mu(T)(s)ds.$$

□

Замечание 4. Из приведенного выше доказательства следует, что в условиях предложения 13 имеет место равенство:

$$\int_0^t \mu(T)(s)ds = \sup\{\tau(E|T|E) : E \in P(\mathcal{N}), \tau(E) \le t\},$$

где $\mathcal{N}$–максимальная коммутативная подалгеба фон Неймана в $\mathcal{M}$, содержащая все спектральные проекторы $E_{(-\infty,\lambda)}(|T|)$, $\lambda \ge 0$ оператора $|T|$.

Предложение 14. *Для любых операторов $T, S \in S(\mathcal{M},\tau)$ и любого $t > 0$ верно неравенство:*

$$\int_0^t \mu(T+S)(s)ds \le \int_0^t \mu(T)(s)ds + \int_0^t \mu(S)(s)ds.$$

Доказательство. Предположим сначала, что алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ не имеет минимальных проекторов. Из предложения 13 имеем, что

$$\int_0^t \mu(T+S)(s)ds = \sup\{\tau(E|T+S|E) : E \in P(\mathcal{M}), \tau(E) \leq t\}.$$

Тогда (см.[5]) существуют такие частичные изометрии $U, V \in \mathcal{M}$, что

$$E|T+S|E \leq EU|T|U^*E + EV|S|V^*E.$$

Поэтому

$$\tau(E|T+S|E) \leq \tau(EU|T|U^*E) + \tau(EV|S|V^*E).$$

Сдедовательно, в силу предложения 9(i) и следствия 6(ii)

$$\int_0^t \mu(T+S)(s)ds \leq \sup\{\tau(EU|T|U^*E) : E \in P(\mathcal{M}), \tau(E) \leq t\}+$$

$$+\sup\{\tau(EV|S|V^*E) : E \in P(\mathcal{M}), \tau(E) \leq t\} =$$

$$= \int_0^t \mu(U|T|U^*)(s)ds + \int_0^t \mu(V|S|V^*)(s)ds \leq \int_0^t \mu(T)(s)ds + \int_0^t \mu(S)(s)ds.$$

Предположим теперь, что алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ имеет минимальные проекторы. Рассмотрим коммутативную алгебру фон Неймана $\mathcal{N} = L_\infty([0,1], m)$ со следом
$m(f) = \int_0^1 f dm$, считая, что $\mathcal{N}$ действует в гильбертовом пространстве $F = L_2[0,1]$, где m - линейная мера Лебега на $[0,1]$. Пусть

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}\overline{\otimes}\mathcal{N}$$

тензорное произведение алгебр фон Неймана $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, а

$$\rho = \tau\overline{\otimes}m$$

тензорное произведение следов τ и m. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ не имеет минимальных проекторов .

Пусть $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $\mathcal{D}$ линейное подпространство в $H\overline{\otimes}F$, порожденное векторами вида

$$\xi \otimes \eta, \quad \xi \in \mathcal{D}(T), \quad \eta \in F.$$

Для каждого

$$\zeta = \Sigma_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i \in \mathcal{D}$$

положим:

$$(T \otimes I)(\zeta) = \Sigma_{i=1}^n (T\xi_i) \otimes \eta_i.$$

Линейный оператор $T \otimes I$ с областью определения $\mathcal{D}$ является предзамкнутым и его замыкание $T\overline{\otimes}I$ принадлежит $S(\mathcal{A}, \rho)$ (см. [8]). При этом,

$$|T|\overline{\otimes}I = |T\overline{\otimes}I|$$

и потому $\{E_\lambda\overline{\otimes}I\}$ является спектральным семейством проекторов для оператора $T\overline{\otimes}I$, где $\{E_\lambda\}_{\lambda>0}$ – спектральное семейство проекторов для оператора $|T|$. Поскольку
$$\rho(E_\lambda\overline{\otimes}I)=\tau(E_\lambda)\cdot\tau(I)=\tau(E_\lambda),$$
то
$$\mu(T)(t)=\rho(T\overline{\otimes}I)(t)\ \text{ для всех }\ t>0,$$
где $\rho(T\overline{\otimes}I)(t)$ невозрастающая перестановка оператора $T\overline{\otimes}I$, вычисляемая относительно следа ρ. Из определения оператора $T\overline{\otimes}I$, и свойств τ-измеримых операторов следует, что
$$T\overline{\otimes}I+S\overline{\otimes}I=(T+S)\overline{\otimes}I,$$
$$(T\overline{\otimes}I)(S\overline{\otimes}I)=(T+S)\overline{\otimes}I,$$
$$(T\overline{\otimes}I)^*=T^*\overline{\otimes}I,$$
где $T,S\in S(\mathcal{M},\tau)$. При этом, если
$$T\overline{\otimes}I=S\overline{\otimes}I,\ \text{ то }\ T=S.$$

Таким образом,
$$S(\mathcal{M},\tau)\overline{\otimes}I=\{T\overline{\otimes}I:T\in S(\mathcal{M},\tau)\}$$
есть $*$-подалгебра в $S(\mathcal{A},\rho)$, $*$-изоморфная $S(\mathcal{M},\tau)$, и
$$\mu(T)(t)=\rho(T\overline{\otimes}I)(t)$$
для всех $T\in S(\mathcal{M},\tau)$ и $t>0$, где $\rho(L)(t)$-невозрастающая перестановка оператора $L\in S(\mathcal{A},\rho)$, вычисленная относительно следа ρ. Из доказанного выше, получим:
$$\int_0^t\mu(T+S)(s)ds=\int_0^t\rho((T+S)\overline{\otimes}I)(s)ds\le\int_0^t\rho(T\overline{\otimes}I)(s)ds+\int_0^t\rho(S\overline{\otimes}I)(s)ds=$$
$$=\int_0^t\mu(T)(s)ds+\int_0^t\mu(S)(s)ds.$$
□

Поскольку для любого оператора $T\in S(\mathcal{M},\tau)$ имеет место:
$$\tau(|T|)=\int_0^\infty\mu(|T|)(s)ds=\int_0^\infty\mu(T)(s)ds=\lim_{t\to\infty}\int_0^t\mu(T)(s)ds,$$
то из предложения 14 вытекает следующее следствие:

Следствие 7. *Для любых операторов $T,S\in S(\mathcal{M},\tau)$ верно неравенство:*
$$\tau(|T+S|)\le\tau(|T|)+\tau(|S|).$$

Определение 11. Пусть $T, S \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Говорят, что $T \prec S$, если

$$\int_0^t \mu(T)(s)ds \leq \int_0^t \mu(S)(s)ds \ \text{ для всех } \ t > 0.$$

Бинарное отношение $" \prec "$ на $S(\mathcal{M}, \tau)$ называется порядком Харди-Литлвуда.

Заметим, что если $|T| \leq |S|$, то $T \prec S$.

4. Банахово пространство $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ τ - интегрируемых операторов.

Пусть $\mathcal{M}$ полуконечная алгебра фон Неймана, τ - точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $S(\mathcal{M}, \tau)$ $*$-алгебра всех τ-измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$.

Определение 12. Оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ называется τ-интегрируемым, если

$$\tau(|T|) < \infty.$$

Обозначим множество всех τ - интегрируемых операторов из $S(\mathcal{M}, \tau)$ через $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и для каждого $T \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ положим:

$$\|T\|_1 = \tau(|T|).$$

Теорема 6. *(i) $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ - линейное подпространство в $S(\mathcal{M}, \tau)$ и $\|\cdot\|_1$– норма на $L_1(\mathcal{M}, \tau)$;*

(ii) Для любых операторов $A, B \in \mathcal{M}$ и $T \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ верны соотношения:

$$ATB \in L_1(\mathcal{M}, \tau) \ \ и \ \ \|ATB\|_1 \leq \|A\|_{\mathcal{M}} \|B\|_{\mathcal{M}} \|T\|_1;$$

(iii) Если $T \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $T^* \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $\|T^*\|_1 = \|T\|_1$;

(iv) Если $T \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, $S \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $S \prec T$, то $S \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $\|S\|_1 \leq \|T\|_1$;

(v) Если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}, T \subset L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $\|T_n - T\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$, то $T_n \xrightarrow{п.м.} T$ при $n \to \infty$.

Доказательство. (i) Пусть $T, S \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Согласно следствия 7 имеем:

$$\tau(|T + S|) \leq \tau(|T|) + \tau(|S|) < \infty.$$

Это означает, что $(T + S) \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и

$$\|T + S\|_1 \leq \|T\|_1 + \|S\|_1.$$

Далее, если $\alpha \in \mathbb{C}$, то $\tau(|\alpha T|) = |\alpha|\tau()|T| < \infty$, то есть $\alpha T \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и

$$\|\alpha T\|_1 = |\alpha| \|T\|_1.$$

Следовательно, $L_1(\mathcal{M},\tau)$ – линейное подпространство в $S(\mathcal{M},\tau)$. Ясно, что $\|T\|_1 \geq 0$ и если $\tau(|T|) = \|T\|_1 = 0$, то в силу точности следа τ имеем, что $|T| = 0$, то есть $T = 0$. Таким образом, $\|\cdot\|$ есть норма на $L_1(\mathcal{M},\tau)$.

(ii) Пусть $A, B \in \mathcal{M}$, $T \in L_1(\mathcal{M},\tau)$. Согласно предложения 7(vi) имеем, что

$$\mu(ATB)(t) \leq \|A\|_{\mathcal{M}}\|B\|_{\mathcal{M}}\mu(T)(t) \text{ для любых } t > 0$$

Поэтому (см. теорему 4)

$$\tau(|ATB|) = \int_0^\infty \mu(ATB)(s)ds \leq \|A\|_{\mathcal{M}}\|B\|_{\mathcal{M}} \int_0^\infty \mu(T)(s)ds =$$

$$= \|A\|_{\mathcal{M}}\|B\|_{\mathcal{M}}\tau(|T|) < \infty,$$

то есть, $ATB \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и

$$\|ATB\|_1 \leq \|A\|_{\mathcal{M}}\|B\|_{\mathcal{M}}\|T\|_1.$$

(iii) Из предложения 7(i) следует, что

$$\mu(|T^*|)(t) = \mu(T^*)(t) = \mu(T)(t) = \mu(|T|)(t) \text{ для всех } t > 0.$$

Поэтому, для $T \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ имеем, что $T^* \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и

$$\|T^*\|_1 = \|T\|_1.$$

(iv) Пусть $T \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, $S \in S(\mathcal{M},\tau)$ и $S \prec T$, то есть,

$$\int_0^t \mu(T)(s)ds \leq \int_0^t \mu(S)(s)ds \text{ для всех } t > 0.$$

Тогда

$$\tau(|S|) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \mu(S)(s)ds \leq \lim_{t\to\infty} \int_0^t \mu(T)(s)ds = \tau(|T|) < \infty,$$

то есть, $S \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и

$$\|S\|_1 \leq \|T\|_1.$$

(v) Пусть $\{T_n\}_{n=1}^\infty, T \subset L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $\|T_n - T\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ имеем, что

$$|T_n - T| \geq |T_n - T|E_{(\varepsilon,\infty)}(|T_n - T|) \geq \varepsilon E_{(\varepsilon,\infty)}(|T_n - T|).$$

Поэтому

$$\tau(E_{(\varepsilon,\infty)}(|T_n - T|)) \leq \frac{1}{\varepsilon}\tau(|T_n - T|) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\|T_n - T\|_1 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, для любого $\delta > o$ найдется такое $n(\varepsilon, \delta)$, что при $n \geq n(\varepsilon, \delta)$

$$\tau(E_{(\varepsilon,\infty)}(|T_n - T|)) < \delta.$$

Поскольку

$$0 \leq |T_n - T|(I - E_{(\varepsilon,\infty)}(|T_n - T|)) \leq \varepsilon I,$$

то

$$\||T_n - T|(I - E_{(\varepsilon,\infty)}(|T_n - T|))\| \leq \varepsilon,$$

и потому $T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$ при $n \to \infty$. □

Пусть $T \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда (см. [5]) существуют такие частичные изометрии $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathcal{M}$, что

$$(ReT)_+ \leq V_1|T|V_1^*, \quad (ReT)_- \leq V_2|T|V_2^*,$$

$$(ImT)_+ \leq V_3|T|V_3^*, \quad (ImT)_- \leq V_4|T|V_4^*.$$

Следовательно,

$$\tau((ReT)_+) = \int_0^\infty \mu((ReT)_+)(t)dt \leq \int_0^\infty \mu(V_1|T|V_1^*)(t)dt \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \mu(|T|)(t)dt = \tau(|T|) < \infty,$$

то есть $(ReT)_+ \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Аналогично, $(ReT)_-, (ImT)_+, (ImT)_- \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$.

Поэтому определено число

$$\widetilde{\tau}(T) = \tau((ReT)_+) - \tau((ReT)_-) + i\tau((ImT)_+) - i\tau((ImT)_-).$$

Определение 13. Число $\widetilde{\tau}(T)$ называется интегралом оператора $T \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ по следу τ.

Ясно, что для $T \in L_1^+(\mathcal{M}, \tau) = \{S \in L_1(\mathcal{M}, \tau) : S \geq 0\}$ интеграл $\widetilde{\tau}(T)$ совпадает с $\tau(T)$.

Предложение 15. *(i) Если $T \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, $T = S_1 - S_2$, где $S_1, S_2 \in L_1^+(\mathcal{M}, \tau)$, то*

$$\widetilde{\tau}(T) = \tau(S_1) - \tau(S_2);$$

(ii) $\widetilde{\tau}$– линейный функционал на $L_1(\mathcal{M}, \tau)$

Доказательство. (i) Так как $T = (ReT)_+ - (ReT)_- = S_1 - S_2$, то

$$(ReT)_+ + S_2 = (ReT)_- + S_1.$$

В силу предложения 9, имеем, что

$$\tau((ReT)_+) + \tau(S_2) = \tau((ReT)_+ + S_2) = \tau((ReT)_- + S_1) = \tau((ReT)_-) + \tau(S_1).$$

Следовательно,

$$\tau(S_1)-\tau(S_2)=\tau((ReT)_+)-\tau((ReT)_-)=\widetilde{\tau}(T).$$

(ii) Пусть $T,S\in L_1(\mathcal{M},\tau)$, $T^*=T$, $S^*=S$. Тогда

$$T+S=((ReT)_+ +(ReS)_+)-((ReT)_- +(ReS)_-).$$

Из пункта (i) следует, что

$$\widetilde{\tau}(T+S)=\tau((ReT)_+ +(ReS)_+)-\tau((ReT)_- +(ReS)_-)=$$

$$=\widetilde{\tau}(T)+\widetilde{\tau}(S).$$

Пусть теперь T,S произвольные операторы из $L_1(\mathcal{M},\tau)$. Тогда

$$T+S=(ReT+ReS)+i(ImT+ImS),$$

и потому

$$\widetilde{\tau}(T+S)=\widetilde{\tau}(ReT+ReS)+i\widetilde{\tau}(ImT+ImS)=$$
$$=\widetilde{\tau}(T)+\widetilde{\tau}(S).$$

Аналогично проверяется равенство

$$\widetilde{\tau}(\alpha T)=\alpha\widetilde{\tau}(T)$$

для любого $\alpha=a+ib\in\mathbb{C}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

□

Теорема 7. *Нормированное пространство* $(L_1(\mathcal{M},\tau),\|\cdot\|_1)$ *– полное.*

Доказательство. Доказательство теоремы разобьем на несколько этапов.

1). Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность Коши в $(L_1(\mathcal{M},\tau),\|\cdot\|_1)$ и $0\le T_n\le T_{n+1}$, где $n=1,2,...$. Покажем, что существует такой оператор $T\in L_1(\mathcal{M},\tau)$, что $T_n\uparrow T$ и

$$\|T-T_n\|_1\to 0 \ \text{ при } \ n\to\infty.$$

Поскольку $\|T_n-T_k\|_1\to 0$ при $n,k\to\infty$, то согласно теореме 6(v), последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательнось Коши в $(S(\mathcal{M},\tau),t_\tau)$. Так как $(S(\mathcal{M},\tau),t_\tau)$ - полное топологическое векторное пространство (см. теорему 3), то существует такой оператор $T\in S(\mathcal{M},\tau)$, что

$$T_n\xrightarrow{t_\tau}T \ \text{ при } \ n\to\infty.$$

В силу предложений 4 и 12(iii) имеем, что

$$T_n\uparrow T \text{ и } \ \mu(T_n)(t)\to\mu(T)(t) \ \text{ при } \ n\to\infty$$

почти для всех $t > 0$.

Покажем, что $T \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Действительно, из [25] (теорема 3.4) следует, что

$$\int_0^\infty |\mu(T_n)(t) - \mu(T_k)(t)|dt \leq \|T_n - T_k\|_1.$$

Это означает, что последовательность функций $\{\mu(T_n)(t)\}_{n=1}^\infty$ есть последовательность Коши в банаховом пространстве $L_1((0,\infty), m)$, где m линейная мера Лебега на полупрямой $(0,\infty)$. Поэтому существует такая функция $f \in L_1((0,\infty), m)$, что

$$\|\mu(T_n) - f\|_{L_1((0,\infty),m)} \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Поскольку $\mu(T_n)(t) \to \mu(T)(t)$ при $n \to \infty$ почти для всех $t > 0$, то

$$\mu(T)(t) = f(t) \ \text{ почти всюду, } \ \text{ то есть}$$

$$\int_0^\infty |\mu(T)|(t)dt < \infty, \ \text{ или } \ T \in L_1(\mathcal{M}, \tau).$$

Покажем теперь, что

$$\|T - T_n\|_1 \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что

$$\|T_{n+1} - T_n\|_1 \leq \frac{1}{n^3}, \quad n = 1, 2, ...$$

Положим

$$S_n = T_1 + \sum_{k=1}^n k(T_{k+1} - T_k).$$

Ясно, что $\{S_n\}_{n=1}^\infty \subset L_1(\mathcal{M}, \tau)$, $0 \leq S_n \leq S_{n+1}$ и если $n < m$, то

$$\|S_m - S_n\|_1 = \left\| \sum_{k=n+1}^m k(T_{k+1} - T_k) \right\|_1 \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2} \to 0 \text{ при } \ n, m \to \infty.$$

Следовательно, $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ последовательность Коши в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$, и в силу доказанного выше, найдется такой оператор $S \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, что $S_n \uparrow S$.

Далее, для каждого $n = 1, 2, ...$ имеем:

$$n(T - T_n) = n(\sup_{m \geq n} T_m - T_n) = n(\sup_{m \geq n}(T_m - T_n)) = n(\sup_{m \geq n} \sum_{k=n}^{m-1}(T_{k+1} - T_k)) =$$

$$= \sup_{m \geq n} \sum_{k=n}^{m-1} n(T_{k+1} - T_k) \leq \sup_{m \geq n} \sum_{k=n}^{m-1} k(T_{k+1} - T_k) \leq S.$$

Поэтому

$$0 \leq T - T_n \leq \frac{S}{n},$$

откуда следует, что

$$\|T-T_n\|_1 \le \frac{1}{n}\|S\|_1, \quad \text{т.е.} \quad \|T-T_n\|_1 \to 0 \ \text{ при } \ n\to\infty.$$

2) Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность Коши в $(L_1(\mathcal{M},\tau),\|\cdot\|_1)$ и $T_n = T_n^*$, где $n=1,2,...$. Покажем, что существует такой оператор $T \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, что

$$\|T-T_n\|_1 \to 0 \ \text{ при } \ n\to\infty.$$

Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|T_{n+1}-T_n\|_1 < \infty.$$

Положим:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(T_{k+1}-T_k)_+, \quad L_n = \sum_{k=1}^{n}(T_{k+1}-T_k)_-.$$

Тогда

$$0\le S_n \le S_{n+1}, \quad 0 \le L_n \le L_{n+1}, \quad S_n, L_n \in L_1(\mathcal{M},\tau), \quad n=1,2,...$$

Если $n \le m$, то

$$\|S_m - S_n\|_1 = \|\sum_{k=n+1}^{m-1}(T_{k+1}-T_k)_+\|_1 \le \sum_{k=n+1}^{m-1}\|(T_{k+1}-T_k)_+\|_1 \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{m-1}\|(T_{k+1}-T_k)\|_1 \to 0 \ \text{ при } \ n\to\infty.$$

Следовательно, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность Коши в $L_1(\mathcal{M},\tau)$. Согласно первому этапу доказательства 1), существует такой оператор $S\in L_1(\mathcal{M},\tau)$, $S\ge 0$, что

$$\|S-S_n\|_1 \to 0 \ \text{ при } \ n\to\infty.$$

Аналогично, найдется такой оператор $L \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, $L \ge 0$, что

$$\|L-L_n\|_1 \to 0 \ \text{ при } \ n\to\infty.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\|(S_n-L_n)-(S-L)\|_1 = 0.$$

С другой стороны,

$$S_n - L_n = \sum_{k=1}^{n}(T_{k+1}-T_k) = T_{n+1}-T_1.$$

Следовательно, $T_n \to (S - L + T_1) = T \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ по норме $\| \cdot \|_1$ при $n \to \infty$.

3) Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ произвольная последовательность Коши в $(L_1(\mathcal{M}, \tau), \|\cdot\|_1)$. Поскольку $\|T_n^*\|_1 = \|T_n\|_1$ (см. теорему 6), то $\{T_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ тоже последовательность Коши в $(L_1(\mathcal{M}, \tau), \| \cdot \|_1)$. Следовательно, последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$, задаваемые равенствами:

$$S_n = ReT_n = \frac{T_n + T_n^*}{2} \quad \text{и} \quad L_n = ImT_n = \frac{T_n - T_n^*}{2i},$$

есть последовательности Коши самосопряженных операторов из $(L_1(\mathcal{M}, \tau), \| \cdot \|_1)$. Согласно второму этапу доказательства 2), найдутся такие операторы $S, L \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|S - S_n\|_1 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|L - L_n\|_1 = 0.$$

Но тогда $S + iL = T \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и

$$\|T - T_n\|_1 = \|(S + iL) - (S_n + iL_n)\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, пространство $(L_1(\mathcal{M}, \tau), \| \cdot \|_1)$ – полное. □

Список цитируемых источников

1. *Segal Irving E.* A non-commutative extension of abstract integration // Ann. Math. — 1953. — **57**. — P. 401–457.
2. *Nelson E.* Notes on non commutative integration // J. Funct. Anal. — 1974. —**№ 15**. — P. 103–116.
3. *Yeadon F. J.* Convergence of measurable operators // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1974. — **№ 74**. — P. 257–268.
4. *Yeadon F. J.* Non-commutative L^P-spaces // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1975. — **№ 77**. — P. 91–102.
5. *Сукочев Ф.А., Чилин В.И.* Неравенство треугольника для измеримых опраторов относительно порядка Харди-Литлвуда // Известия АН Уз.ССР. — сер.физ.-мат.наук, — 1988. —**№ 4**. — С. 44–50.
6. *Чилин В. И.* Порядковая характеризация некоммутативных L_p пространств // Теория функций и ее приложения. — Сб.научн.трудов. — Кемерово. — 1985. —С. 19–23.
7. *Овчинников В.И.* О s – числах измеримых операторов // Функциональный анализ и его приложения. — 1970. — **Т. 4**, — вып. 3. — С. 78–85.
8. *Stinespring W. E.* Integration theorems for gages and duality for unimodular groups // Tranc. Amer. Math. Soc. — 1959. — **№ 90**. — P. 15–56.
9. *Fack T., Kosaki H.* Generalized s-numbers of τ -mesaurable operators // Pacific J. Math. — 1986. — V. 123. — P. 269–300.
10. *Terp M.* L^p – spaces associated with von Neumann algebras, Notes // Math. Institute, — Copenhagen univ. — 1981. — Thesis.
11. *Leinert M.* On integration with respect to a trage // Aspects of Positivity in Functional Analysis. Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland). — 1986. — P. 231–239.

12. *Kunce R.A.* L^p Forier transforms on localli compact unimodular groops // Trans. Amer. Math. Soc. — 1958. — **89**. — P. 519–540 .
13. *Haagerup U.* L^p - spaces associated with an arbitrary vo Neumann algebra // Algebres d'operateurs et leurs applications en physique mathematique. — Colloques internationaux du CNRS. —1979. — P. 175–184.
14. *Hilsum M.* Les espaces L^p d'une algebre de von Neumann // J. Func. Anal. — 1981. — **№ 40**. — P. 151–169.
15. *Тихонов О.Е.* О некоммутативном аналоге пространства L_p // Известия вузов. Математика. —1979. —**№ 11**. — С. 69–77.
16. *Трунов Н.В., Шерстнев А.Н.* Введение в теорию некоммутативного интегрирования // Итоги Науки и Техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. —1985. — Том **27**. — С. 167–190.
17. *Шерстнев А.Н.* О некоммутативном аналоге пространства L_1 // Успехи мат наук.— 1978. — Т. 33, — **№ 1**, — С. 231–232.
18. *Шерстнев А.Н.* К общей теории интеграла в алгебрах фон Неймана // Известия вузов. Математика. — 1982. — **№ 8**. — С. 20–35.
19. *Araki H., Masuda T.* Positive cones and L_p-spaces for von Neumann algebras // Publ.Res.Inst.Math.Sci. —1982. — v.18, — **№ 2**. — P. 339–411.
20. *Masuda T.* L_p spaces for von Neumann algebra with reference to a faithful normal semifinite weight // Publ.Res.Inst.Math. Sci. — 1983. — v.19, — **№ 2**. — P. 673–727.
21. *Strătilă, ¸Serban; Zsidó, László.* Lectures on von Neumann algebras Editura Academiei. — Bucharest. — Abacus Press. — Tunbridge Wells. — 1979. — 478 pp.
22. *Takesaki M.* Theory of operator algebras I New York: Springer, 1979. — 415 p.
23. *Муратов М.А., Чилин И.И.* $*$ - Алгебры неограниченных операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана // Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. XIII. Записки научных семинаров ПОМИ. / — Санкт-Петербург: 2005. — С. 183–197.
24. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. — Москва: Наука, 1978. — 400 с.
25. *Dodds P.G., Dodds T.K., Pagter B.* Non-commutative Banah function spaces // Math.Z. — 1989. — v.201. — P. 583–597.

Получена 15.05.2007