Динамические системы, вып. 27 (2009), 115–126

УДК 517.432

О расширениях кососимметрических антилинейных операторов

Д.В. Третьяков

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: dvttvd@mail.ru*

Аннотация. В настоящей работе исследуются некоторые вопросы теории неограниченных антилинейных операторов. Доказано, что для множества точек регулярного типа произвольного антилинейного оператора имеет место так называемый принцип окружности, а для кососимметрического оператора размерности различных дефектных подпространств совпадают. Для замкнутых кососимметрических антилинейных операторов получены аналоги формул фон Неймана и описание всех собственных аккретивных расширений. Все кососимметрические и аккретивные расширения указанных операторов описываются с помощью аддитивных изометрий и растяжений.

Ключевые слова: кососимметрический антилинейный оператор, аналоги формул фон Неймана, собственные аккретивные расширения, аддитивные изометрия и растяжение.

1. Постановка задачи

Хорошо известна важная роль антилинейных операторов и функционалов в различных приложениях. Достаточно, в связи с этим, упомянуть лемму Рисса, устанавливающую антилинейный изометрический изоморфизм между гильбертовым пространством и его сопряжённым, работы Вигнера по теории групп и их представлениям (см., напр., [3]), Шармы и Альмейды (см., напр., [6]), модулярную теорию Томиты-Такесаки в теории алгебр фон Неймана (см., напр., в книгах [2], [7]) и др.

Необходимо здесь сказать несколько слов о существенных отличиях свойств операторов линейных и антилинейных. Во-первых, уже в двумерных пространствах существуют антилинейные операторы с пустым спектром; во-вторых, непустой спектр антилинейного оператора вместе с произвольной своей точкой содержит окружность с центром в начале координат, радиус которой равен модулю указанной точки (принцип окружности [4]); в-третьих, симметрические и кососимметрические антилинейные операторы не связаны между собой тривиальным образом, как в линейном случае; в-четвёртых, как известно, переход от линейного оператора к антилинейному осуществляется с помощью умножения слева первого оператора на оператор сопряжения, однако умножение это не сохраняет свойств линейного оператора, например, симметрические или кососимметрические операторы не переводятся в соответствующие антилинейные.

Многие из антилинейных операторов, встречающиеся в приложениях, неограничены. Поэтому, возникают задачи изучения различных классов таких операторов. Одним из наиболее простых классов образуют неограниченные кососимметрические операторы. Изучению спектра, а, также, кососимметрических и кососамосопряжённых расширений таких операторов посвящена данная работа.

2. Антилинейные и аддитивные операторы

Пусть $\mathfrak{H}$ — комплексное сепарабельное гильбертово пространство (ГП). Оператор S, действующий в $\mathfrak{H}$, называется *антилинейным*, если:

а) область его определения $\mathrm{dom}(S)$ – $\mathbb{C}$-линеал;

б) для любых векторов $x, y \in \mathrm{dom}(S)$ и констант $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполняется равенство

$$S(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} Sx + \bar{\beta} Sy.$$

Будем называть оператор A, действующий в ГП $\mathfrak{H}$ *аддитивным*, если:

а) область его определения $\mathrm{dom}(A)$ — $\mathbb{R}$-линеал;

б) для любых векторов $x, y \in \mathrm{dom}(A)$

$$A(x + y) = Ax + Ay.$$

Легко проверить, что всякий аддитивный оператор является $\mathbb{R}$-линейным.

Сопряжённые операторы в антилинейном и аддитивном случаях определяются похожим образом. Если $S : \mathrm{dom}(S) \to \mathrm{ran}(S)$– антилинейный оператор с плотной областью определения, и $y \in \mathfrak{H}$ — вектор, для которого существует $y^* \in \mathfrak{H}$ такой, что

$$(Sx, y) = (y^*, x)$$

для любого $x \in \mathrm{dom}(S)$. Множество таких векторов y образует $\mathbb{C}$-линеал, а вектор y^* определяется по вектору y однозначно.

Оператор S^*, определяемый равенством $S^* y := y^*$, называется *оператором, сопряжённым* к оператору S. Этот оператор также является антилинейным.

Аналогично для аддитивного, плотно заданного оператора

$$A : \mathrm{dom}(A) \to \mathrm{ran}(A)$$

с помощью равенства

$$\mathrm{Re}(Ax, y) = \mathrm{Re}(x, y^{(*)})$$

определяется сопряжённый оператор $A^{(*)}$, который также является аддитивным. Отметим, что для плотно заданного антилинейного оператора выполняется равенство $S^* = S^{(*)}$. Понятие замкнутого оператора определяется так же как и в линейном случае.

В [5] определяется оператор, сопряжённый к аддитивному в ограниченном случае и рассматриваются его свойства.

2.1. Отношение $\mathbb{R}$-ортогональности и некоторые его свойства

В ГП $\mathfrak{H}$ рассмотрим отношение $\mathbb{R}$-ортогональности. Будем говорить, что векторы $x, y \in \mathfrak{H}$ $\mathbb{R}$-ортогональны ($x(\perp)y$), если $\mathrm{Re}(x,y) = 0$. Для произвольного множества $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ определим $\mathbb{R}$-ортогональное дополнение $\mathfrak{M}^{(\perp)}$ следующим образом:

$$\mathfrak{M}^{(\perp)} := \{h \in \mathfrak{H} \mid h(\perp)\mathfrak{M}\}.$$

Отметим следующие свойства отношения ортогональности :

1. $\mathfrak{H}^{(\perp)} = \{\theta\}, \quad \{\theta\}^{(\perp)} = \mathfrak{H}$;
2. $(\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}) \Rightarrow (\mathfrak{G}^{(\perp)} \subseteq \mathfrak{M}^{(\perp)})$;
3. $\mathfrak{G}^{(\perp)} = (\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{G}))^{(\perp)} = (\overline{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{G})})^{(\perp)}$;
4. $\mathfrak{G}^{(\perp)(\perp)} = \overline{\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{G})}$;
5. $(e^{i\varphi}\mathfrak{G})^{(\perp)} = e^{i\varphi}\mathfrak{G}^{(\perp)}, \ \varphi \in \mathbb{R}$.

Здесь $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$-произвольные множества в $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ $\mathbb{R}$-подпространства в $\mathfrak{H}$, причём, $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_2$. $\mathbb{R}$-подпространство вида

$$\mathfrak{H}_2(-)\mathfrak{H}_1 := \{g \in \mathfrak{H}_2 \mid g(\perp)\mathfrak{H}_1\}$$

называется *ортогональной разностью подпространств* $\mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{H}_1$.

Если $\mathfrak{L}$ — $\mathbb{R}$-подпространство и $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}(+)\mathfrak{L}^{(\perp)}$ — $\mathbb{R}$-ортогональное разложение, то произвольный вектор $h \in \mathfrak{H}$ единственным образом представим в виде $h = l + w$, где $l \in \mathfrak{L}$, $w \in \mathfrak{L}^{(\perp)}$ (теорема о проекции). Оператор $P : \mathfrak{H} \to \mathfrak{L}$, определяемый равенством $Ph := l$, называется *(аддитивным) ортопроектором на* $\mathbb{R}$*-подпространство* $\mathfrak{L}$.

Вышеприведённые в этом пункте определения, свойства и предложения, подробно изложены в работе [5].

Кроме того, имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{H}_1$ *и* $\mathfrak{H}_2$ — $\mathbb{R}$*-подпространства в* $\mathfrak{H}$*, причём,* $\dim[\mathfrak{H}_2;\mathbb{R}] > \dim[\mathfrak{H}_1;\mathbb{R}]$. *Тогда* $\mathfrak{H}_2 \cap \mathfrak{H}_1^{(\perp)} \neq \{\theta\}$.

Доказательство. Пусть, вначале, $\mathfrak{H}_2 \supset \mathfrak{H}_1$. Тогда $\mathfrak{H}_2 \cap \mathfrak{H}_1^{(\perp)} = \mathfrak{H}_2(-)\mathfrak{H}_1 \neq \{\theta\}$.

Пусть теперь $\mathfrak{H}_1$ не содержится в $\mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{H}_2 \cap \mathfrak{H}_1^{(\perp)} = \{\theta\}$. Обозначим через $P_1 : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_1$ аддитивный ортопроектор. Оператор $T := P_1|_{\mathfrak{H}_2}$ обратим, так как, $\ker T = \mathfrak{H}_2 \cap \mathfrak{H}_1^{(\perp)}$. Отсюда

$$\dim[\mathfrak{H}_2;\mathbb{R}] = \dim[T\mathfrak{H}_2;\mathbb{R}] \leq \dim[\mathfrak{H}_1;\mathbb{R}] \ -$$

противоречие. □

Следствие 1. *Если* $\mathfrak{H}_1$ *и* $\mathfrak{H}_2$ – $\mathbb{R}$*-подпространства ГП* $\mathfrak{H}$*, и*

$$\mathfrak{H}_2 \cap \mathfrak{H}_1^{(\perp)} = \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2^{(\perp)} = \{\theta\}, \quad \text{\textit{то}} \quad \dim[\mathfrak{H}_2;\mathbb{R}] = \dim[\mathfrak{H}_1;\mathbb{R}].$$

2.2. Кососимметрические и кососамосопряжённые антилинейные операторы

Определение 1. Антилинейный оператор $S : \mathrm{dom}(S) \to \mathrm{ran}(S)$ называется *кососимметрическим*, если $\overline{\mathrm{dom}(S)} = \mathfrak{H}$ и

$$\forall x, y \in \mathrm{dom}(S) \quad (Sx, y) = -(Sy, x).$$

Кососимметрический оператор S называется *кососамосопряжённым*, если $S^* = -S$, *существенно кососамосопряжённым*, если оператор $\overline{S}$-кососамосопряжён.

Из определения следует, что плотно заданный антилинейный оператор кососимметричен тогда и только тогда, когда $(Sx, x) = 0 \ \forall x \in \mathrm{dom}(S)$.

Теорема 1. *Пусть S — кососимметрический оператор. Следующие условия эквивалентны:*

1. *S – кососамосопряжён;*
2. *S – замкнут и* $\ker(S^* - I) = \{\theta\}$*;*
3. *$ran(S + I) = \mathfrak{H}$.*

Доказательство. Если S кососамосопряжён, то S замкнут и $\ker(S^* - I) = = \ker(S + I) = \{\theta\}$.

Пусть S замкнут и $\ker(S^* - I) = \{\theta\}$, тогда $\mathfrak{H} = \overline{\mathrm{ran}(S + I)} = \mathrm{ran}(S + I)$.

Предположим, что выполнено условие $\mathfrak{H} = \mathrm{ran}(S + I)$, тогда $\ker(S^* - I) = \{\theta\}$. Отсюда для любого $y \in \mathrm{dom}(S^*)$ найдётся вектор $w \in \mathrm{dom}(S)$, что $S^*y - y = - (Sw + w)$. Последнее означает, что $S^*(y - w) = y - w$, то есть $y - w \in \ker(S^* - I)$. Следовательно, $y = w \in \mathrm{dom}(S)$, и $S^*y = -Sy$. □

Следствие 2. *Пусть S-кососимметрический оператор. Следующие условия эквивалентны:*

1. *S- существенно кососамосопряжён;*
2. $\ker(S^* - I) = \{\theta\}$*;*
3. *$\overline{ran(S + I)} = \mathfrak{H}$.*

Определение 2. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярной точкой* антилинейного оператора G, если оператор $(G - \lambda I)^{-1}$ существует, плотно задан и ограничен.

Определение 3. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *точкой регулярного типа* антилинейного оператора G, если

$$\exists\, C > 0 : \ \forall x \in \mathrm{dom}(G) \ \ \|Gx - \lambda x\| \geq C\|x\|.$$

Через $\widehat{\rho}(G)$ и $\rho(G)$ будем обозначать, соответственно, множества точек регулярного типа и регулярных точек оператора G. Так же как и в линейном случае, множества $\widehat{\rho}(G)$ и $\rho(G)$ открыты и $\rho(G) \subseteq \widehat{\rho}(G)$.

Определение 4. Пусть S-замкнутый, плотно заданный антилинейный оператор, $\lambda \in \hat{\rho}(S)$. $\mathbb{R}$-подпространство вида

$$\mathfrak{N}_\lambda := (\operatorname{ran}(S - \lambda I))^{(\perp)}$$

называется *дефектным подпространством* оператора S.

Рассмотрим основные свойства кососимметрических антилинейных операторов. В дальнейшем все рассматриваемые операторы будем считать антилинейными.

Введём следующее обозначение

$$\mathbb{T}_{|\mu|} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |\mu|\}.$$

Лемма 2. *Пусть S-кососимметрический оператор. Тогда*

1. $(\lambda \neq 0) \wedge (\lambda \in \hat{\rho}(S)) \Longrightarrow (\mathbb{T}_{|\lambda|} \subset \hat{\rho}(S))$;
2. $(\lambda \neq 0) \wedge (\mu \in \mathbb{T}_{|\lambda|}) \Longrightarrow (\mathfrak{N}_\mu = e^{i\frac{\arg\lambda - \arg\mu}{2}}\mathfrak{N}_\lambda)$, *в частности,* $\mathfrak{N}_{-1} = i\mathfrak{N}_1$;
3. $(\lambda \neq 0) \wedge (\mu \in \mathbb{T}_{|\lambda|}) \Longrightarrow \dim[\mathfrak{N}_\mu; \mathbb{R}] = \dim[\mathfrak{N}_\lambda; \mathbb{R}]$;
4. $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subseteq \sigma_r(S)$.

Доказательство. 1. Пусть $\lambda = e^{i\varphi}|\lambda| \in \hat{\rho}(S)$ и $|\mu| = |\lambda|$, $\mu = e^{i\psi}|\lambda|$, $x \in \operatorname{dom}(S)$. Тогда

$$\| (S-\mu I)e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}}x \| = \| (S-e^{i\psi}|\lambda|I)e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}}x \| = \| e^{i\frac{\psi-\varphi}{2}}(S-e^{i\varphi}|\lambda|I)x \| = \| (S-\lambda I)x \| .$$

2. Пусть $x \in \operatorname{dom}(S)$, $n_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$ – произвольные векторы. Используя обозначения, вычисления из доказательства предыдущего пункта и свойство 5 отношения $\mathbb{R}$-ортогональности, получаем:

$$0 = \operatorname{Re}(Sx - \lambda x, n_\lambda) = \operatorname{Re}(e^{i\frac{\psi-\varphi}{2}}(Sx-\lambda x), e^{i\frac{\psi-\varphi}{2}}n_\lambda) = \operatorname{Re}((S-\mu I)e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}}x, e^{i\frac{\psi-\varphi}{2}}n_\lambda).$$

Отсюда имеет место включение $e^{i\frac{\psi-\varphi}{2}}\mathfrak{N}_\lambda \subseteq \mathfrak{N}_\mu$. Так как λ и μ – произвольные, то равенство из п. 2 доказано.

$\square$

Замечание 1. Первое предложение доказанной леммы будем называть *принципом окружности.*

Лемма 3. *Пусть S -замкнутый оператор и $\mathbb{T}_{|\lambda_0|} \subset \hat{\rho}(S)$. Тогда существует достаточно малая ε-окрестность ($\varepsilon > 0$) множества $\mathbb{T}_{|\lambda_0|}$ — кольцо*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\lambda_0| - \varepsilon < |z| < |\lambda_0| + \varepsilon\},$$

внутри которого $\mathbb{R}$-размерности дефектных подпространств $\mathfrak{N}_\lambda$ оператора S не зависят от λ_0.

Доказательство. В силу принципа окружности достаточно рассмотреть случай одной точки λ_0. Пусть $\lambda_0 \in \hat{\rho}(S)$, тогда найдётся такое число $k(\lambda_0) > 0$, что

$$\| (S - \lambda_0 I)x \| \geq k(\lambda_0) \| x \| . \tag{2.1}$$

Так как $\hat{\rho}(S)$ открыто, то некоторая ε-окрестность точки λ_0 содержится в $\hat{\rho}(S)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\varepsilon < k(\lambda_0)$. Пусть $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. Предположим, что $g \in \mathfrak{N}_\lambda \cap \mathfrak{N}_{\lambda_0}^{(\perp)}$ и $g \neq \theta$. Тогда $g \in \mathfrak{N}_\lambda$ и $g = (S - \lambda_0 I)x$ при некотором $x \in \mathrm{dom}(S)$. Так как $g = (S - \lambda I)x + (\lambda - \lambda_0)x$, где $g(\perp)(S - \lambda I)x$, то в силу неравенства (2.1)

$$|\lambda - \lambda_0|^2 \| x \|^2 = \| g - (S - \lambda I)x \|^2 = \| g \|^2 + \| (S - \lambda I)x \|^2 \geq (k^2(\lambda_0) + k^2(\lambda)) \| x \|^2 .$$

Поскольку $x \neq \theta$, то приходим к противоречивому неравенству

$$|\lambda - \lambda_0|^2 \geq k^2(\lambda_0) + k^2(\lambda).$$

Из следствия 1 $\dim[\mathfrak{N}_\lambda; \mathbb{R}] = \dim[\mathfrak{N}_{\lambda_0}; \mathbb{R}]$. □

Теорема 2. *На множестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ размерность дефектных подпространств $\mathfrak{N}_\lambda$ замкнутого кососимметрического оператора S не зависит от λ.*

Доказательство. Пусть λ – ненулевое вещественное число. Для любого $x \in \mathrm{dom}(S)$

$$\| Sx - \lambda x \|^2 = \| Sx \|^2 - 2\lambda(Sx, x) + \lambda^2 \| x \|^2 \geq \lambda^2 \| x \|^2,$$

откуда следует, что $\lambda \in \hat{\rho}(S)$. Выбирая теперь произвольные две различные ненулевые комплексные точки ν, μ и соединяя их отрезком или ломаной, с помощью леммы 3 получаем бесконечное покрытие полученного компакта открытыми множествами, в каждом из которых наблюдается равенство размерностей дефектных подпространств $\mathfrak{N}_\nu$ и $\mathfrak{N}_\mu$. Доказательство заканчивается переходом к конечному подпокрытию. □

Замечание 2. В том случае, если $0 \in \hat{\rho}(S)$, то имеет место равенство размерностей дефектных подпространств во всей комплексной плоскости. При этом $0 \overline{\in} \rho(S)$.

Пусть S – кососимметрический оператор, а $\mathfrak{N}_\lambda$ ($\lambda \neq 0$) – его дефектное подпространство. Рассмотрим число $n_\lambda := \dim[\mathfrak{N}_\lambda; \mathbb{R}]$. В силу доказанной теоремы $\dim[\mathfrak{N}_\lambda; \mathbb{R}] = \dim[\mathfrak{N}_1; \mathbb{R}]$. Число n_1 в дальнейшем будем называть *дефектным числом* оператора S.

3. Расширения кососимметрических антилинейных операторов

3.1. Аналоги формул фон Неймана для кососимметрических антилинейных операторов

Теорема 3. *Пусть S — замкнутый, кососимметрический оператор. Тогда $\mathbb{R}$-линеалы* $\mathrm{dom}\,(S)$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_{-1}$ *$\mathbb{R}$-линейно независимы и имеют место формулы*

$$dom(S^*) = dom(S) \dotplus \mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_{-1}, \quad S^*(x_0 + n_1 + n_{-1}) = -Sx_0 + n_1 - n_{-1}.$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in \mathrm{dom}(S)$, $n_{\pm 1} \in \mathfrak{N}_{\pm 1}$. Рассмотрим уравнение

$$x_0 + n_1 + n_{-1} = \theta. \tag{3.1}$$

Применим к обеим частям (3.1) оператор S^* с учётом равенств $S^*x_0 = -Sx_0$, $S^*n_{\pm 1} = \pm n_{\pm 1}$:

$$-Sx_0 + n_1 - n_{-1} = \theta. \tag{3.2}$$

Сложив (3.1) и (3.2) почленно, получим

$$-(S - I)x_0 + 2n_1 = \theta \ ,$$

откуда $(S - I)x_0 = n_1 = \theta$ в силу ортогональности слагаемых. Следовательно, $x_0 = n_{\pm 1} = \theta$ и $\mathbb{R}$-линейная независимость линеалов $\mathrm{dom}(S)$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_{-1}$ доказана.

Для доказательства теоремы осталось убедиться в справедливости следующего включения

$$\mathrm{dom}(S^*) \subseteq \mathrm{dom}(S) \dotplus \mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_{-1} \ .$$

Пусть $x \in \mathrm{dom}(S^*)$ и $y = -(S^* + I)x$. Так как S замкнут, то

$$\mathfrak{H} = \mathrm{ran}(S - I) \ (+) \ \mathfrak{N}_1 \ ,$$

и

$$y = y_0 + y_1 = (S - I)x_0 + y_1 = -(S^* + I)x_0 + y_1 \ ,$$

где $x_0 \in \mathrm{dom}(S)$, $y_1 \in \mathfrak{N}_1$. Рассмотрим вектор $x_1 = -\frac{1}{2}y_1$. Тогда $y_1 = -2x_1 = -\,(S^* + I)x_1$. Отсюда

$$-(S^* + I)x = -(S^* + I)x_0 - (S^* + I)x_1 = -(S^* + I)(x_0 + x_1) \ ,$$

и

$$(S^* + I)(x - x_0 - x_1) = \theta \ .$$

Таким образом,

$$x - x_0 - x_1 \in \mathfrak{N}_{-1} \quad \text{и} \quad x = x_0 + x_1 + x_{-1} \in \mathrm{dom}(S) \dotplus \mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_{-1} \ .$$

Теорема доказана. □

Следствие 3. *Замкнутый кососиметрический оператор является кососамосопряжённым тогда и только тогда, когда его дефектное число равно нулю.*

Следствие 4. *Линеал* $\widehat{\mathfrak{N}} := \mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_{-1}$ *является* $\mathbb{C}$*-подпространством.*

Пусть $\widetilde{S}$ – произвольное кососимметрическое расширение кососимметрического оператора S, то есть, $S \subset \widetilde{S}$. Так как $S \subset -S^*$ и $\widetilde{S} \subset -\widetilde{S}^*$, то имеют место следующие включения:

$$S \subset \widetilde{S} \subset -\widetilde{S}^* \subset -S^*. \tag{3.3}$$

Пусть $x, y \in \mathrm{dom}(\widetilde{S})$. По теореме 3 и из включений (3.3)

$$x = x_0 + n_1 + n_{-1}, \quad \widetilde{S}x = Sx_0 - n_1 + n_{-1}. \tag{3.4}$$

Так как оператор $\widetilde{S}$ кососимметричен, то имеет место следующая цепочка равенств:

$$0 = (\widetilde{S}x, x) = (Sx_0 - n_1 + n_{-1}, x_0 + n_1 + n_{-1}) = (Sx_0, n_1 + n_{-1}) - (n_1 - n_{-1}, x_0) -$$
$$\| n_1 \|^2 - 2i\mathrm{Im}(n_1, n_{-1}) + \| n_{-1} \|^2 = - \| n_1 \|^2 - 2i\mathrm{Im}(n_1, n_{-1}) + \| n_{-1} \|^2 .$$

Последнее равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} \| n_1 \| = \| n_{-1} \| \\ \mathrm{Im}(n_1, n_{-1}) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Поскольку первое из равенств (3.4) является однозначным представлением вектора $x \in \mathrm{dom}(\widetilde{S})$, то можно рассмотреть аддитивные операторы $\Gamma_\pm : \mathrm{dom}(\widetilde{S}) \to \mathfrak{N}_{\pm 1}$, определяемые равенствами $\Gamma_\pm x := n_\pm$. По определению $\mathrm{ran}(\Gamma_\pm)$ – линеалы в $\mathfrak{N}_{\pm 1}$. Рассмотрим теперь оператор $\Phi : \mathrm{ran}(\Gamma_+) \to \mathrm{ran}(\Gamma_-)$, действующий по формуле $\Phi n_+ := n_-$, где векторы $n_\pm$ связаны между собой первым равенством из (3.4). Из системы (3.5) тогда следует, что Φ-аддитивный изометрический оператор из $\mathrm{ran}(\Gamma_+) = \mathrm{dom}(\Phi)$ на $\mathrm{ran}(\Gamma_-) = \mathrm{ran}(\Phi)$ и для любого вектора $n_1 \in \mathrm{dom}(\Phi)$ $(\Phi n_1, n_1) \in \mathbb{R}$, и $\dim\, [\mathrm{dom}(\Phi); \mathbb{R}] = \dim\, [\mathrm{ran}(\Phi); \mathbb{R}]$.

Обратно, предположим, что существует аддитивная изометрия $\Phi : \mathrm{dom}(\Phi) \to \mathrm{ran}(\Phi)$ $(\mathrm{dom}(\Phi) \subseteq \mathfrak{N}_1,\ \mathrm{ran}(\Phi) \subseteq \mathfrak{N}_{-1})$, такая что:

1. $\dim\, [\mathrm{dom}(\Phi); \mathbb{R}] = \dim\, [\mathrm{ran}(\Phi); \mathbb{R}]$;
2. для любого $n_1 \in \mathrm{dom}(\Phi)$ $(\Phi n_1, n_1) \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим оператор $\widetilde{S}_\Phi$, который определяется равенствами:

$$\mathrm{dom}(\widetilde{S}_\Phi) \ni x = x_0 + n_1 + \Phi n_1, \quad \widetilde{S}_\Phi(x_0 + n_1 + \Phi n_1) := Sx - n_1 + \Phi n_1.$$

Тогда для любого вектора из $\mathrm{dom}(\widetilde{S}_\Phi)$ имеем:

$$(\widetilde{S}_\Phi x, x) = (Sx_0 - n_1 + \Phi n_1, x_0 + n_1 + \Phi n_1) = (Sx_0, n_1 + \Phi n_1) - (n_1 - \Phi n_1, x_0) -$$
$$\| n_1 \|^2 - (n_1, \Phi n_1) + (\Phi n_1, n_1) + \| \Phi n_1 \|^2 = 0.$$

Следовательно, оператор $\widetilde{S}_\Phi$ является кососимметрическим расширением оператора S. Таким образом доказана

Теорема 4. *Пусть S замкнутый, кососимметрический оператор. Кососимметрический оператор $\widetilde{S}$ является замкнутым расширением оператора S тогда и только тогда, когда существует аддитивная изометрия $\Phi : dom(\Phi) \to ran(\Phi)$ $(dom(\Phi) \subseteq \mathfrak{N}_1,\ ran(\Phi) \subseteq \mathfrak{N}_{-1})$, такая что:*

1. $\dim\,[dom(\Phi);\mathbb{R}] = \dim\,[ran(\Phi);\mathbb{R}]$;
2. *для любого $n_1 \in dom(\Phi)$ $(\Phi n_1, n_1) \in \mathbb{R}$.*
   Если эти условия выполнены, то справедливы следующие формулы:

$$dom(\widetilde{S}) = dom(S) \dot{+} dom(\Phi) \dot{+} ran(\Phi)\ ,$$

$$\widetilde{S}(x_0 + n_1 + \Phi n_1) = Sx_0 - n_1 + \Phi n_1. \tag{3.6}$$

Лемма 4. *Пусть S – замкнутый кососимметрический оператор с дефектными подпространствами $\mathfrak{N}_{\pm 1}$, $\widetilde{S}_\Phi$-кососимметрическое замкнутое расширение этого оператора. Тогда $\mathfrak{N}_1(-)dom(\Phi)$, $\mathfrak{N}_{-1}(-)ran(\Phi)$ – дефектные подпространства оператора $\widetilde{S}_\Phi$.*

Доказательство. Используя равенство (3.6), получим:

$$(\widetilde{S}_\Phi - I)x = (S - I)x_0 - 2n_1 \in \mathrm{ran}(S - I)(+)\mathrm{dom}(\Phi).$$

Наоборот, если $y \in \mathrm{ran}(S - I)(+)\mathrm{dom}(\Phi)$, то $y = (\widetilde{S}_\Phi - I)\widetilde{x}$, где $\widetilde{x} \in \mathrm{dom}(\widetilde{S}_\Phi)$. Отсюда имеет место равенство

$$\mathrm{ran}(\widetilde{S}_\Phi - I) = \mathrm{ran}(S - I)(+)\mathrm{dom}(\Phi).$$

Найдём дефектное подпространство оператора $\widetilde{S}_\Phi$:

$$\mathfrak{N}_1(\widetilde{S}_\Phi) = (\mathrm{ran}(\widetilde{S}_\Phi - I))^{(\perp)} = \mathfrak{N}_1(-)\mathrm{dom}(\Phi).$$

Аналогично доказывается второе равенство. □

3.2. Аккретивные собственные расширения антилинейных кососимметрических операторов

Определение 5. Оператор $\widetilde{S}$ называется *собственным расширением* кососимметрического оператора S, если $S \subset \widetilde{S} \subset -S^*$.

Определение 6. Плотно заданный оператор S называется *аккретивным*, если

$$\forall x \in \mathrm{dom}(S)\ \ \mathrm{Re}(Sx, x) \geq 0. \tag{3.7}$$

Из определения следует, что (3.7) эквивалентно условию $\forall x \in \mathrm{dom}(S)$ $\mathrm{Im}(Sx,x) \geq 0$. Действительно, обозначим через ω квадратный корень из $-i$. Тогда $\mathrm{Im}(Sx,x) = \mathrm{Re}[-i(Sx,x)] = \mathrm{Re}[(S\overline{\omega}x, \overline{\omega}x)] \geq 0$.

Пусть $\widetilde{S}$ – аккретивное собственное расширение кососимметрического оператора S . Тогда должно выполняться следующее условие:

$$0 \leq \mathrm{Re}(\widetilde{S}x,x) = (Sx_0 - n_1 + n_{-1}, x_0 + n_1 + n_{-1}) = - \parallel n_1 \parallel^2 + \parallel n_{-1} \parallel^2 \ \ \forall x \in \mathrm{dom}(\widetilde{S}).$$

Отсюда следует, что отображение Φ, определённое в предыдущем пункте, должно удовлетворять неравенству $\parallel \Phi n_1 \parallel \geq \parallel n_1 \parallel$ $\forall n_1 \in \mathrm{dom}(\Phi)$, то есть Φ является несжимающим оператором.

Обратно, рассмотрим оператор $\widetilde{S}_\Phi$, заданный равенством $\widetilde{S}_\Phi(x_0+n_1+\Phi n_1) := Sx_0 - n_1 + \Phi n_1$, где $\Phi : \mathrm{dom}(\Phi) \to \mathrm{ran}(\Phi)$ – несжимающий оператор. Тогда, как легко проверить, $\mathrm{Re}(\widetilde{S}_\Phi(x_0+n_1+\Phi n_1), x_0+n_1+\Phi n_1) \geq 0$. Таким образом, доказана

Теорема 5. *Пусть S - замкнутый, кососимметрический оператор. Замкнутый оператор $\widetilde{S}$, определённый равенством*

$$\widetilde{S}(x_0 + n_1 + \Phi n_1) := Sx_0 - n_1 + \Phi n_1 \ , \tag{3.8}$$

является собственым аккретивным расширением оператора S тогда и только тогда, когда аддитивный оператор $\Phi : dom(\Phi) \to ran(\Phi)$ $(dom(\Phi) \subseteq \mathfrak{N}_1,\ ran(\Phi) \subseteq \mathfrak{N}_{-1})$ таков, что $\parallel \Phi \parallel \geq 1$. Все собственные аккретивные расширения оператора S задаются равенствами (3.8) с несжимающими операторами Φ.

3.3. Примеры

Пример 1. В пространстве $L_2[a,b]$ рассмотрим кососимметрический оператор S определяемый следующим образом:

$$\mathrm{dom}(S) := \{x(t) \in AC[a,b] \mid x'(t) \in L_2[a,b],\ x(a) = x(b) = 0\ \},\ (Sx)(t) := \overline{x}'(t),$$

Найдём дефектные подпространства оператора S. Для этого рассмотрим уравнения $\overline{x'} = \pm x$. Положим $x = u + iv$, где u, v–вещественнозначные функции. Приходим тогда к эквивалентным системам:

$$\begin{cases} u' = u \\ v' = \quad -v, \end{cases} \qquad \begin{cases} u' = -u \\ v' = \qquad v. \end{cases}$$

Дефектные подпространства заданного оператора определяются равенствами:

$$\mathfrak{N}_1 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\sqrt{2}e^t}{\sqrt{e^{2b}-e^{2a}}}\right\}(+)\ \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\sqrt{2}ie^{-t}}{\sqrt{e^{-2a}-e^{-2b}}}\right\},$$

$$\mathfrak{N}_{-1} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\sqrt{2}e^{-t}}{\sqrt{e^{-2a}-e^{-2b}}}\right\}(+)\ \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\sqrt{2}ie^{t}}{\sqrt{\sqrt{e^{2b}-e^{2a}}}}\right\}.$$

Таким образом, индекс дефекта заданного оператора $n_1 = 2$.

Оператор Φ, с помощью которого строится кососамосопряжённое расширение оператора S, определим, задав операторы Φ_1 и Φ_2:

$$\Phi_1\left(\alpha\frac{\sqrt{2}e^t}{\sqrt{e^{2b}-e^{2a}}}\right) := \gamma\alpha\frac{\sqrt{2}e^{-t}}{\sqrt{e^{-2a}-e^{-2b}}}, \Phi_2\left(\beta\frac{\sqrt{2}ie^{-t}}{\sqrt{e^{-2a}-e^{-2b}}}\right) := \delta\beta\frac{\sqrt{2}ie^t}{\sqrt{e^{2b}-e^{2a}}},$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \{-1, 1\}, \delta \in \{-1, 1\}$. Положим $\Phi := \Phi_1(+)\Phi_2$,

$$e_{11}(t) := \frac{\sqrt{2}e^t}{\sqrt{e^{2b}-e^{2a}}}, e_{12}(t) := \frac{\sqrt{2}ie^{-t}}{\sqrt{e^{-2a}-e^{-2b}}}, e_{21}(t) := -ie_{12}(t), e_{22}(t) := ie_{11}(t).$$

Поскольку векторы e_{11}, e_{12}, а также e_{21}, e_{22}, порождающие дефектные подпространства $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_{-1}$ оператора S, соответственно, образуют $\mathbb{R}$-ортонормированные базисы этих подпространств, то для любых действительных чисел α и β

$$\begin{aligned}(\Phi(\alpha e_{11} + \beta e_{12}), \alpha e_{11} + \beta e_{12}) = (\gamma\alpha e_{21} + \delta\beta e_{22}, \alpha e_{11} + \beta e_{12}) = \\ = \gamma\alpha^2(e_{21}, e_{11}) + \delta\beta^2(e_{22}, e_{12}) \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

По теореме 4 оператор S можно расширить до кососамосопряжённого. Меняя параметры γ и δ в указанных ранее пределах, получаем четыре различных кососамосопряжённых расширения оператора S.

Пример 2. Рассмотрим теперь кососимметрический оператор S в пространстве $L_2[0, +\infty)$, определяемый равенствами:

$$\mathrm{dom}(S) := \{x(t) \in \widetilde{AC}[0, +\infty) | x(0) = 0\}, (Sx)(t) := \overline{x}'(t),$$

где $\widetilde{AC}[0, +\infty)$ обозначает множество всех абсолютно непрерывных в каждой конечной части $(0, +\infty)$ функций и принадлежащих $L_2[0, +\infty)$, вместе с $x'(t)$.

Дефектные подпространства оператора S имеют следующий вид

$$\mathfrak{N}_1 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\sqrt{2}ie^{-t}\right\}, \quad \mathfrak{N}_{-1} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\sqrt{2}e^{-t}\right\}.$$

Индекс дефекта данного оператора $n_1 = 1$.

Из теоремы 4 вытекает, что оператор S не имеет кососамосопряжённых расширений.

Пример 3. Рассмотрим кососимметрический оператор S и операторы Φ_1, Φ_2 из примера 1, где $|\gamma| \geq 1$ и $|\delta| \geq 1$. Для любых действительных α и β

$$\| \Phi(\alpha e_{11} + \beta e_{12}) \|^2 = \| \gamma\alpha e_{21} + \delta\beta e_{22} \|^2 = \gamma^2\alpha^2 + \delta^2\beta^2 \geq \| \alpha e_{11} + \beta e_{12} \|^2 .$$

С помощью теоремы 5 устанавливаем, что кососимметрический оператор S обладает бесконечным множеством собственных аккретивных расширений.

4. Заключение

В настоящей работе изучаются кососимметрические антилинейные операторы и их расширения. Доказаны: принцип окружности для поля регулярности, равенство размерностей различных дефектных подпространств, аналоги первой и второй формул фон Неймана, а также получены описания собственных аккретивных расширений кососимметрических операторов.

Список цитируемых источников

1. *Ахиезер И.Ц.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, / Глазман С.Г., т.2. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
2. *Брателли У.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. / Робинсон Д., —М.:Мир, 1982. —511 с.
3. *Вигнер Е.* Теория групп и её приложение к квантовомеханической теории атомных спектров. —М.: ИЛ, 1961. —444 с.
4. *Третьяков Д.В.* О классификации спектра аддитивных операторов // Динамические системы. — 1994. — Вып. 13. — С. 123–127.
5. *Третьяков Д.В.* Об одном отношении ортогональности в гильбертовом пространстве и некоторых свойствах аддитивных операторов // Учёные записки ТНУ им. В.И. Вернадского. — 2004. —Т. 17(56), № 1. Математика, механика, информатика и кибернетика. С. 83-94.
6. *Sharma C.S.* Semilinear operators / Almeyda D.F.,// J.Math.Phys. —1988. —v.29. —n.11. —pp.2411-2420.
7. *Takesaki M.* Theory of Operators Algebras II. Encyclopedia of Mathematical Sciences — Los Angeles.:Springer, 2000. —518 p.

Получена 10.11.2009