Динамические системы, том 2(30), No. 3-4, 337–346

УДК 517.52+517.584

О значениях числовых рядов, порождённых некоторыми рекуррентными соотношениями 2-го порядка и специальными функциями

Н. С. Пода, Д. В. Третьяков

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail:dvttvd@mail.ru*

Аннотация. В настоящей работе получены формулы для вычисления числовых рядов, которые порождены линейными рекуррентными соотношениями второго порядка и специальными функциями. В частности, при некоторых значениях входящих в формулы параметров установлены разложения в указанные ряды некоторых известных констант.

Ключевые слова: числовые ряды, рекуррентные последовательности второго порядка, функции Бесселя.

1. Постановка задачи

В известном сборнике задач «Избранные задачи из журнала American mathematical monthly» [4] приведены доказательства следующих формул:

1) N. Anning (стр. 20-21)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}(u_n^2) = \frac{\pi}{12},$$
где $\{u_n\}$ — последовательность, которая задаётся следующими равенствами $u_1 = 2$, $u_2 = 8$, $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$, $n \geq 3$;

2) A. C. Aitken (стр. 26)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}(2v_{n+1}^2) = \frac{\pi}{6},$$
где последовательность $\{v_n\}$ определяется так: $v_1 = 1$, $v_2 = 1$, $v_r = 4v_{r-1} - v_{r-2}$, $r \geq 3$;

3) D. H. Lehmer (стр. 44-45)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}(F_{2n+1}) = \frac{\pi}{4},$$
где $\{F_{2n+1}\}$ — последовательность чисел Фибоначчи с нечётными индексами.

В работе рассматривается задача обобщения этих формул для произвольных рекуррентных последовательностей второго порядка общего вида с постоянными коэффициентами с общими начальными условиями и при их отсутствии. Рассмотрена также задача вычисления, не встречавшихся ранее в специальной литературе, числовых рядов вида

$$\sum_{s=0}^{\infty}(2as+b)I_{2s+1+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right), \qquad \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2as+b)J_{2s+1+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right),$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя I рода, $I_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя I рода [2], элементы которых также удовлетворяют некоторым рекуррентным уравнениям 2-го порядка с переменным коэффициентом.

2. Числовые ряды, порождённые обратными тригонометрическими функциями и линейными рекуррентными уравнениями 2-го порядка

1. Рассмотрим рекуррентную последовательность $\{u_n\}$, определяемую равенствами

$$u_1 = \xi,\ u_2 = a\xi,\ u_n = au_{n-1} - bu_{n-2} \tag{2.1}$$

где $a > 0$, $b > 0$, $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — фиксированные числа, $D = b^2 - 4ac \geq 0$.

Имеет место

Лемма 1. *Элементы последовательности $\{u_n\}$ удовлетворяют следующим соотношениям*

$$u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = b^{n-1}\xi^2,\ n \geq 2 \tag{2.2}$$

Доказательство. Действительно, используя (2.1), получим:

$$\begin{gathered} u_n(au_{n-1}) = (au_n)u_{n-1}, \quad u_n(u_n + bu_{n-2}) = (u_{n+1} + bu_{n-1})u_{n-1}, \\ u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = b(u_{n-1}^2 - u_nu_{n-2}) = b^2(u_{n-2}^2 - u_{n-1}u_{n-3}) = \ldots = \\ = b^{n-2}(u_2^2 - u_3u_1) = b^{n-2}(a^2\xi^2 - (a^2 - b)\xi^2) = b^{n-1}\xi^2. \end{gathered}$$

□

Обоснуем следующее предложение

Теорема 1. *Справедлива формула*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcctg}\left(\frac{au_n^2}{\sqrt{b}b^{n-1}\xi^2}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2\sqrt{b}}\right). \tag{2.3}$$

Доказательство. Преобразуем с помощью (2.1) и известного тождества для арккотангенса

$$\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\left(\frac{xy+1}{y-x}\right)$$

общий элемент ряда:

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{au_n^2}{\sqrt{b}(b^{n-1}\xi^2)}\right) =$$

$$= \operatorname{arcctg}\left(\frac{u_n(u_{n+1}+bu_{n-1})}{\sqrt{b}(u_n^2-u_{n-1}u_{n+1})}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{u_{n+1}}{\sqrt{b}u_n}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{u_n}{\sqrt{b}u_{n-1}}\right). \tag{2.4}$$

Пусть индекс n в равенствах (2.4) принимает значения от 2 до r. Суммируя всё, получаем

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{au_1^2}{\sqrt{b}\xi^2}\right) + \sum_{n=2}^{r} \operatorname{arcctg}\left(\frac{au_n^2}{\sqrt{b}(b^{n-1}\xi^2)}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{u_{r+1}}{\sqrt{b}u_r}\right). \tag{2.5}$$

При $r \to \infty$ отношение $\dfrac{u_{r+1}}{u_r}$ стремится к большему корню квадратного уравнения $x^2 = ax - b$, то есть, к $\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$. Следовательно, переходя в (2.5) к указанному пределу, мы получаем равенство (2.3). □

Рассмотрим некоторые частные случаи доказанной теоремы.

Пример 1. Выберем в (2.3) коэффициенты следующим образом: $a = 4$, $b = 1$, $\xi = 2$. Тогда последовательность $\{u_n\}$ принимает вид $u_1 = 2$, $u_2 = 8$, $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$, $n \geq 3$. Подставляя значения a, b и ξ в (2.3), получаем что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}(u_n^2) = \operatorname{arcctg}\left(2+\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Отметим, что эта формула приведена в [4].

Пример 2. Пусть $a = 4$, $b = 4$, $\xi = 1$. Получаем следующую последовательность: $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$, $n \geq 3$. Выполним теперь подстановку значений a, b и ξ в (2.3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{2u_n^2}{4^{n-1}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 3. Если взять $a = 4$, $b = 2$, $\xi = 1$, то $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_n = 4u_{n-1} - 2u_{n-2}$, $n \geq 3$, и формула (2.3) принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{4u_n^2}{2^{n-1}\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arcctg}(\sqrt{2}+1) = \frac{\pi}{8}.$$

Пример 4. Положим $a = 4$, $b = 3$, $\xi = 2$. Тогда $u_1 = 2$, $u_2 = 8$, $u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2}$, $n \geq 3$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{{u_n}^2}{3^{n-1}\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

2. Рассмотрим теперь рекуррентную последовательность $\{v_n\}$, удовлетворяющую уравнению $v_n = av_{n-1} - bv_{n-2}$, $\quad n \geq 3$ без начальных условий. Здесь $a > 0$, $b > 0$ — фиксированные числа, $D = a^2 - 4b \geq 0$.
Аналогично доказывается

Лемма 2. *Элементы последовательности $\{v_n\}$ удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$v_n^2 - v_{n+1}v_{n-1} = b^{n-2}\Delta,\ n \geq 2,\ \text{где}\ \Delta = v_2^2 - v_3v_1. \tag{2.6}$$

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{av_{n+1}^2}{\sqrt{b}\cdot b^{n-1}\Delta}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2\sqrt{b}}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_2}{\sqrt{b}v_1}\right). \tag{2.7}$$

Доказательство. Выражение для общего элемента ряда из левой части (2.7) преобразуем следующим образом:

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{av_n^2}{\sqrt{b}\cdot b^{n-2}\Delta}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_n(v_{n+1}+bv_{n-1})}{\sqrt{b}(v_r^2 - v_{r-1}v_{r+1})}\right) =$$

$$= \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_{n+1}}{\sqrt{b}v_n}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_n}{\sqrt{b}v_{n-1}}\right). \tag{2.8}$$

Будем изменять индекс n в соотношении (2.8) в пределах от 2 до m и после этого просуммируем полученное:

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{v_2}{\sqrt{b}v_1}\right) + \sum_{n=2}^{m} \operatorname{arcctg}\left(\frac{av_{n+1}^2}{\sqrt{b}\cdot b^{n-1}\Delta}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_{m+1}}{\sqrt{b}v_m}\right) \tag{2.9}$$

При $m \to \infty$ отношение $\dfrac{v_{m+1}}{v_m}$ стремится к большему корню квадратного уравнения $x^2 = ax - b$. Следовательно, переходя в (2.9) к пределу, мы получаем формулу (2.7). □

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пример 5. При $v_1 = \xi$, $v_2 = a\xi$, $v_n = av_{n-1} - bv_{n-2}$ получаем равенство (2.3).

Пример 6. Пусть $a = 4, b = 1, v_1 = 1, v_2 = 1, v_r = 4v_{r-1} - v_{r-2}, r \geq 3$. Тогда $v_3 = 3, \Delta = -2$. Из теоремы 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}(2v_{n+1}^2) = \operatorname{arcctg} 1 - \operatorname{arcctg}\left(2+\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Отметим, что эта формула получена в [4].

Пример 7. $a = 4$, $b = 3$, $v_1 = 1$, $v_2 = 0$, $v_n = 4v_{n-1} - 3v_{n-2}$, $n \geq 3$. Отсюда $v_3 = -3$, $\Delta = 3$. Подставляя заданные и вычисленные коэффициенты, приходим к соотношению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{4v_{n+1}^2}{3^n\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Пример 8. Выберем теперь коэффициенты и начальные условия для последовательности так: $a = 6$, $b = 4$, $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_n = 6v_{n-1} - 4v_{n-2}$, $n \geq 3$. Тогда $v_3 = 8$, $\Delta = -4$. Подставляя вычисления в (2.7), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{3v_{n+1}^2}{2^{n+1}}\right) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arcctg}(1+\Phi),$$

где $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотая пропорция.

Пример 9. Пусть $a = 4$, $b = 2$, $v_1 = 1$, $v_2 = \sqrt{2}$, $v_n = 4u_{n-1} - 2u_{n-2}$, $n \geq 3$. Легко видеть, что $v_3 = 4\sqrt{2} - 2$, $\Delta = -4(\sqrt{2} - 1)$. Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_{n+1}^2}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\cdot 2^{n-1}}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

3. Рассмотрим рекуррентную последовательность $\{w_n\}$, удовлетворяющую уравнению $w_{n+2} = aw_{n+1} + bw_n$, где $a > 0$, $b > 0$ с одним начальным условием $w_0 = 0$.

Свойства данной последовательности содержит

Лемма 3. *Справедливы следующие равенства:*

$$w_{2n}w_{2n+1} - w_{2n-1}w_{2n+2} = -ab^{2n-1}w_1^2, n \in \mathbb{N}.$$

Имеет место также следующее предложение.

Теорема 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+1}}{aw_1b^{n-1}\sqrt{b}}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right). \tag{2.10}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой для разности арккотангенсов:

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n}}{w_1b^{n-1}\sqrt{b}}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+1}}{aw_1b^{n-1}\sqrt{b}}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n}w_{2n+1} + aw_1^2b^{2n-1}}{w_1b^{n-1}\sqrt{b}(w_{2n+1} - aw_{2n})}\right)$$

Используем теперь лемму 3 и определение последовательности $\{w_n\}$:

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n}}{w_1b^{n-1}\sqrt{b}}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+1}}{w_1ab^{n-1}\sqrt{b}}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+2}}{w_1b^n\sqrt{b}}\right). \tag{2.11}$$

Суммируя составляющие (2.11) формулы от 1 до $2m$, приходим к соотношению:

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_2}{w_1\sqrt{b}}\right)=\sum_{n=1}^{2m}\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+1}}{aw_1b^{n-1}\sqrt{b}}\right)+\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{4m+2}}{w_1b^{2m}\sqrt{b}}\right). \qquad (2.12)$$

При $m\to\infty$ правая часть соотношения (2.12) стремится к нулю. Отсюда получаем равенство (2.10). □

Рассмотрим примеры.

Пример 10. Пусть $a=b=1$, $w_1=1$. Тогда: $w_2=1$, $w_{n+1}=w_n+w_{n-1}$. Получаем известную [4] формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcctg}(F_{2n+1})=\frac{\pi}{4},$$

где $\{F_{2n+1}\}$ — последовательность чисел Фибоначчи с нечётными индексами.

Пример 11. Если взять $a=b=3$, $w_1=1$, то $w_2=3$, $w_{n+1}=3w_n+3w_{n-1}$ и формула (2.10) принимает следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+1}}{3^n\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Пример 12. При $a=1$, $b=3$, $w_1=2$, получаем, что $w_2=2$, $w_{n+1}=w_n+3w_{n-1}$ и частный случай теоремы 3:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+1}}{2\sqrt{3}\;3^{n-1}}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Формуле (2.10) ещё можно придать другой вид. Рассмотрим последовательность $\{h_n\}$, где $w_{2n+1}=h_{n+1}$. Тогда $w_1=h_1$, $w_2=aw_1=ah_1$, $w_3=h_2=(a^2+b)h_1$. Рекуррентное уравнение для новой последовательности пересчитывается следующим образом:

$$h_{n+3}=w_{2n+5}=aw_{2n+4}+bw_{2n+3}=a(aw_{2n+3}+bw_{2n+2})+bw_{2n+3}=$$

$$(a^2+2b)w_{2n+3}+abw_{2n+2}-bw_{2n+3}=(a^2+2b)w_{2n+3}-b^2w_{2n+1}=(a^2+2b)h_{n+2}-b^2h_{n+1}.$$

Следовательно, для последовательности $\{h_n\}$ получаем равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcctg}\left(\frac{h_{n+1}}{ah_1b^{n-1}\sqrt{b}}\right)=\operatorname{arcctg}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right).$$

Возвращаясь к примеру 10, получаем рекуррентное уравнение для последовательности Фибоначчи с нечётными индексами: $h_1=1$, $h_2=2$, $h_{n+1}=3h_{n+1}-h_{n-1}$ [4].

3. О значениях некоторых числовых рядов, связанных с функциями Бесселя.

В работе [5] найдено общее решение линейного рекуррентного уравнения $f_n - (an+b)f_{n+1} = f_{n+2}$, где $b \in \mathbf{Z}$, $a, a+b \in \mathbf{N}$:

$$f_n = C_1 I_{n+b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right) + C_2(-1)^n K_{n+b/a-1}\left(\frac{2}{a}\right),$$

где C_1, C_2 — произвольные константы, $I_v(x)$ — модифицированная функция Бесселя I рода, а $K_v(x)$ — модифицированная функция Бесселя III рода [1].

Теорема 4.

$$\sum_{s=0}^{\infty}(2as+b)I_{2s+1+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right) = I_{\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right), \tag{3.1}$$

где $b \in \boldsymbol{Z}$, $a, a+b \in \boldsymbol{N}$.

Доказательство. Воспользуемся рекуррентными формулами для функций Бесселя [3]:

$$I_{\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right) - I_{2+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right) = bI_{1+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right)$$

$$I_{2+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right) - I_{4+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right) = (2a+b)I_{3+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_{2n+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right) - I_{2n+2+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right) = (2an+b)I_{2n+1+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right)$$

и просуммируем их почленно:

$$I_{\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right) - I_{2n+2+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right) = \sum_{s=0}^{n}(2as+b)I_{2s+1+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right)$$

С помощью асимптотики функции Бесселя I_ν по индексу [6] приходим к выводу, что при $n \to \infty$ $I_{2n+2+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right) \to 0$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty}(2as+b)I_{2s+1+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right)$ сходится. Таким образом, получаем формулу (3.1). □

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 13. Пусть $a = 2, b = 3$. Тогда имеет место разложение:

$$\sum_{s=0}^{\infty}(4s+3)I_{2s+\frac{5}{2}}(1) = I_{\frac{3}{2}}(1).$$

По известной формуле [3]:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2x}}I_{\frac{3}{2}}(x) = -\frac{\operatorname{sh} x}{x^2} + \frac{\operatorname{ch} x}{x},$$

откуда:

$$\sum_{s=0}^{\infty}(4s+3)I_{2s+\frac{5}{2}}(1)=\frac{\sqrt{2}}{e\sqrt{\pi}}.$$

Пример 14. Пусть $a=2$, а $b=5$. Тогда

$$I_{\frac{5}{2}}(1)=\sum_{s=0}^{\infty}(4s+5)I_{2s+\frac{7}{2}}(1).$$

Так как [3]

$$\sqrt{\frac{\pi}{2x}}I_{\frac{5}{2}}(x)=\left(\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x}\right)\operatorname{sh}x-\frac{3}{x^2}\operatorname{ch}x,$$

то

$$\sum_{s=0}^{\infty}(4s+5)I_{2s+\frac{7}{2}}(1)=\frac{e-7e^{-1}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Рассмотрим теперь рекуррентное соотношение $f_n+f_{n+2}=(an+b)f_{n+1}$, которому удовлетворяет последовательность $\{J_{n+\frac{a}{b}}\left(\frac{2}{a}\right)|b\in\mathbf{Z}:a+b\in\mathbf{N}\}$ [5].

Аналогично рассуждая, получаем равенство:

$$J_{\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right)-J_{2n+2+\frac{2}{a}}\left(\frac{2}{a}\right)=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s(2sa+b)J_{2s+1+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right).$$

Используя асимптотику функции Бесселя $J_n(x)$ по индексу [7] приходим к выводу, что

$$\lim_{n\to\infty}J_{2n+2+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right)=0$$

и, следовательно, ряд

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2sa+b)J_{2s+1+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right)$$

сходится. Таким образом, доказана

Теорема 5.

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2as+b)J_{2s+1+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right)=J_{\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right),\tag{3.2}$$

где $b\in\boldsymbol{Z}$: $a,a+b\in\boldsymbol{N}$.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пример 15. Пусть $a=2$, а $b=3$. Подставим эти числа в (3.2):

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(4s+3)J_{2s+\frac{5}{2}}(1)=J_{\frac{3}{2}}(1).$$

Используя формулу для $J_{\frac{3}{2}}(x)$ [3]:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$$

после несложных преобразований найдём, что:

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(4s+3)J_{2s+\frac{5}{2}}(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

Пример 16. Выберем в (3.2) коэффициенты следующим образом: $a = 2$, $b = 5$. Тогда по теореме 5

$$\sum_{s=0}^{\infty}(4s+5)J_{2s+\frac{7}{2}}(1) = J_{\frac{5}{2}}(1).$$

Отсюда [3]:

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(4s+5)J_{2s+\frac{7}{2}}(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2\sin 1 - 3\cos 1).$$

В заключение отметим, что ряды

$$\sum_{s=0}^{\infty}(2as+b)K_{2s+1+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right), \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2as+b)Y_{2s+1+\frac{b}{a}}\left(\frac{2}{a}\right),$$

где $Y_\nu(x)$ — функция Бесселя II рода, $K_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя III рода, в силу асимптотик указанных функций по индексу [7] расходятся.

4. Заключение

Таким образом, в настоящей работе получены обобщения известных формул (N. Anning, A. C. Aitken, D. H. Lehmer [4]) для вычисления числовых рядов специального вида на основе предложенного здесь параметрического метода суммирования. Этот же метод использовался также для нахождения сумм рядов, порождённых функциями Бесселя I рода. Соответствующие ряды для функций Бесселя II и III рода расходятся. В качестве примеров рассмотрены различные частные случаи разложений некоторых констант.

Список цитируемых источников

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
2. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. т.2. — М.: Наука, 1974. — 295 с.
3. *Ватсон Дж.Н.* Теория Бесселевых функций. —М.:Издательство иностранной лит-ры, 1949. — 799 с.

4. Избранные задачи из журнала «American mathematical monthly» / под ред. В.М.Алексеева. — М.: Мир, 1977. —596 с.
5. *Третьяков Д.В.* Об иррациональностях, порожденных арифметическими прогрессиями //ТВИМ. — 2003. — №2. — С. 125–136.
6. *Olver F. W.J.* Asymptotics and Special Functions. — Welleslay, Massachusetts.:A K Peters 1997. — 547 p.
7. NIST Handbook of Mathematic Function / General Editor Lozier D.W. — NewYork:Cambridge University Press, 2010. — 967 p.

Получена 20.11.2012