

УДК 517.9

# Суперэллиптические и симплектические функции

**В.А. Темненко**

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,  
Симферополь 95007. *E-mail: vzts@home.cris.net*

**Аннотация.** Введены новые системы специальных функций – суперэллиптические (**SE**) и симплектические (**S**) функции. Эти функции заданы дифференциальными уравнениями и являются естественными обобщениями эллиптических функций Якоби. **SE**- и **S**-функции в определенных условиях периодичны. Период **SE**-функций выражается через интеграл, являющийся обобщением полного эллиптического интеграла первого рода. Минимальная модификация уравнений, сохраняющая алгебраическую однородность правых частей дифференциальных уравнений для **SE**- и **S**-функций, порождает обобщенные **GSE**- и **GS**-функции, обладающие при определенных условиях хаотическим поведением, с финитными непериодическими осцилляциями.

## 1. Введение

Специальные функции – оружие прикладного математика, его профессиональный инструментарий. Во многих случаях построение решений математических задач в виде рядов по специальным функциям или в виде интегралов, содержащих специальные функции, позволяет изучить аналитические свойства решений, или, во всяком случае, служит существенным и полезным дополнением к обширным числовым массивам, представляющим решение, полученное численным путем; изучение же самих численных массивов решения редко может служить источником вдохновения и математической интуиции.

Как правило, новые специальные функции появлялись в истории науки при решении задач прикладной математики, – прежде всего, математической физики, квантовой механики и, реже, теории чисел. По-видимому, уже в эпоху Гарри Бейтмана этот подход казался исчерпанным: в рамках возглавляемого Артуром Эрдеи фундаментального проекта The Bateman Manuscript Project (1946 – 1953 гг.) ставилась задача описания, каталогизации и классификации обширного множества уже изученных и используемых специальных функций (см. [1]: Введение). Но несмотря на всю обширность этого множества, вряд ли было бы разумно считать его завершенным. Возможный путь его пополнения – обобщение уже известных семейств специальных функций путем увеличения размерности задач, изменений в

дифференциальных или рекуррентных уравнениях, видоизменений порождающих функций и т.п. К сожалению, прикладная полезность того или иного обобщения априорной оценке не поддается. Тщательное изучение свойств новых специальных функций может очертить тот круг задач, в которых они могут быть полезны.

Целью настоящей работы является введение двух новых классов динамических систем и их решений – специальных функций, являющихся естественным обобщением эллиптических функций Якоби.

Второй источник мотивации данной работы – исследование непрерывных динамических систем, обладающих хаотическим поведением.

Несложная генерализация введенных здесь суперэллиптических и симплектических динамических систем, сохраняющая алгебраическую однородность правых частей, позволяет ввести в рассмотрение обобщенные суперэллиптические и симплектические системы, обладающие при определенных условиях сложным хаотическим поведением с финитными неперiodическими осцилляциями.

## 2. Суперэллиптические функции

Назовем *суперэллиптической* системой функций ранга  $N$  множество из  $N + 2$  функций  $c(t)$ ,  $s(t)$ ,  $x_i(t)$ ;  $i = \overline{1, N}$ ,  $N \geq 1$ , удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{s} = c \cdot \Pi; \quad \dot{c} = -s \cdot \Pi; \quad \dot{x}_i = -m_i \cdot s \cdot c \cdot \Pi'_i \quad (2.1)$$

где

$$\Pi = \prod_{j=1}^N x_j \quad (2.2)$$

– есть произведение всех функций  $x_j$ , а

$$\Pi'_i = \prod_{j=1}^N x'_j = \prod_{j=1; j \neq i}^N x_j \quad (2.3)$$

– произведение всех функций  $x_j$ , кроме функции  $x_i$ .

Чтобы перейти от произведения  $\Pi$  к произведению  $\Pi'_i$ , необходимо в  $\Pi$  заменить множитель  $x_i$  на единицу. Соответственно, формулам (2.2) и (2.3) можно придать смысл и при  $N = 1$ :

$$\Pi = x_1, \quad \Pi'_i = 1 \quad (N = 1) \quad (2.4)$$

Система дифференциальных уравнений (2.1) дополняется начальными условиями, которые мы назовем *стандартными*:

$$s(0) = 0; \quad c(0) = 1; \quad x_i(0) = 1; \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.5)$$

В эту систему уравнений (2.1) входит  $N$ -мерный вектор параметров  $\mathbf{m} = \{m_i\}$ , лежащий в единичном  $N$ -мерном кубе:

$$0 \leq m_i \leq 1; \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.6)$$

Выбор единичных начальных условий для функции  $c(t)$  и  $x_i(t)$ , равно как и ограничение значений параметров  $m_i$  (2.6) не являются существенными для данной задачи. Нетрудно показать, что перемасштабируя функции  $c, s$  и  $x_i$ , а также перемасштабируя аргумент  $t$ , и меняя местами функцию  $c$  с функцией  $x_m$ , содержащей в правой части уравнений (2.1) наибольшее значение параметра  $m$ , систему дифференциальных уравнений (2.1) при произвольных значениях параметров  $m_i$  и произвольных (но отличных от нуля) начальных условиях для функций  $c$  и  $x_i$  можно привести к стандартным начальным условиям (2.5) и стандартным ограничениям на параметр (2.6).

Система уравнений (2.1) с учетом начальных условий (2.5) имеет очевидный набор алгебраических интегралов:

$$c^2 + s^2 = 1; \quad m_i s^2 + x_i^2 = 1 \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.7)$$

Алгебраические соотношения (2.7) задают систему основных тождеств для суперэллиптических функций ранга  $N$ . С помощью этих тождеств функции  $c$  и  $x_i$  можно выразить (с точностью до знака) через одну функцию  $s(t)$ . Подстановка основных тождеств (2.7) в первое уравнение системы (2.1) дает уравнение, определяющее функцию  $s$ :

$$\dot{s}^2 = (1 - s^2) \cdot \prod_{i=1}^N (1 - m_i s^2), \quad (2.8)$$

с начальным условием

$$s(0) = 0. \quad (2.9)$$

Решение этой задачи удобно представить в параметрическом виде:

$$s = \sin \xi$$

$$t = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\prod_{i=1}^N (1 - m_i \cdot \sin^2 \xi)}}. \quad (2.10)$$

Функции  $s(t)$ ,  $c(t)$  и  $x_i(t)$  являются периодическими. Период этих функций равен  $4K(\mathbf{m})$ , где

$$K(\mathbf{m}) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{\prod_{i=1}^N (1 - m_i \cdot \sin^2 \xi)}}. \quad (2.11)$$

Функция  $K(\mathbf{m})$ , заданная в  $N$ -мерном кубе (2.6), которую можно назвать "полным эллиптическим интегралом первого рода  $N$ -го ранга", является естественным обобщением полного эллиптического интеграла  $K(m)$ , заданного на единичном отрезке (см., напр., [2], формула 17.3.1):

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - m \cdot \sin^2 \xi)}}. \quad (2.12)$$

Суперэллиптические функции ранга 1 являются известными эллиптическими функциями Якоби:

$$s(t) = sn(t; m); \quad c(t) = cn(t; m); \quad x_1(t) = dn(t; m). \quad (2.13)$$

Начало изучения этой системы трех функций восходит еще к первой попытке Валлиса (Wallis) подсчитать в 1665 г. длину дуги эллипса (см., напр., [3]). Позже эта задача привлекла внимание Ньютона, который, как и Валлис, представил решение задачи о длине дуги эллипса в виде бесконечного ряда. В конце XVII века этой задачей интересовался Якоб Бернулли. Но в целом теорию эллиптических функций считают "одной из математических жемчужин математики XIX века" [4]. Впрочем, отношение к этой теории неоднозначное. В современном электронном учебнике по эллиптическим функциям Якоби сказано следующее: "Эллиптические функции доставили массу удовольствий математикам, и они столь же увлекательны, как и любое бесполезное знание" [5]. Хорошо известны классические учебники по теории эллиптических функций (см., напр., [6]– [9]). Эти функции продолжают привлекать внимание современных исследователей как объект вычислительной математики [10] или специфическая динамическая система [11], или как средство решения некоторых новых задач теоретической физики (течение Пуазейля в релятивистской гидродинамике [12]). Введенная нами система суперэллиптических функций ранга  $N$  при  $N > 1$  является естественным обобщением тройки функции Якоби (2.13); это многомерное отражение той же самой математической жемчужины, – возможно, столь же полезное (или бесполезное), как и сама жемчужина. Многомерный суперэллиптический интеграл (2.11), возможно, заслуживает столь же тщательного изучения, как и его одномерный прародитель (2.12).

На рис. 1 ÷ 5 представлены графики суперэллиптических функций 2-го и 3-го рангов при некоторых значениях векторного модуля  $\mathbf{m}$ .

Система регулярных суперэллиптических функций  $(s, c, x_i)$ , определенная системой дифференциальных уравнений (2.1) может быть дополнена системой из  $N + 2$  функций  $T_c(t), T_s(t), T_i(t)$ , которые являются естественным суперэллиптическим обобщением тангенса и котангенса:

$$T_s = \frac{\wp}{s^2}, \quad T_c = \frac{\wp}{c^2}, \quad T_i = \frac{\wp}{x_i^2}, \quad (2.14)$$

где  $\wp$  – есть произведение всех суперэллиптических функций:

$$\wp = s \cdot c \cdot \Pi. \quad (2.15)$$

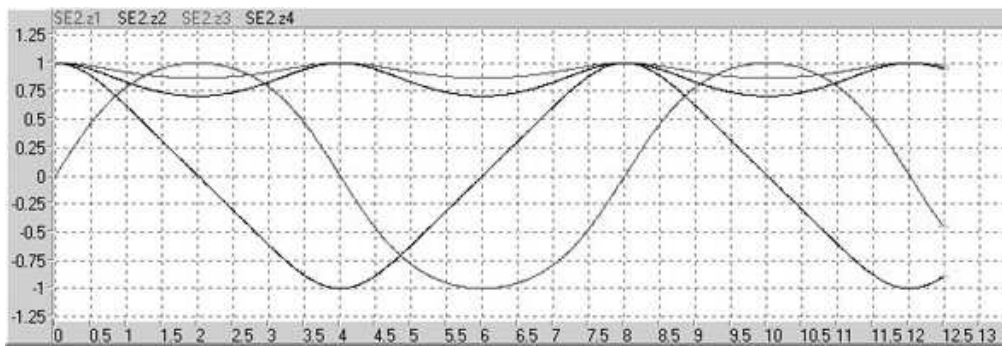


Рис. 1. Суперэллиптические функции второго ранга: SE2.  $\mathbf{m} = \{0.25; 0.50\}$ ;  $K(\mathbf{m}) = 2.20022$

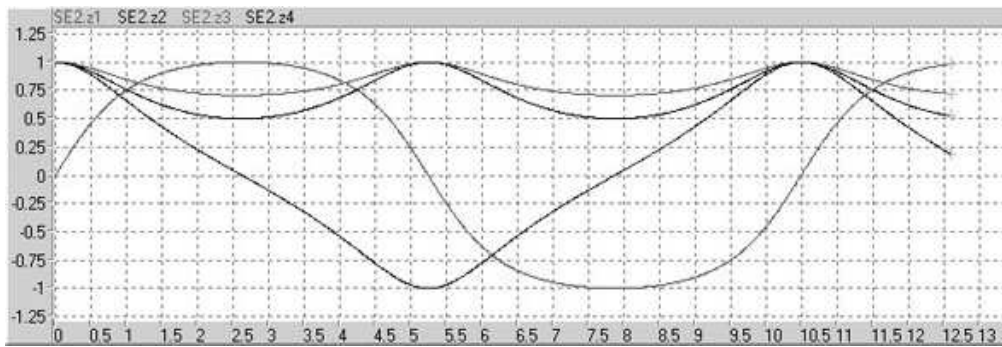


Рис. 2. Суперэллиптические функции второго ранга: SE2.  $\mathbf{m} = \{0.50; 0.75\}$ ;  $K(\mathbf{m}) = 2.6220$

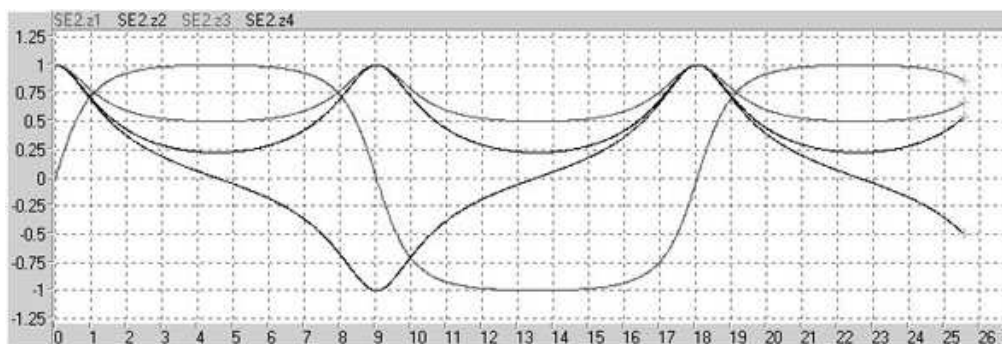


Рис. 3. Суперэллиптические функции второго ранга: SE2.  $\mathbf{m} = \{0.75; 0.95\}$ ;  $K(\mathbf{m}) = 4.5144$

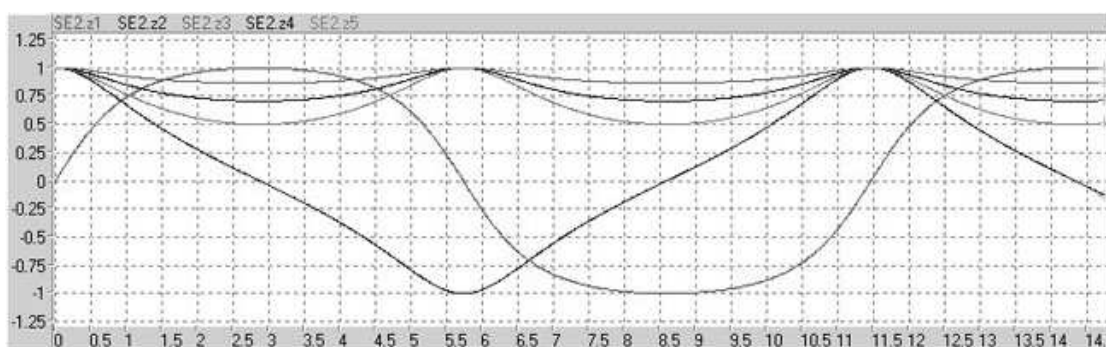


Рис. 4. Суперэллиптические функции третьего ранга: SE3.  $\mathbf{m} = \{0.25; 0.50; 0.75\}$ ;  $K(\mathbf{m}) = 2.8659$

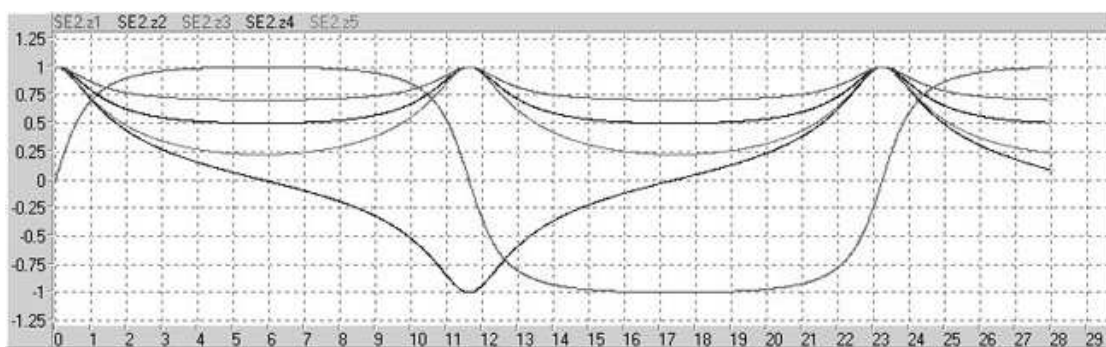


Рис. 5. Суперэллиптические функции третьего ранга: SE3.  $\mathbf{m} = \{0.50; 0.75; 0.95\}$ ;  $K(\mathbf{m}) = 5.8118$

Функции  $T_i$  – регулярны, а  $T_s$  и  $T_c$  имеют полюса первого порядка.

Из уравнений (2.1), (2.14) и (2.15) можно вывести систему дифференциальных уравнений для суперэллиптических тангенсных функций с квадратичными по этим функциям правыми частями:

$$\begin{aligned} \dot{T}_s &= -T_s \cdot (T_s + T_c + \sum_{i=1}^N T_i), \\ \dot{T}_c &= T_c \cdot (T_s + T_c - \sum_{i=1}^N T_i), \\ \dot{T}_i &= T_i \cdot (T_s - T_c + 2T_i - \sum_{j=1}^N T_j), \end{aligned} \quad (2.16)$$

с начальными условиями, которые вытекают из соотношений (2.5) и (2.14):

$$T_c(0) = 0, \quad T_i(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot T_s(t) = 1. \quad (2.17)$$

### 3. Обобщенные суперэллиптические функции

Динамика процессов, описываемых системой уравнений (2.1), весьма бедна: решения (2.1) периодические при любой размерности  $N$ . Для появления более богатой динамики, – например, для рождения странных аттракторов – необходимо усложнить правые части. Приведем такое ”усложнение” не разрушая структуру системы (2.1), сохраняя общий вид правых частей. Описание такого ”минимального” усложнения в общем виде, при произвольной размерности  $N$ , было бы громоздким. Приведем необходимые преобразования для  $N = 1$  (обобщенные эллиптические функции) и  $N = 2$  (обобщенные суперэллиптические функции второго ранга).

### 4. Обобщенные эллиптические функции

Обозначая три эллиптические функции Якоби (2.13) одним символом  $z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), систему уравнений Якоби можно записать в следующем виде:

$$\dot{z}_i = \Gamma_{ijk} z_j z_k \quad (4.1)$$

В формуле (4.1) по повторяющимся векторным индексам  $j$  и  $k$  подразумевается суммирование от единицы до тройки.

Трехиндексный символ  $\Gamma_{ijk}$ , входящий в (4.1) имеет очень бедную структуру. Прежде всего, его можно считать симметричным по двум последним индексам (они все равно ”мертвые”, по ним производится суммирование):

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}. \quad (4.2)$$

Символ  $\Gamma$  имеет нулевые элементы на всех диагоналях:

$$\Gamma_{ikj} = 0 \quad \text{при} \quad k = i \quad \text{или} \quad j = i. \quad (4.3)$$

и

$$\Gamma_{ikj} = 0 \quad \text{при} \quad k = j. \quad (4.4)$$

Кроме того, символ  $\Gamma$  удовлетворяет условию ”частичной” антисимметрии по первой паре индексов:  $\Gamma_{ijk} = -\Gamma_{jik}$  при  $i, j = 1$  или  $2$ , т.е.

$$\Gamma_{123} = -\Gamma_{213}. \quad (4.5)$$

С учетом условий (4.2)–(4.5), в символе  $\Gamma_{ijk}$  из двадцати семи элементов остается всего два независимых. Один из них выбором подходящей единицы времени в (4.1) можно превратить в единицу, – в итоге правая часть (4.1) приобретает известный однопараметрический однородный квадратичный вид, порождающий эллиптические функции Якоби:

$$\dot{z}_1 = z_2 z_3; \quad \dot{z}_2 = -z_1 z_3; \quad \dot{z}_3 = -m z_1 z_2 \quad (4.6)$$

Усложняя структуру системы уравнений (4.1), ослабим требования (4.2)–(4.5), наложенные на символ  $\Gamma$ . Пусть вместо условия (4.4) выполняется условие

$$\Gamma_{ikj} \neq 0 \quad \text{при} \quad k = j \neq i \quad (4.7)$$

Обозначим элементы  $\Gamma_{ikk}$  (по  $k$  нет суммирования) символом  $a_{ik}$ . Согласно условию (4.3) матрица  $a_{ik}$  имеет нулевые элементы на диагонали:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i = j. \quad (4.8)$$

С учетом условия (4.7), система уравнений (4.1) принимает следующий вид:

$$\dot{z}_i = \Gamma_{ijk}^e z_j z_k + a_{ik} \sigma_k, \quad (4.9)$$

где  $\Gamma_{ijk}^e$  – компоненты символа  $\Gamma$  для обычных эллиптических функций, определяемых уравнениями Якоби (4.6), а

$$\sigma_k = (z_k)^2. \quad (4.10)$$

Матрица  $a_{ij}$  с учетом условия (4.8) имеет 6 независимых компонент и порождает вместе с параметром  $m$ , входящим, согласно (4.2) в  $\Gamma_{ijk}^e$ , семимерное пространство параметров, что делает ее трудной для исследования.

Если мы ограничимся рассмотрением только антисимметричных матриц  $a_{ij}$  :

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (4.11)$$

(условия (4.11) и (4.8), очевидно, совместимы), то в матрице  $a_{ij}$  останется только три независимых элемента, которые можно выразить через компоненты дуального к матрице  $a_{ij}$  трехмерного вектора  $\omega$ :

$$a_{12} = -\omega_3; \quad a_{13} = \omega_2; \quad a_{23} = -\omega_1 \quad (4.12)$$

что дает для (4.9) с учетом (4.10) такое выражение:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 z_3 - \omega_3 z_2^2 + \omega_2 z_3^2 \\ \dot{z}_2 &= -z_1 z_3 + \omega_3 z_1^2 - \omega_1 z_3^2 \\ \dot{z}_3 &= -m z_1 z_2 - \omega_2 z_1^2 + \omega_1 z_2^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Система (4.13) обладает как периодическим, так и непериодическим решениями (см. рис. 6 и рис. 7).



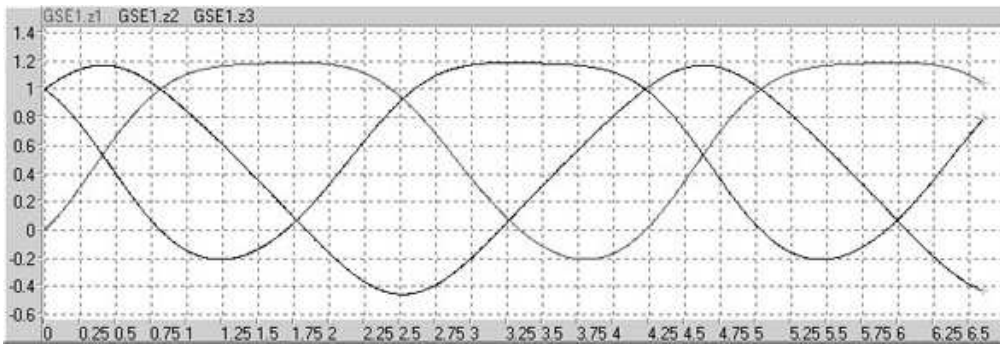


Рис. 6. Обобщенные суперэллиптические функции ранга 1: GSE1.  $m = 0; \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.75$  (периодическое решение)

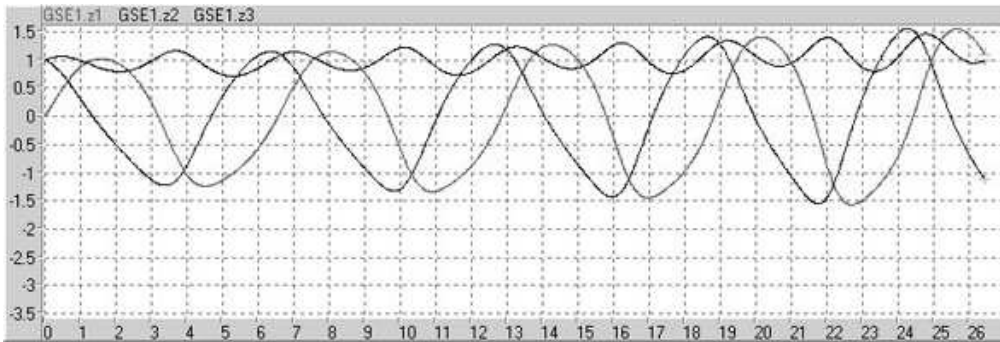


Рис. 7. Обобщенные суперэллиптические функции ранга 1: GSE1.  $m = 0.25; \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.25$  (непериодическое решение)

## 5. Обобщенные суперэллиптические функции 2-го ранга

Исходная суперэллиптическая система для  $N = 2$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 z_3 z_4; & \dot{z}_2 &= -z_1 z_3 z_4; \\ \dot{z}_3 &= -m_1 z_1 z_2 z_4; & \dot{z}_4 &= -m_2 z_1 z_2 z_3. \end{aligned} \quad (5.1)$$

С начальными условиями

$$z_1(0) = 0; \quad z_2(0) = 1; \quad z_3(0) = 1; \quad z_4(0) = 1. \quad (5.2)$$

”Минимальное” усложнение правых частей (5.1) с сохранением кубической однородности, превращает двумерное пространство параметров  $(m_1, m_2)$  системы (5.1) в восьмимерное:

$$\dot{z}_i = \Gamma_{ijkl} z_j z_k z_l + a_{ij} \sigma_j. \quad (5.3)$$

Индексы в формуле (5.3) пробегает значения от 1 до 4, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование по всем значениям индекса.

В формуле (5.3)  $\Gamma_{ijkl}$  — четырехиндексный символ Якоби, задающий суперэллиптическую систему 2-го ранга. Значения элементов этого индекса легко восстанавливаются по виду правых частей системы (5.1).

Символом  $\sigma$  обозначен 4-вектор, элементы которого равны кубам соответствующих компонент 4-вектора  $\mathbf{z}$ :

$$\sigma_i = z_i^3. \quad (5.4)$$

4x4-матрица  $a_{ij}$  в (5.3) имеет нулевые элементы на главной диагонали:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i = j. \quad (5.5)$$

Это условие продиктовано желанием сохранить одну существенную черту исходной якобиевой суперэллиптической системы (5.1): производная по времени  $\dot{z}_i$  не зависит от самой функции  $z_i$  (а зависит от трех других компонент 4-вектора  $\mathbf{z}$ ).

Если на матрицу  $a_{ij}$  наложить условие антисимметрии:

$$a_{ij} = -a_{ji}, \quad (5.6)$$

совместимое с условием (5.5), то 6 нетривиальных компонент матрицы  $a_{ij}$  можно выразить через два трехмерных вектора  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned} a_{12} &= E_1; & a_{13} &= E_2; & a_{14} &= E_3; \\ a_{23} &= -H_3; & a_{24} &= H_2; \\ a_{34} &= -H_1; \end{aligned} \quad (5.7)$$

С учетом (5.4) и (5.7) система уравнений (5.3) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 z_3 z_4 + E_1 z_2^3 + E_2 z_3^3 + E_3 z_4^3; \\ \dot{z}_2 &= -z_1 z_3 z_4 - E_1 z_2^3 - H_3 z_3^3 + H_2 z_4^3; \\ \dot{z}_3 &= -m_1 z_1 z_2 z_4 - E_2 z_1^3 + H_3 z_2^3 - H_1 z_4^3; \\ \dot{z}_4 &= -m_2 z_1 z_2 z_3 - E_3 z_1^3 - H_2 z_2^3 + H_1 z_3^3. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Назовем систему четырех функций  $z_i$ , определяемую дифференциальными уравнениями (5.8) с начальными условиями (5.2) обобщенными суперэллиптическими функциями 2-го ранга.

Восьмимерное параметрическое пространство  $\mathbf{m}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$  обобщенной суперэллиптической системы (5.8) ”слишком просторно” для тщательного анализа. Некоторые решения этой системы представлены на рис. 8 (периодическое решение при  $m_1 = 0.25; m_2 = 0.50; E_1 = 0.20; E_2 = 0; E_3 = 0; H_1 = 0; H_2 = 0; H_3 = 0.2$ ) и рисунках 9–11 (функции  $z_i(t)$  и проекции 4-траектории  $\mathbf{z}(t)$  на некоторые координаты плоскости; непериодическое решение при  $m_1 = 0.25; m_2 = 0.5; E_1 = 1; E_2 = 0; E_3 = 0; H_1 = 1; H_2 = 0; H_3 = 0$ ).

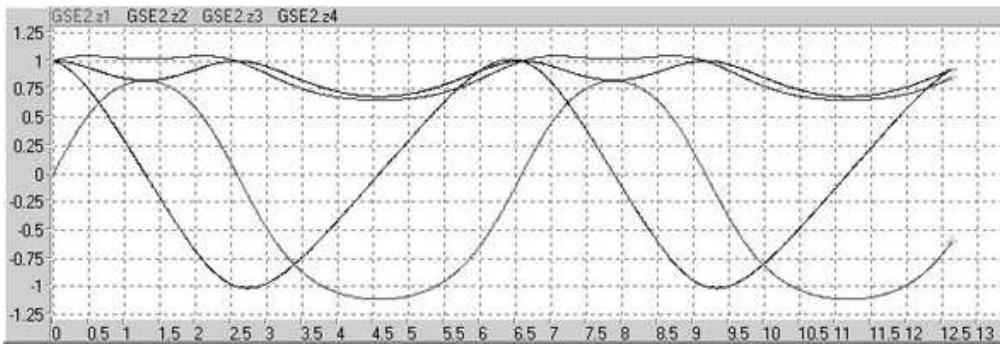


Рис. 8. Обобщенные суперэллиптические функции ранга 2: GSE2.  $m_1 = 0.25; m_2 = 0.50; e_1 = h_3 = 0.20; e_2 = e_3 = h_2 = h_3 = 0$  (периодическое решение)

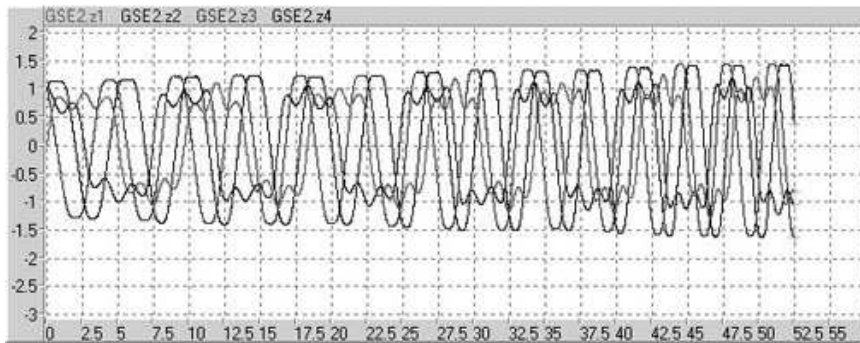


Рис. 9. Обобщенные суперэллиптические функции ранга 2: GSE2.  $m_1 = 0.25; m_2 = 0.50; e_1 = h_1 = 1; e_2 = e_3 = h_2 = h_3 = 0$  (непериодическое решение);  $0 \leq t \leq 52$

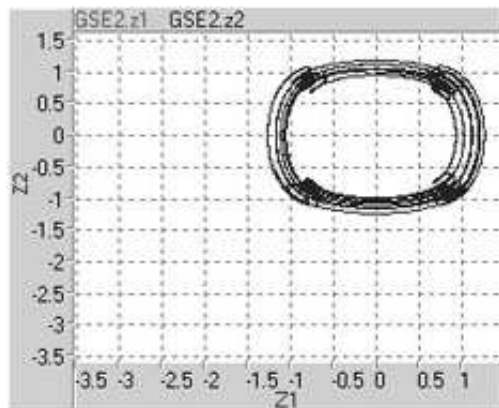


Рис. 10. Обобщенные суперэллиптические функции ранга 2: GSE2. Проекция решения на координатную плоскость  $\{z_1, z_2\}$ . Параметры такие же, как и на рис.9.

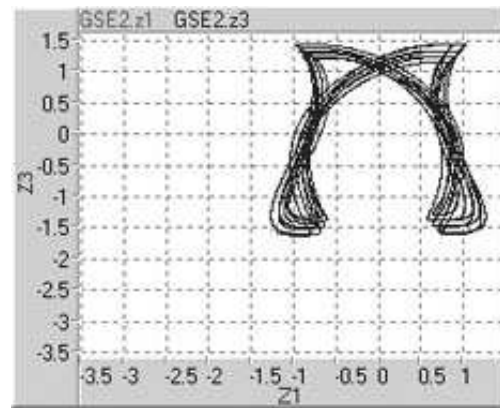


Рис. 11. Обобщенные суперэллиптические функции ранга 2: GSE2. Проекция решения на координатную плоскость  $\{z_1, z_3\}$ . Параметры такие же, как и на рис.9.

## 6. Симплектические функции

Рассмотрим еще одно обобщение эллиптических функций, требующее четности пространства состояний. Назовем *симплектической* системой множество  $N$  пар функций  $x_i(t); y_i(t)$ ,  $i = \overline{1, N}; N \geq 1$ , заданных следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = y_i \Pi'_i x_j; \quad \dot{y}_i = -x_i \Pi'_i y_j, \quad (6.1)$$

где  $\Pi'_i x_j$  – произведение всех функций  $x_j$ , кроме  $x_i$  (в полном произведении всех функции  $x_j$ :  $\prod_{j=1}^N x_j$  функция  $x_i(t)$  заменена единицей), а  $\Pi'_i y_j$  – произведении всех функции  $y_j$ , кроме  $y_i$ .

Использование термина "симплектический" в названии системы (6.1) мотивируется следующими соображениями: система функций  $(x_i, y_i)$  четномерна; система уравнений (6.1) антисимметрична по каждой паре динамически сопряженных переменных  $x_i$  и  $y_i$ .

Для системы (6.1) фиксируем начальные условия только по переменным  $x_1$  и  $y_1$ :

$$x_1(0) = 0; \quad y_1(0) = 1. \quad (6.2)$$

Остальные начальные условия остаются свободными.

При  $N = 1$  симплектическая система сводится к тригонометрическим функциям:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y & x(0) &= 0 \\ \dot{y} &= -x & y(0) &= 1 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Система (6.3) обладает очевидным интегралом энергии:  $x^2 + y^2 = E = const = 1$ . Очевидно, что  $x = \sin t$  и  $y = \cos t$ .

При  $N = 2$  система симплектических уравнений приобретает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 x_2, & \dot{y}_1 &= -x_1 y_2, \\ \dot{x}_2 &= y_2 x_1, & \dot{y}_2 &= -x_2 y_1. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Система (6.4) обладает двумя линейными интегралами:

$$\begin{aligned} x_1 + y_2 &= u = const; \\ x_2 + y_1 &= v = const. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Исключая из (6.4) с помощью соотношений (6.5) переменные  $x_2$  и  $y_2$ , задачу построения симплектических функций при  $N = 2$  можно свести к двумерной:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1(v - y_1) \\ \dot{y}_1 &= -x_1(u - x_1) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Система (6.6) обладает кубическим интегралом энергии:

$$\frac{1}{2}(ux_1^2 + vy_1^2) - \frac{1}{3}(x_1^3 + y_1^3) = E = const \quad (6.7)$$

В семействе интегральных кривых, описанных интегралом (6.7), имеются как инфинитные кривые, так и замкнутые кривые, охватывающие особые точки типа "центр". Эти кривые соответствуют периодическим решениям системы (6.4).

Инфинитные решения системы (6.4) имеют в качестве асимптотики особое решение

$$x_1 = x_2 = -\frac{1}{t_0 - t}; \quad y_1 = y_2 = \frac{1}{t_0 - t}, \quad (t_0 > 0, \quad 0 < t < t_0),$$

которое описывает уход решения в бесконечность за конечное время  $t_0$ .

При  $N = 3$  уравнения (6.1) имеют кубические правые части:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 x_2 x_3, & \dot{y}_1 &= -x_1 y_2 y_3, & \dot{x}_2 &= y_2 x_1 x_3, \\ \dot{y}_2 &= -x_2 y_1 y_3, & \dot{x}_3 &= y_3 x_1 x_2, & \dot{y}_3 &= -x_3 y_1 y_2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Система (6.8) имеет два квадратичных интеграла:

$$\begin{aligned} x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 &= p = const; \\ x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_3 y_2 &= q = const. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Несомненно, система (6.8) имеет и другие первые интегралы, отличные от (6.9), но найти их явные аналитические выражения нам не удалось.

С учетом фиксированных в (6.2) начальных условий для  $x_1$  и  $y_1$ , симплектическая система 3-го ранга (6.8) имеет 4 степени свободы в пространстве начальных условий  $(x_{20}, y_{20}, x_{30}, y_{30})$ . Структура первых интегралов (6.9) такова, что, если все три компоненты 3 вектора  $\mathbf{x}$  неограниченно нарастают, то все три компоненты 3-вектора  $\mathbf{y}$  стремятся к нулю.

При описании симплектической системы (6.1) удобно пользоваться следующей терминологией. Будем называть  $2N$ -мерное пространство состояний  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$  фазовым пространством системы,  $N$ -мерное пространство  $\{\mathbf{x}\}$  – координатным пространством, а  $N$ -мерное пространство  $\{\mathbf{y}\}$  – импульсным пространством.

Отмеченное выше свойство решений симплектической системы 3-го ранга можно сформулировать так: если решение системы (6.8) уходит в бесконечность в координатном пространстве, то оно стремится к нулю в импульсном пространстве, и наоборот.

Нетрудно построить частные решения системы (6.8), иллюстрирующие это поведение. Функции

$$x_i = Ae^{\lambda t}; \quad y_i = \frac{\lambda}{A} e^{-\lambda t} \quad (6.10)$$

являются решениями (6.8) при любых отличных от нуля вещественных  $A$  и  $\lambda$ . Решение (6.10) не удовлетворяет начальным условиям (6.2), но задает асимптотику

больших  $t$  для почти любых начальных условий. Начальные условия, отделяющие решения, растущие в координатном пространстве  $\mathbf{x}$  ( $\lambda > 0$ ), от решений, растущих в импульсном пространстве  $\mathbf{y}$  ( $\lambda < 0$ ) сосредоточены на множестве нулевой меры в пространстве начальных условий. Это множество нелегко обнаружить путем численного эксперимента.

Некоторые решения системы (6.8) – т.е. симплектические функции третьего ранга – показаны на рис. 12÷14. Это неупорядоченные осцилляции с чередованием быстрых и медленных фаз.

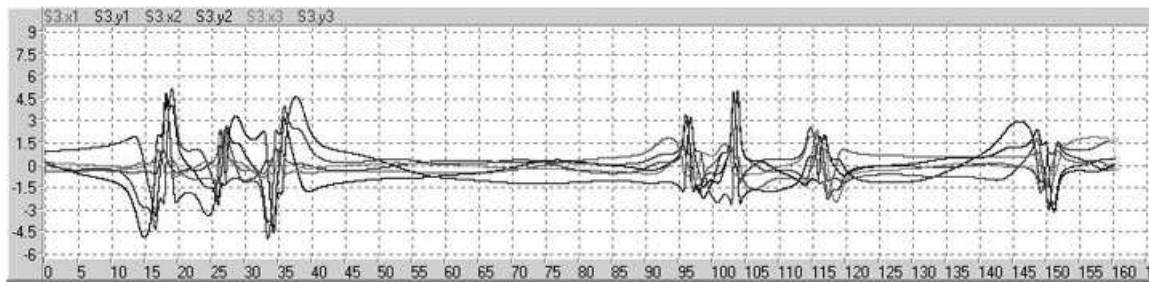


Рис. 12. Симплектические функции ранга 3: S3.  $x_2(0) = -0.4; y_2(0) = 0.2; x_3(0) = 0.2; y_3(0) = -0.4$ . Зависимость шести симплектических функций  $x_i$  и  $y_i$  от времени  $0 < t < 160$ . Непериодические колебания. Неупорядоченное чередование быстрых и медленных осцилляций.

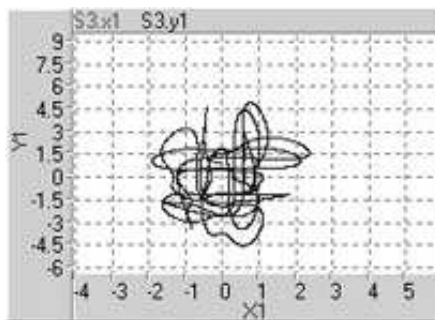


Рис. 13. Симплектические функции ранга 3: S3. Проекция решения на фазовую плоскость  $\{x_1, y_1\}$ . Параметры такие же, как и на рис. 12.

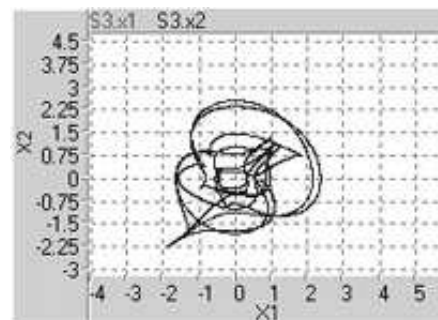


Рис. 14. Симплектические функции ранга 3: S3. Проекция решения на координатную плоскость  $\{x_1, x_2\}$ . Параметры такие же, как и на рис. 12.

## 7. Обобщенные симплектические функции 2-го ранга

Сохраняя полиномиальную однородность правых частей системы (6.1) можно несколько "расшатать" их бедную структуру настолько, чтобы появилась надежда на возникновение хаотических колебаний. Рассмотрение общего случая при произвольной размерности  $N$  громоздко. Приведем здесь только "минимальное"

расширение простейшей симплектической системы при  $N = 2$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 x_2 + a x_2 y_2 \\ \dot{y}_1 &= -x_1 y_2 - a x_2 y_2 \\ \dot{x}_2 &= y_2 x_1 + b x_1 y_1 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 x_2 - b x_1 y_1 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Это единственно возможное обобщение симплектической системы (6.4), удовлетворяющие условиям однородности и билинейности правых частей по переменным  $x_i$  и  $y_i$ , а также условию "отсутствия самодействия" (в правых частях не фигурирует та переменная, производная от которой стоит в левой части уравнения)

В системе уравнений (7.1) фигурируют две произвольные постоянные  $a$  и  $b$ . Если потребовать, чтобы динамическая система (7.1) была инвариантна относительно перестановки индексов  $1 \leftrightarrow 2$ , как и исходная симплектическая система (6.4), то необходимо принять, что  $a = b$ , и система (7.1) приобретает "стандартный" вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2(y_1 + a y_2) \\ \dot{y}_1 &= -y_2(x_1 + a x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1(y_2 + a y_1) \\ \dot{y}_2 &= -y_1(x_2 + a x_1) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Назовем динамическую систему (7.2) *обобщенной симплектической системой второго ранга*. Она обладает четырехмерным фазовым пространством. 4-траекторию решения удобно изучать в проекциях на координатную плоскость  $\{x_1, x_2\}$ , импульсную плоскость  $\{y_1, y_2\}$  и две фазовые плоскости  $\{x_1, y_1\}$ ,  $\{x_2, y_2\}$ .

При стандартизации начальных условий в первой фазовой плоскости согласно (6.2), динамическая система (7.2) обладает трехмерным пространством параметров. Роль параметров играют начальные условия для  $x_2(0)$  и  $y_2(0)$ , а также постоянная  $a$ , фигурирующая в уравнениях (7.2).

Симметризация начальных условий во второй фазовой плоскости –

$$x_2(0) = y_2(0) = c, \quad (7.3)$$

вносит дальнейшее упрощение в изучение этой системы: пространство параметров становится двумерным.

Поведение динамической системы (7.2) достаточно чувствительно к значениям параметров  $a$  и  $c$ . Тщательное численное исследование системы при  $a = -0.5$  позволяет ввести следующую классическую функцию решений в зависимости от их поведения при  $t \rightarrow +\infty$ :

- **Изолированное периодическое решение**, существующее при  $c = -0.5$  (рис.15).

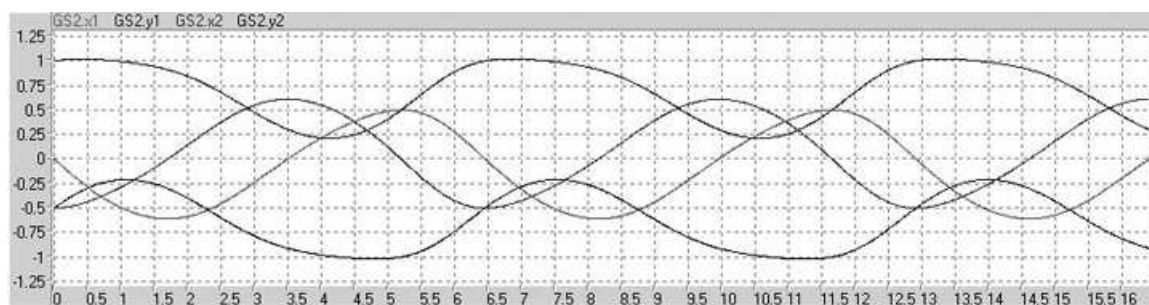


Рис. 15. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2. Периодическое решение.  $a = -0.5$ ;  $c = -0.5$ .

- **Устойчивый фазовый 4-кокон:** все 4 переменные  $(x_1, x_2, y_1, y_2)$  осциллируют, оставаясь ограниченными; решение неперiodично; траектория решения в фазовом пространстве постепенно заполняет некоторую четырехмерную фигуру ("4-кокон"); при осцилляциях чередуются медленные и быстрые фазы.

Такое решение существует при достаточно больших положительных  $c$ :  $c > c_{cocoon}^+ \simeq 0.171$  (см. рис. 16 ÷ 18) и достаточно больших по модулю отрицательных  $c$ :  $c < c_{cocoon}^- \simeq -2.498 \dots$  (см. рис. 19 ÷ 21). При этом, с увеличением модуля  $c$  происходит "утончение" 4-кокона по трем измерениям и четырехмерная фигура все более приближается к одномерной кривой, а решение, соответственно, к периодическому.

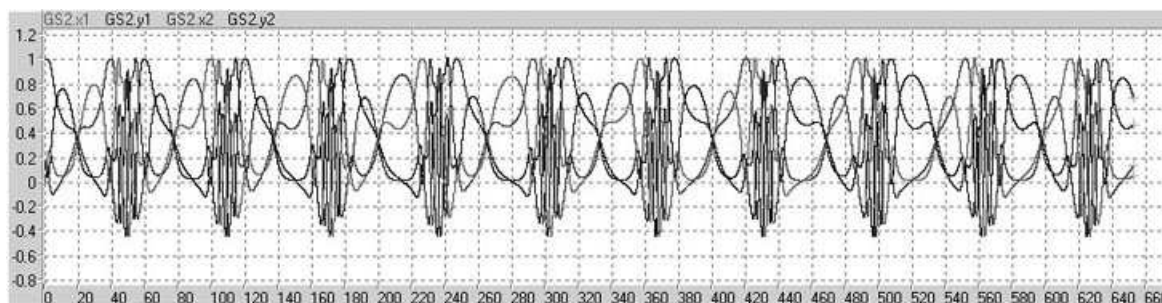


Рис. 16. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2.  $a = -0.5$ ;  $c = 0.175$ . Зависимость четырех симплектических функций GS2 от времени  $0 < t < 650$ . Непериодические финитные осцилляции. Чередование быстрых и медленных фаз.



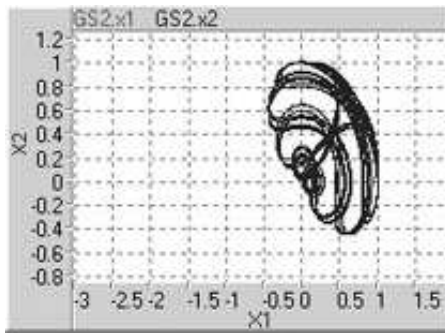


Рис. 17. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2. Проекция 4-кокона решения на координатную плоскость  $\{x_1, x_2\}$ . Параметры такие же, как и на рис.16.

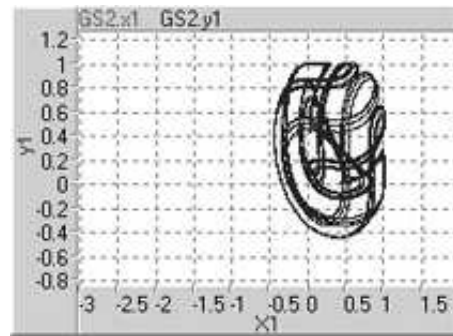


Рис. 18. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2. Проекция 4-кокона решения на фазовую плоскость  $\{x_1, y_1\}$ . Параметры такие же, как и на рис.16.

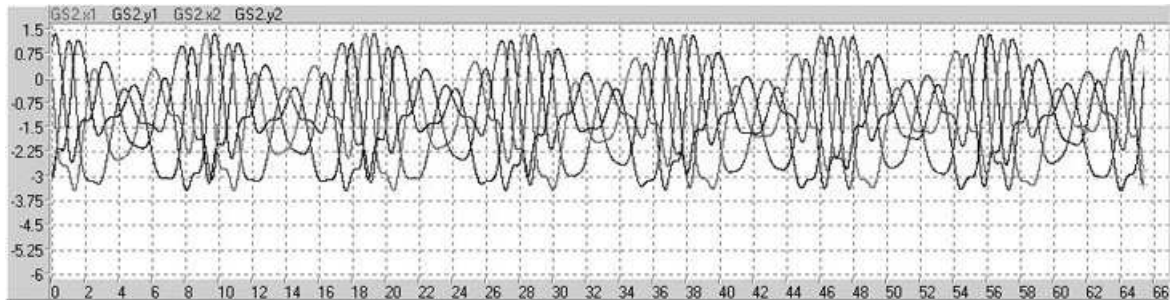


Рис. 19. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2.  $a = -0.5$ ;  $c = -3$ .  $0 < t < 65$ . Непериодические конечные осцилляции.

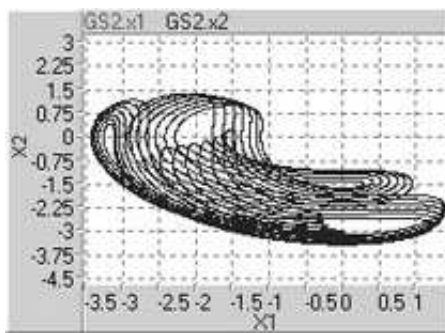


Рис. 20. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2.  $a = -0.5$ ;  $c = -3$ . Проекция 4-кокона решения на координатную плоскость  $\{x_1, x_2\}$ .

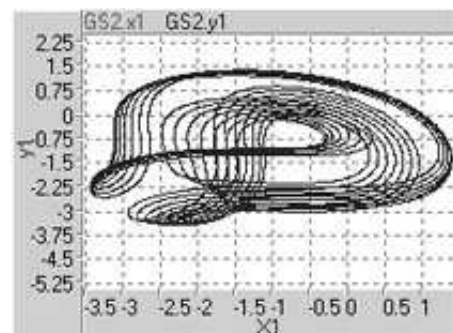


Рис. 21. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2.  $a = -0.5$ ;  $c = -3$ . Проекция 4-кокона решения на фазовую плоскость  $\{x_1, y_1\}$ .

- **Импульсная раскачка** (или  $Y$ -раскачка, " $Y$  – swaying"): импульсы  $y_1$  и

$y_2$  быстро нарастают с осцилляциями; координаты  $x_1$  и  $x_2$  осциллируют и медленно растут (гораздо медленней, чем импульсы).

Можно выделить 2 подтипа  $Y$ -раскачки:

1. подтип  $Y_1$ :  $y_1 \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ ;
2. подтип  $Y_2$ :  $y_2 \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Тип " $Y$  - *swaying*" может формироваться непосредственно от начального момента (см. рис. 22 ÷ 24). Такое поведение решений будем называть тривиальным. Оно наблюдается при малых  $c$ :  $0 < c < 0.14\dots$  и  $-0.5 < c < 0$ . Возможно и более сложное поведение решения: при  $0 < t < t_{breakdown}$  - чередование быстрых и медленных осцилляций, напоминающее формирование "4-кокона", затем переход к  $Y$ -типу поведения ("пробой кокона и тривиализация решения"). "Пробой кокона" иногда происходит в виде "взрыва" - очень быстрый, без осцилляций, рост переменных на  $1.5 \div 2.5$  порядка, затем быстрые осцилляции (см. рис. 25 ÷ 28).

Алгебраическая структура (7.2) такова, что при взрывном росте амплитуды  $A$  на 2-3 порядка характерное время осцилляций  $\Delta t$  уменьшается в той же пропорции на 2-3 порядка. Для сохранения точности численного счета необходимо при этом на 4 ÷ 6 порядков уменьшить шаг интегрирования. Эта примечательная (и непредсказуемая до выполнения вычислений) "жесткость" системы порождает определенные трудности для численного решения.

- **Координатная раскачка** ( $X$ -раскачка, " $X$  - *swaying*"): координаты  $x_1$  и  $x_2$  быстро нарастают с осцилляциями, импульсы  $y_1$  и  $y_2$  осциллируют и медленно нарастают (гораздо медленней, чем координаты).

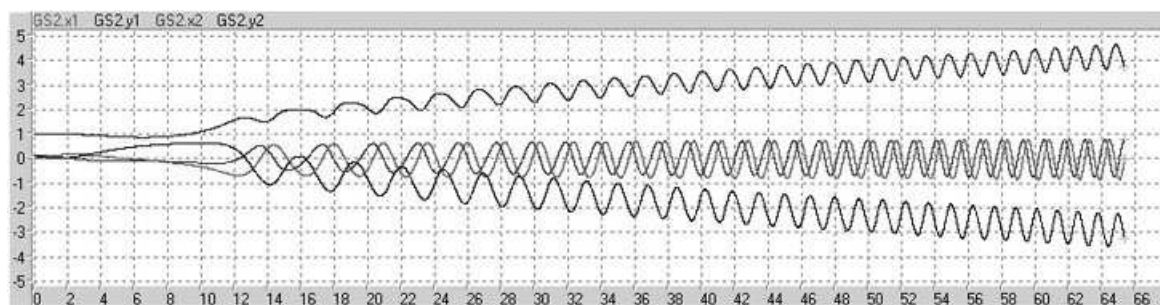


Рис. 22. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2.  $a = -0.5$ ;  $c = 0.125$ . Зависимость четырех обобщенных симплектических функций GS2 от времени;  $0 < t < 65$ . Режим  $Y$ -*swaying*.

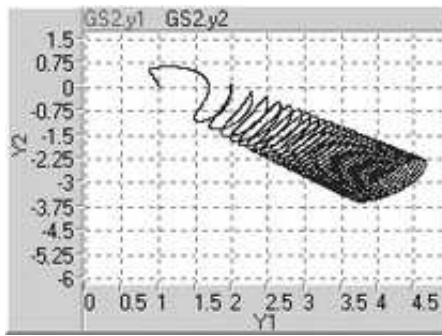


Рис. 23. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2.  $a = -0.5$ ;  $c = 0.125$ . Проекция решения на импульсную плоскость  $\{y_1, y_2\}$ . Режим  $Y - swaying$ .

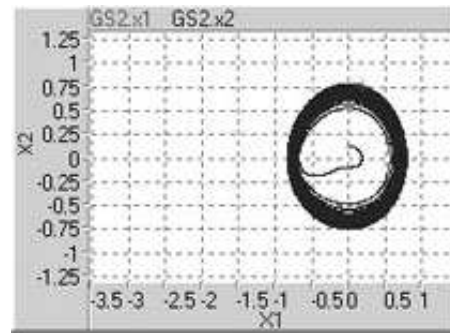


Рис. 24. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2.  $a = -0.5$ ;  $c = 0.125$ . Проекция решения на координатную плоскость  $\{x_1, x_2\}$ . Режим  $Y - swaying$ .

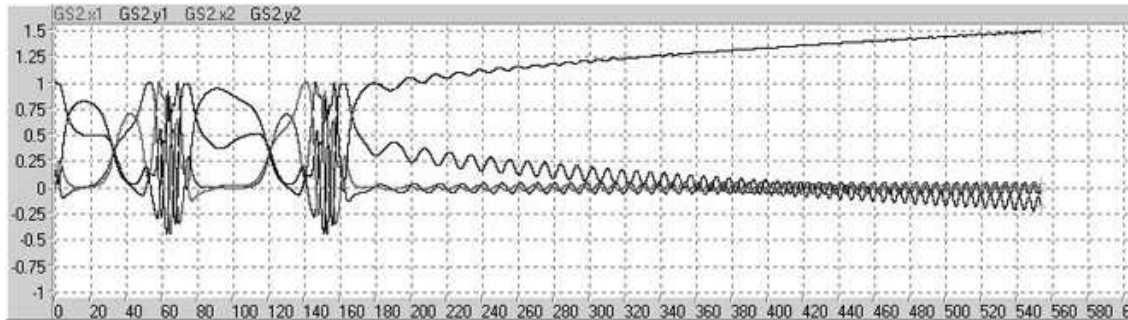


Рис. 25. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2.  $a = -0.5$ ;  $c = 0.1705$ . Зависимость четырех обобщенных симплектических функций GS2 от времени;  $0 < t < 550$ . Режим  $Y - breakdown$ . Тривиализация решения после "пробоя кокона".

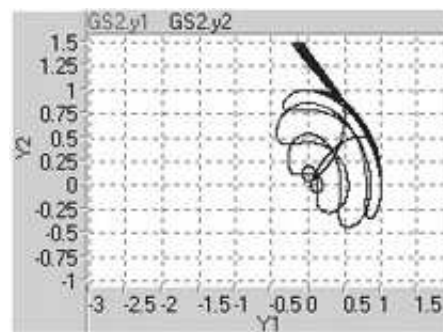


Рис. 26. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2.  $a = -0.5$ ;  $c = 0.1705$ ;  $0 < t < 550$ . Проекция решения на импульсную плоскость  $\{y_1, y_2\}$ . Режим  $Y - breakdown$ . Формирование и пробой 4-кокна решения.

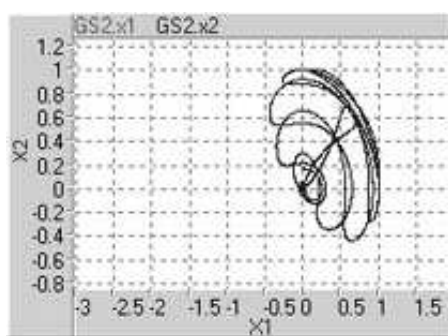


Рис. 27. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2.  $a = -0.5$ ;  $c = 0.1705$ ;  $0 < t < 550$ . Проекция решения на координатную плоскость  $\{x_1, x_2\}$ . Режим  $Y - breakdown$ .

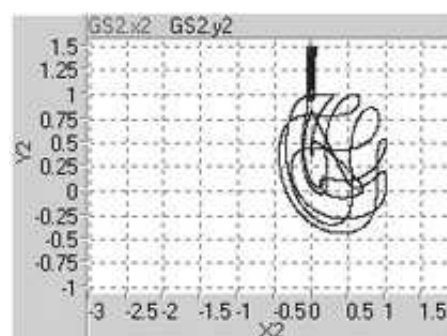


Рис. 28. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2.  $a = -0.5$ ;  $c = 0.1705$ ;  $0 < t < 550$ . Проекция решения на фазовую плоскость  $\{x_2, y_2\}$ . Режим  $Y - breakdown$ . Формирование и пробой 4-коккона решения.

Для типа " $X - swaying$ " можно выделить два подтипа:

1. подтип  $X_1$ : координата  $x_1 \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ ;
2. подтип  $X_2$ : координата  $x_2 \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Как и тип " $Y - swaying$ ", тип " $X - swaying$ " может формироваться непосредственно от начального момента ("тривиальное поведение"). Возможно и более сложное поведение – чередование быстрых и медленных осцилляций, формирование 4-коккона и " $x$ -пробой" коккона в некоторый момент  $t_{breakdown}$  с переходом к типу " $X - swaying$ " (см. рис. 29 ÷ 31). Резкие изменения в поведении "взрывного" решения могут происходить при изменении параметра начальных условий в 4-5-ом знаке после запятой.

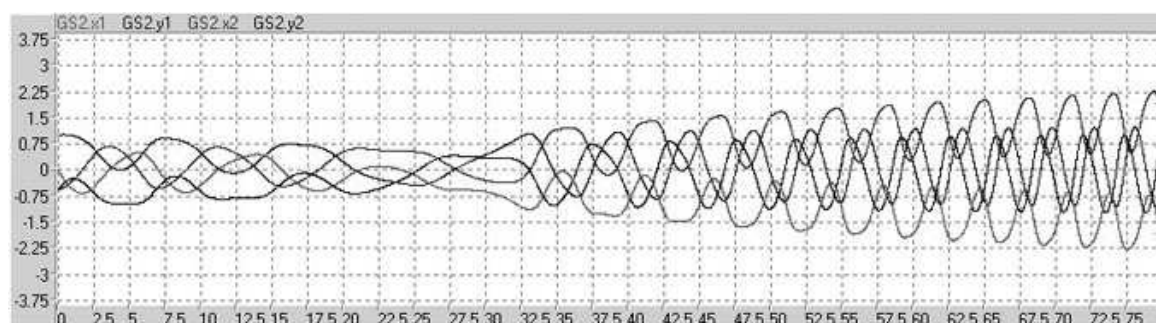


Рис. 29. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2.  $a = -0.5$ ;  $c = -0.55$ ;  $0 < t < 77$ . Зависимость четырех обобщенных симплектических функций от времени. Режим  $X - breakdown$ . Тривиализация решения после пробоя 4-коккона.

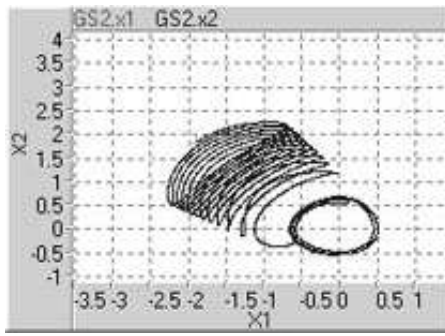


Рис. 30. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2.  $a = -0.5$ ;  $c = -0.55$ ;  $0 < t < 77$ . Режим  $X - breakdown$ . Проекция 4-траектории решения на координатную плоскость  $\{x_1, x_2\}$ .

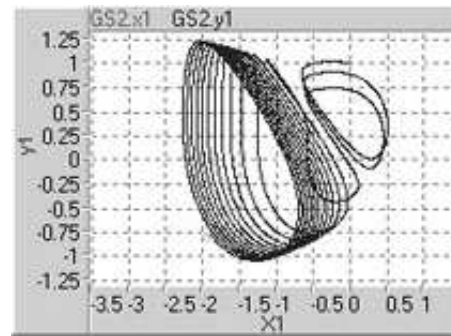


Рис. 31. Обобщенные симплектические функции ранга 2: GS2.  $a = -0.5$ ;  $c = -0.55$ ;  $0 < t < 77$ . Режим  $X - breakdown$ . Проекция 4-траектории решения на фазовую плоскость  $\{x_1, y_1\}$ .

Некоторый свет на природу ”взрыва” решений в обобщенной симплектической системе ранга 2 проливает изучение сингулярных решений вида

$$x_i = \frac{A_i}{t_0 - t}; \quad y_i = \frac{B_i}{t_0 - t}; \quad t_0 > 0. \quad (7.4)$$

Решения (7.4), уходя в бесконечность при  $t \rightarrow t_0$ , не продолжимы далее по времени.

Подстановка (7.4) в систему (7.2) дает систему алгебраических уравнений относительно амплитудных коэффициентов  $A_i$  и  $B_i$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2(B_1 + aB_2) \\ B_1 &= -B_2(A_1 + aA_2) \\ A_2 &= A_1(B_2 + aB_1) \\ B_1 &= -B_1(A_2 + aA_1) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Полагая, что

$$\begin{aligned} A_2 &= \alpha A_1 \\ B_2 &= \beta B_1 \end{aligned} \quad (7.6)$$

и подставляя (7.6) в алгебраическую систему (7.5), получим для определения чисел  $\alpha$  и  $\beta$  систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{a + \beta}{1 + a\beta} \\ \beta^2 &= \frac{a + \alpha}{1 + a\alpha} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Нетрудно убедиться, что система (7.7) имеет единственное решение при любом значении параметра  $a$ .

Сингулярные решения вида (7.4), существующие, как следует из изложенного, при любом значении  $a$ , при некоторых значениях параметра начальных условий  $c$  являются хорошей *локальной* аппроксимацией решения задачи Коши на некотором небольшом временном промежутке в окрестности момента "взрыва" решения.

## 8. Обобщенные симплектические функции 3-го ранга

Рассмотрение симплектической системы 3-го ранга (6.8), выполненное при тех же требованиях, которые описаны выше для системы 2-го ранга (однородность и "трилинейность" правых частей по  $x_i$  и  $y_i$ , отсутствие "самодействия", инвариантность относительно перестановки любой пары индексов  $1 \leftrightarrow 2$ ;  $2 \leftrightarrow 3$ ;  $3 \leftrightarrow 1$ ) приводит к следующей структуре обобщенной динамической системы 3-го ранга:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 x_3 (y_1 + a(y_2 + y_3)) \\ \dot{y}_1 &= -y_2 y_3 (x_1 + a(x_2 + x_3)) \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_3 (y_2 + a(y_1 + y_3)) \\ \dot{y}_2 &= -y_1 y_3 (x_2 + a(x_1 + x_3)) \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 (y_3 + a(y_1 + y_2)) \\ \dot{y}_3 &= -y_1 y_2 (x_3 + a(x_1 + x_2)) \end{aligned} \quad (8.1)$$

Динамическая система (8.1) обладает шестимерным фазовым пространством и пятимерным пространством параметров (системный параметр  $a$  и 4 начальных условия  $(x_{20}, y_{20}, x_{30}, y_{30})$ ). Траекторию в шестимерном пространстве  $\{x, y\}$  удобно рассматривать в проекциях в трехмерное пространство координат  $x$  и трехмерное импульсное пространство  $y$ . Определенное представление о решении дают также 15 двумерных проекций траектории на координатные плоскости  $\{x_i, x_j\}$   $i \neq j$ , импульсные плоскости  $\{y_i, y_j\}$   $i \neq j$  и фазовые плоскости  $\{x_i, y_j\}$ .

При некоторых начальных условиях шесть обобщенных симплектических функций периодичны, в других случаях они формируют устойчивый шестимерный кокон в фазовом пространстве. Одно из решений системы (8.1) представлено на рис. 32 ÷ 35.

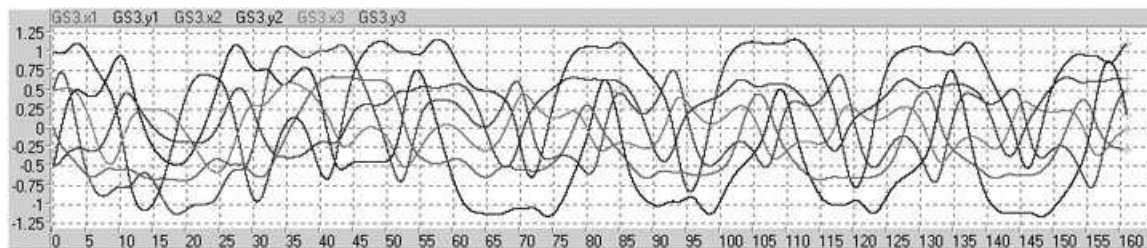


Рис. 32. Обобщенные симплектические функции ранга 3: GS3. Зависимость от времени.  $a = -0.5$ ;  $x_2(0) = y_2(0) = -0.5$ ;  $x_3(0) = y_3(0) = 0.5$ ;  $0 < t < 160$ . Финитные неперiodические осцилляции.

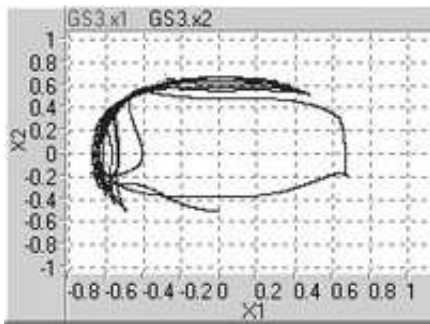


Рис. 33. Обобщенные симплектические функции ранга 3: GS3. Проекция 6-коккона решения (рис. 32) на координатную плоскость  $\{x_1, x_2\}$ .

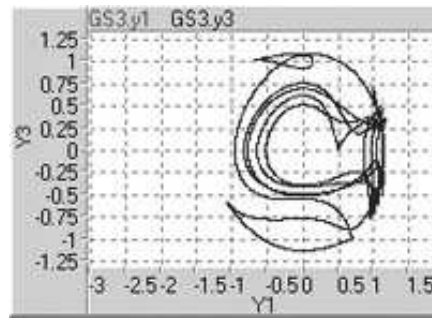


Рис. 34. Обобщенные симплектические функции ранга 3: GS3. Проекция 6-коккона решения (рис. 32) на импульсную плоскость  $\{y_1, y_3\}$ .

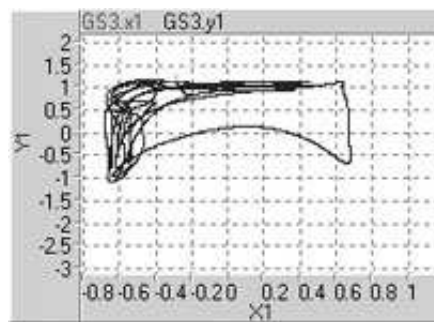


Рис. 35. Обобщенные симплектические функции ранга 3: GS3. Проекция 6-коккона решения (рис. 32) на фазовую плоскость  $\{x_1, y_1\}$ .

## 9. Благодарности

Численное исследование описанных в статье динамических систем проводилось с помощью программы SUPER-ELSY, созданной Энвером Кешфетдиновым (Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского) при подготовке в 2005/2006 уч.году магистерской работы, выполненной под руководством автора статьи. Программа SUPER-ELSY собрана на базе математического "конструктора" MVSTUDIUM (MVS). Пакет MVS разработан исследовательской группой "Моделирование сложных систем" факультета технической кибернетики СПб ГПУ. Автор признателен Энверу Кешфетдинову за создание программы SUPER-ELSY, а также разработчикам пакета MVSTUDIUM, использование которого делает возможным изучение динамических систем с непредсказуемо жестким поведением.

## 10. Заключение

Основным результатом данной статьи является введение новых динамических систем и их решений, специальных функций – суперэллиптических и симплектических, обладающих в определенных случаях периодическим поведением и некоторых их обобщений, обладающих сложным и хаотическим поведением, с финитными непериодическими осцилляциями.

Представляется перспективным тщательное численное изучение введенных здесь динамических систем и специальных функций.

### Список цитируемых источников

1. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра: Пер. с англ. Н.Я. Виленкина. – М.: Наука, 1965. – 286 с.
2. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стигана / Пер. с англ. под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
3. [http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Elliptic\\_functions.html](http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Elliptic_functions.html)
4. <http://www.amazon.com/gp/product/0521658179/102-7179032-3651324>
5. <http://www.du.edu/jcalvert/math/jacobi.html>
6. Гуревич А., Курант Э. Теория функций / Пер. с нем. М.А.Евграфова. – М.: Наука, 1968. – 648 с.
7. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М., Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1948. – 292 с.
8. Lang S. Elliptic functions. – N.Y.: Springer, 1987. – 344 p.
9. Hancock H. Lectures on the theory of elliptic functions. – N.Y., Dover Publ., 2004. – 528 p.
10. Carlson B. Three improvements in reduction and computation of elliptic integrals. – J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. 107 (2002). – p. 413–418.
11. Meger K. Jacobi elliptic functions from a Dynamical Systems point of view // Amer. Math. Monthly. – 2001. – V.108 – P. 729–737.
12. Rogava A.D. Special-relativistic model flows of viscous fluid. – <http://archiv.org/pdf/plasm-ph/9604003>.

Получено 30.11.2006