Динамические системы, вып. 20 (2006), 104–112

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.9:532

Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости

Д. А. Закора
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: dmitry_@crimea.edu*

Аннотация. В работе исследована эволюционная задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области. Доказана теорема о сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи.

1. Постановка задачи

Пусть идеальная неоднородная жидкость полностью заполняет неподвижный контейнер. Будем считать, что жидкость занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор, нормальный к $S := \partial\Omega$ и направленный вне Ω. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с контейнером, таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω. Гравитационное поле тогда запишется в виде $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, $g > 0$, где $\vec{e}_3$ — орт оси Ox_3, направленный против действия силы тяжести.

В состоянии покоя жидкость имеет плотность $\rho_0 = \mathrm{const}$, а равновесное давление $P_0(x)$ определяется из соотношения

$$-\nabla P_0(x) - \rho_0 g\vec{e}_3 = \vec{0}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega. \tag{1.1}$$

Из (1.1) следует, что $P_0(x) = -g\rho_0 x_3 + p_0$, где p_0 — давление жидкости в начале координат.

Рассмотрим движения жидкости, малые по отношению состоянию равновесия. Представим полное давление и полную плотность жидкости в виде

$$P(t,x) = P_0(x) + p(t,x), \quad \widetilde{\rho}(t,x) = \rho_0 + \rho(t,x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \tag{1.2}$$

где $p(t,x)$ — это динамическое давление, а $\rho(t,x)$ — динамическая плотность жидкости. Обозначим через $\vec{w}(t,x)$ поле смещений в жидкости и будем считать, что $p(t,x)$, $\rho(t,x)$ и $\vec{w}(t,x)$ — малые одного порядка. Линеаризация уравнений Эйлера для движения идеальной жидкости и уравнения неразрывности приводит к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_0\vec{w}) = -\nabla p - \rho g\vec{e}_3 + \rho_0\vec{f}, \quad \rho + \mathrm{div}(\rho_0\vec{w}) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \tag{1.3}$$

где $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное.

К системе (1.3) присоединим граничное условие непротекания:

$$\vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S). \tag{1.4}$$

Релаксирующая жидкость моделируется следующим дополнительным уравнением состояния, связывающим динамическое давление $p(t,x)$ и динамическую плотность $\rho(t,x)$:

$$p(t,x) = a_\infty^2(x)\rho(t,x) - \int_0^t K(t-s,x)\rho(s,x)\,ds, \tag{1.5}$$

где положительная функция $K(t,x)$ определяет ядро интегрального оператора Вольтерра, а $a_\infty^2(x)$ — квадрат скорости звука в неоднородной жидкости. Это наиболее общая модель релаксирующей жидкости. Важный частный случай получается, если определить ядро в форме

$$K(t,x) = K_0(x)\exp(-b(x)t), \tag{1.6}$$

где $K_0(x)$ и $b(x)$ положительные функции в области Ω.

Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости заключается в отыскании полей $\vec{w}(t,x)$, $p(t,x)$ и $\rho(t,x)$ из уравнений (1.3), граничного условия (1.4), соотношения (1.5), и при начальных условиях

$$\vec{w}(0,x) = \vec{w}^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{w}(0,x) = \vec{w}^1(x). \tag{1.7}$$

Подобная задача (при отсутствии силы тяжести и при некоторых модельных ограничениях на граничные условия для динамической плотности) изучалась в [1], с. 390-410 (см. также [2]). В указанной монографии доказана теорема о сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи, а также исследована спектральная задача о нормальных колебаниях.

2. Вывод операторного уравнения

Для перехода к операторному уравнению в изучаемой задаче применим метод ортогонального проектирования уравнений движения на специальные подпространства (см. [3]). Для этого воспользуемся разложением Г. Вейля пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega)$ в ортогональную сумму:

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega), \tag{2.1}$$

$$\vec{J}_0(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega)| \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \ (\text{в } \Omega), \quad v_n := \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \ (\text{на } S)\},$$

$$\vec{G}(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega)| \quad \vec{v} = \nabla\Phi, \quad \int_\Omega \Phi\,d\Omega = 0\}.$$

Здесь операции $\mathrm{div}\vec{v}$ и v_n понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [3], с. 100-102. Введем ортопроекторы P_0 и P_G пространства $\vec{L}_2(\Omega)$ на $\vec{J}_0(\Omega)$ и $\vec{G}(\Omega)$ соответственно. Представим поле $\rho_0\vec{w}$ в виде:

$$\rho_0\vec{w} = \vec{v} + \nabla\Phi, \quad \text{где} \quad \vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega), \quad \nabla\Phi \in \vec{G}(\Omega). \tag{2.2}$$

Подставим представление (2.2) в первое уравнение из (1.3) и применим к нему ортопроекторы P_0 и P_G, отвечающие разложению (2.1). Получим:

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} = -gP_0(\rho\vec{e}_3) + \rho_0 P_0\vec{f} \quad (\text{в } \Omega), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\Phi = -\nabla p - gP_G(\rho\vec{e}_3) + \rho_0 P_G\vec{f} \quad (\text{в } \Omega). \tag{2.4}$$

Соотношение (2.3) тривиально в том смысле, что поле $\vec{v}$ может быть найдено из него при известной функции ρ. Поэтому далее будем рассматривать только уравнение (2.4).

Введем обозначения: $P_G(\rho\vec{e}_3) =: \nabla\varphi(\rho)$, $\rho_0 P_G\vec{f} =: \nabla f_G$, и выпишем интеграл Коши-Лагранжа, следующий из (2.4):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -p - g\varphi(\rho) + f_G + C(t) \quad (\text{в } \Omega). \tag{2.5}$$

Здесь $C(t)$ — произвольная функция времени.

Дальнейшие рассуждения связаны с преобразованием интеграла Коши-Лагранжа (2.4) к интегродифференциальному уравнению второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. А именно, из представления (2.2), уравнения неразрывности (1.3) и граничного условия (1.4) следует вспомогательная задача для потенциала Φ:

$$-\Delta\Phi = \rho \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \int_\Omega \Phi\, d\Omega = \int_\Omega \rho\, d\Omega = 0. \tag{2.6}$$

Это задача Неймана для уравнения Пуассона. Она имеет единственное обобщенное решение $\Phi = A^{-1}\rho$ для любой функции ρ из $L_{2,\Omega} := L_2(\Omega) \ominus \{1\}$ (см. [3], с. 35-36). Оператор A неограниченный, самосопряженный и положительно определенный в $L_{2,\Omega}$. Оператор A^{-1} является компактным в $L_{2,\Omega}$. Энергетическое пространство H_A оператора A, совпадающее с $\mathcal{D}(A^{1/2})$, имеет вид

$$H_A = \{\Phi \in W_2^1(\Omega) | \quad \int_\Omega \Phi\, d\Omega = 0\} = W_2^1(\Omega) \ominus \{1\} =: H_\Omega^1. \tag{2.7}$$

Скалярное произведение и норма в гильбертовом пространстве $H_\Omega^1 = H_A$ определяются следующим образом (см. [3], с. 35):

$$(\varphi, \psi)_{H_\Omega^1} := \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi\, d\Omega, \quad \|\psi\|^2_{H_\Omega^1} := \int_\Omega |\nabla\psi|^2\, d\Omega. \tag{2.8}$$

О связи потенциала $\varphi(\rho)$ и функции ρ говорит следующая

Лемма 1. *Потенциал $\varphi(\rho)$ может быть представлен в виде $\varphi(\rho) = B\rho$, где оператор B обладает следующими свойствами:*

$$B \in \mathfrak{S}_\infty(L_{2,\Omega}), \quad A^{1/2}B \in \mathcal{L}(L_{2,\Omega}).$$

Доказательство. По определению $\nabla\varphi(\rho) := P_G(\rho\vec{e}_3)$. Отсюда получаем, что потенциал $\varphi(\rho)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\rho}{\partial x_3} \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \rho\vec{e}_3 \cdot \vec{n} =: \rho n_3(x) \quad (\text{на } S), \quad \int_\Omega \rho\, d\Omega = 0. \tag{2.9}$$

Из формулы Грина для оператора Лапласа несложно вывести интегральное тождество, которому удовлетворяет решение краевой задачи (2.9). Это интегральное тождество мы положим в основу определения обобщенного решения задачи (2.9). А именно, при каждом $\rho \in L_{2,\Omega}$ назовем функцию $\varphi \in H^1_\Omega$ обобщенным решением задачи (2.9), если она удовлетворяет следующему тождеству:

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi\, d\Omega = \int_\Omega \rho\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\, d\Omega, \quad \forall\psi \in H^1_\Omega. \tag{2.10}$$

Опираясь на это определение покажем существование и единственность обобщенного решения задачи (2.9). Определим функционал $l(\psi)$ левой частью интегрального тождества (2.10). Это линейный и ограниченный в H^1_Ω функционал. Действительно, его линейность очевидна, а ограниченность следует из следующих оценок:

$$\begin{aligned}|l(\psi)|^2 = \left|\int_\Omega \rho\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\, d\Omega\right|^2 \le \int_\Omega |\rho|^2\, d\Omega \cdot \int_\Omega \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right|^2\, d\Omega \le \\ \le \int_\Omega |\rho|^2\, d\Omega \cdot \int_\Omega |\nabla\psi|^2\, d\Omega = \|\rho\|^2_{L_{2,\Omega}} \cdot \|\psi\|^2_{H^1_\Omega}, \quad \forall\psi \in H^1_\Omega.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Из леммы Рисса о представлении линейного ограниченного функционала следует, что существует единственный элемент $\rho^* \in H^1_\Omega$ такой, что

$$l(\psi) = \int_\Omega \rho\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\, d\Omega = \int_\Omega \nabla\rho^* \cdot \nabla\psi\, d\Omega = (\rho^*, \psi)_{H^1_\Omega}, \quad \forall\psi \in H^1_\Omega. \tag{2.12}$$

Из (2.10) и (2.12) тогда получаем, что

$$(\varphi, \psi)_{H^1_\Omega} = \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi\, d\Omega = \int_\Omega \rho\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\, d\Omega = (\rho^*, \psi)_{H^1_\Omega}, \quad \forall\psi \in H^1_\Omega. \tag{2.13}$$

Отсюда следует, что $\varphi = \rho^* \in H^1_\Omega$ единственное обобщенное решение задачи (2.9). Можно считать, что $\varphi = \rho^* := B\rho$, где B — оператор, действующий из $L_{2,\Omega}$ в H^1_Ω. Из (2.11) и (2.12) при $\psi = B\rho$ несложно вывести оценку

$$\|B\rho\|_{H^1_\Omega} \le \|\rho\|_{L_{2,\Omega}}, \quad \forall\rho \in L_{2,\Omega}, \tag{2.14}$$

из которой следует, что $B \in \mathcal{L}(L_{2,\Omega}, H^1_\Omega)$. Из компактности вложения пространства H^1_Ω в $L_{2,\Omega}$ следует компактность оператора B в пространстве $L_{2,\Omega}$: $B \in \mathfrak{S}_\infty(L_{2,\Omega})$. Из (2.7) и (2.8) следует, что $\|B\rho\|_{H^1_\Omega} = \|B\rho\|_{H_A} = \|A^{1/2}B\rho\|_{L_{2,\Omega}}$. Вместе с (2.14) это означает включение $A^{1/2}B \in \mathcal{L}(L_{2,\Omega})$. □

Используя введенные операторы, соотношения (1.5) и (2.5), предварительно спроектированные на $L_{2,\Omega}$, можно теперь записать в виде следующего интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $H := L_{2,\Omega}$:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = -(C_P + gB)A\Phi + \int_0^t K_P(t-s)A\Phi(s)\,ds + Pf_G(t). \tag{2.15}$$

Здесь введены обозначения: $C_P := Pa^2_\infty(x)P$, $K_P(t-s) := PK(t-s,x)P$, а P — это ортопроектор пространства $L_2(\Omega)$ на $L_{2,\Omega}$. Оператор C_P и оператор-функция $K_P(t)$ являются ограниченными, самосопряженными и положительно определенными в $H = L_{2,\Omega}$; это следует из того, что функции $a^2_\infty(x)$ и $K(t,x)$ — ограниченны и положительны в области Ω.

Обозначим потенциалы полей $P_G(\rho_0\vec{w}^0)$ и $P_G(\rho_0\vec{w}^1)$ через Φ^0 и Φ^1 соответственно, тогда начальные условия для уравнения (2.15) запишутся в виде:

$$\Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi'(0) = \Phi^1. \tag{2.16}$$

Проведенные рассуждения сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть $\vec{w}$, ρ, ∇p — классическое решение задачи* (1.3)-(1.7) *о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области, тогда функция Φ является решением задачи Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка* (2.15)-(2.16).

3. Исследование задачи Коши (2.15)-(2.16)

Дадим следующее

Определение 1. Назовем сильным решением исходной начально-краевой задачи (1.3)-(1.7) такие функции $\vec{w}$, ρ, ∇p для которых функция Φ является сильным решением задачи Коши (2.15)-(2.16) и выполнено соотношение (2.3). В свою очередь сильным решением задачи Коши (2.15)-(2.16) (см. [4], с. 291) назовем функцию $\Phi(t)$ такую, что $\Phi(t) \in \mathcal{D}(A)$, $\Phi'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ для любого t из $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, $A\Phi(t)$, $A^{1/2}\Phi'(t) \in C(\mathbb{R}_+; H)$, $\Phi(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$, выполнены начальные условия (2.16) и уравнение (2.15) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Далее будем считать, что оператор $C_P + gB$ непрерывно обратим в H. Достаточное условие для этого следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть выполнено условие*

$$g < \min_{x\in\Omega} a_\infty^2(x) C^{1/2}(A), \tag{3.1}$$

где $C(A)$ *— нижняя грань оператора* A*. Тогда оператор* $C_P + gB$ *непрерывно обратим в* H*:* $(C_P + gB)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$*.*

Доказательство. Из (2.14) следует, что для любого $\rho \in H = L_{2,\Omega}$

$$\|\rho\|^2_{L_{2,\Omega}} \geq \|B\rho\|^2_{H^1_\Omega} = \|A^{1/2}B\rho\|^2_{L_{2,\Omega}} \geq C(A)\|B\rho\|^2_{L_{2,\Omega}},$$

откуда получаем оценку нормы оператора B:

$$\|B\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C^{-1/2}(A). \tag{3.2}$$

Далее, для любого $\Phi \in H = L_{2,\Omega}$ имеем:

$$\|C_P^{1/2}\Phi\|^2_{L_{2,\Omega}} = (C_P\Phi, \Phi)_{L_{2,\Omega}} = \int_\Omega a_\infty^2(x)|\Phi|^2\, d\Omega \geq \min_{x\in\Omega} a_\infty^2(x)\|\Phi\|^2_{L_{2,\Omega}}.$$

Отсюда, после замены $C_P^{1/2}\Phi = \Psi$, следует оценка нормы оператора $C_P^{-1/2}$:

$$\|C_P^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \Big(\min_{x\in\Omega} a_\infty^2(x)\Big)^{-1/2}. \tag{3.3}$$

Из оценок (3.2), (3.3) и условий леммы следует, что $\|gC_P^{-1/2}BC_P^{-1/2}\| < 1$. Отсюда и из представления

$$C_P + gB = C_P^{1/2}(I + gC_P^{-1/2}BC_P^{-1/2})C_P^{1/2}$$

следует непрерывная обратимость оператора $C_P + gB$. □

Преобразуем уравнение (2.15) следующим образом:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = -(C_P^{1/2} + gBC_P^{-1/2})\Big(C_P^{1/2}A\Phi - \\ - C_P^{1/2}(C_P+gB)^{-1}\int_0^t K_P(t-s)A\Phi(s)\,ds - C_P^{1/2}(C_P+gB)^{-1}Pf_G(t)\Big).$$

Осуществим здесь замену $A^{1/2}\Phi = \xi$ и преобразуем полученное соотношение к системе двух уравнений первого порядка в гильбертовом пространстве H:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = -(A^{1/2}C_P^{1/2} + gA^{1/2}BC_P^{-1/2})\eta, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = C_P^{1/2}A^{1/2}\xi - C_P^{1/2}(C_P+gB)^{-1}\displaystyle\int_0^t K_P(t-s)A^{1/2}\xi(s)\,ds - \\ \qquad -C_P^{1/2}(C_P+gB)^{-1}Pf_G(t). \end{cases} \tag{3.4}$$

Начальные условия для системы (3.4) имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\xi(0) = A^{1/2}\Phi^0 =: \xi^0, \quad \eta(0) = -(A^{1/2}C_P^{1/2} + gA^{1/2}BC_P^{-1/2})^{-1}\xi'(0) = \\
&= -(A^{1/2}(C_P + gB)C_P^{-1/2})^{-1}\xi'(0) = -C_P^{1/2}(C_P + gB)^{-1}\Phi^1 =: \eta^0.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Задачу Коши (3.4), (3.5) запишем в векторно-матричной форме в сдвоенном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := H \oplus H$:

$$
\frac{dy}{dt} = \mathcal{A}y + \int_0^t \mathcal{K}(t-s)\mathcal{A}y(s)\,ds + \mathcal{F}(t), \quad y(0) = y^0. \tag{3.6}
$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$
y := \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad y^0 := \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \eta^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1/2}\Phi^0 \\ -C_P^{1/2}(C_P + gB)^{-1}\Phi^1 \end{pmatrix},
$$

$$
\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & -A^{1/2}C_P^{1/2} - Q \\ C_P^{1/2}A^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{K}(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_P^{1/2}(C_P + gB)^{-1}K_P(t)C_P^{-1/2} \end{pmatrix},
$$

$$
Q := gA^{1/2}BC_P^{-1/2}, \quad \mathcal{F}(t) := (0; -C_P^{1/2}(C_P + gB)^{-1}Pf_G(t))^t.
$$

В силу леммы 1 оператор Q ограничен в H: $Q \in \mathcal{L}(H)$.

Определение 2. (см. [4], с. 38) Сильным решением задачи Коши (3.6) назовем функцию $y(t)$ такую, что $y(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ для любого t из $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}y(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $y(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $y(0) = y^0$ и выполнено уравнение из (3.6) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Относительно разрешимости задачи Коши (3.6) справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $K_P(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(H))$, $f_G(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, тогда для любого $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ существует и единственно сильное решение задачи Коши* (3.6).

Доказательство. Прежде всего, несложно проверить, что из условий $K_P(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(H))$, $f_G(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ следует, что $\mathcal{K}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, $\mathcal{F}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Далее, из условия $Q \in \mathcal{L}(H)$ и свойств операторов, составляющих матричный оператор $\mathcal{A}$ следует, что оператор $\mathcal{A}$ является генератором сильно непрерывной группы операторов $\mathcal{U}(t) := \exp(t\mathcal{A})$ (см. [4], с. 185, теорема 7.5).

Дальнейшее доказательство следует идеям из монографии [1]. Предположим теперь, что $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ и задача Коши (3.6) имеет сильное решение $y(t)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{U}(t)y^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}(s)\,ds + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\left\{\int_0^s \mathcal{K}(s-\tau)\mathcal{A}y(\tau)\,d\tau\right\} ds = \\
&= \mathcal{U}(t)y^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}(s)\,ds + \int_0^t d\tau \int_\tau^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{K}(s-\tau)\mathcal{A}y(\tau)\,ds.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Преобразуем внутренний интеграл в (3.7). Из условия $(C_P + gB)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ следует, что оператор $\mathcal{A}$ непрерывно обратим. Далее, поскольку $y(\tau) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{K}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, то существует частная производная:

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t-s)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{K}(s-\tau)\mathcal{A}y(\tau) =$$
$$= -\mathcal{U}(t-s)\mathcal{K}(s-\tau)\mathcal{A}y(\tau) + \mathcal{U}(t-s)\mathcal{A}^{-1}\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{K}(s-\tau)\mathcal{A}y(\tau).$$

Проинтегрируем это соотношение по s:

$$\int_\tau^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{K}(s-\tau)\mathcal{A}y(\tau)\,ds = \mathcal{A}^{-1}\Big(-\mathcal{K}(t-\tau)\mathcal{A}y(\tau) + \mathcal{U}(t-\tau)\mathcal{K}(0)\mathcal{A}y(\tau) +$$
$$+ \int_\tau^t \mathcal{U}(t-s)\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{K}(s-\tau)\mathcal{A}y(\tau)\,ds\Big) =: \mathcal{A}^{-1}\mathcal{K}_1(t,\tau)y(\tau). \quad (3.8)$$

Из (3.7), (3.8) получаем, что сильное решение $y(t)$ задачи Коши (3.6) удовлетворяет следующему интегральному уравнению Вольтерра:

$$y(t) = \widehat{y}(t) + \int_0^t \mathcal{A}^{-1}\mathcal{K}_1(t,s)y(s)\,ds, \quad \text{где} \quad \widehat{y}(t) := \mathcal{U}(t)y^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}(s)\,ds. \quad (3.9)$$

Здесь $\widehat{y}(t)$ решение задачи Коши (3.6) без интегрального слагаемого, поэтому $\widehat{y}(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$.

Покажем, что уравнение (3.9) имеет единственное решение, которое и является сильным решением задачи Коши (3.6). Введем пространство $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} := (\mathcal{D}(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, где $\|y\|_{\mathcal{A}} := \|\mathcal{A}y\|$ для любого $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Известно, что $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ банахово пространство.

Из (3.8) следует, что $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{K}_1(t,s) \in C(0 \le s \le t < +\infty; \mathcal{L}(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}))$. Таким образом получаем, что уравнение (3.9), рассматриваемое в $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, является интегральным уравнением Вольтерра второго рода с непрерывным ядром. Отсюда и из включения $\widehat{y}(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{E}_{\mathcal{A}})$ следует, что уравнение (3.9) имеет единственное решение $y(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{E}_{\mathcal{A}})$.

Из включения $\widehat{y}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ получаем, что $y(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что $y(t)$ удовлетворяет определению 2, и, таким образом, является единственным сильным решением задачи (3.6). □

Следствием теоремы 1 является утверждение о сильной разрешимости задачи Коши (2.15)-(2.16), а следовательно, и начально краевой задачи (1.3)-(1.7).

Теорема 2. *Пусть ядро $K(t,x)$ оператора Вольтерра из (1.5) и поле $\vec{f}(t,x)$ непрерывно дифференцируемы по времени как функции со значениями в пространствах $L_2(\Omega)$ и $\vec{L}_2(\Omega)$ соответственно. Тогда для любых $\Phi^0 \in \mathcal{D}(A)$ и $\Phi^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ задача Коши (2.15)-(2.16) имеет единственное сильное решение на $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Прежде всего, проверим, что $\Phi^0 \in \mathcal{D}(A)$, $\Phi^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ тогда и только тогда, когда $y^0 = (\xi^0; \eta^0)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{1/2}C_P^{1/2})$, то есть, что $A^{1/2}\Phi^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $C_P^{1/2}(C_P + gB)^{-1}\Phi^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}C_P^{1/2})$. Очевидно, в проверке нуждается только следующее утверждение:

$$C_P^{1/2}(C_P + gB)^{-1}\Phi^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}C_P^{1/2}) \Leftrightarrow \Phi^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}). \tag{3.10}$$

Пусть $C_P^{1/2}(C_P + gB)^{-1}\Phi^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}C_P^{1/2})$. Отсюда следует включение $C_P(C_P + gB)^{-1}\Phi^1 =: \Psi \in \mathcal{D}(A^{1/2})$. Прямыми вычислениями проверяется, что $\Phi^1 = \Psi + gBC_P^{-1}\Psi$. Из леммы 1 следует включение $A^{1/2}B \in \mathcal{L}(L_{2,\Omega}) = \mathcal{L}(H)$. Отсюда и из представления для Φ^1 получаем, что $\Phi^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$.

Обратно, пусть теперь $\Phi^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$. Для элемента Ψ, определенного как и выше, справедливо представление $\Psi = \Phi^1 - gBC_P^{-1}\Psi$. Отсюда следует, что $\Psi = C_P(C_P + gB)^{-1}\Phi^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ и, таким образом, утверждение (3.10) доказано.

Из проведенных рассуждений следует, что при условиях настоящей теоремы выполнены все условия теоремы 1 и, таким образом, задача Коши (3.6) (или, что то же, задача (3.4)-(3.5)) имеет единственное сильное решение $y(t) = (\xi(t); \eta(t))^t \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{1/2}C_P^{1/2})) \cap C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Осуществляя в системе (3.4) обратную замену $\xi(t) = A^{1/2}\Phi(t)$ получим, что функция $\Phi(t)$ является единственным сильным решением задачи Коши (2.15)-(2.16). $\square$

Здесь можно отметить, что условия разрешимости задачи Коши (2.15)-(2.16) такие же, как если бы в уравнении не было интегрального слагаемого. В этом случае уравнение (2.15) являлось бы уравнением гиперболического типа.

Список цитируемых источников

1. *Kopachevsky N.D., Krein S.G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself – adjoint Problems for Viscous Fluids. — Basel — Boston — Berlin: Birkhäuser Verlag, 2003, — 444 p. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146.)
2. *Bolgova (Orlova) L.D., Kopachevsky N.D.* Boundary value problems on small oscillations of an ideal relaxing fluid and its generalizations // Спектральные и эволюционные задачи. Вып. 3: Тез. лекц. и докл. III Крымской осенней матем. школы-симпоз. — Симферополь, 1994. — С. 41–42.
3. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
4. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — Москва: Наука, 1967, — 464 с.

Получено 14.11.2006