Динамические системы, вып. 26 (2009), 85–102

УДК 517.977.1

Асимптотичне розв'язання лінійної сингулярно збуреної задачі оптимального управління з виродженою матрицею при похідних

О.В. Тарасенко

Ніжинський державний університет ім. М. Гоголя,
Ніжин 16600. *E-mail: sanya2167@rambler.ru*

Анотація. Розглядається задача оптимального управління процесом, який описується лінійною системою диференціальних рівнянь з малим параметром і тотожно виродженою матрицею при похідних. Досліджується випадок, коли гранична в'язка матриць регулярна і має прості скінченні й нескінченний елементарні дільники. Застосувавши принцип максимуму Понтрягіна та методи асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь, побудовано асимптотичний розв'язок даної задачі.

Ключові слова: оптимальне управління, сингулярне збурення, регулярна в'язка матриць.

1. Постановка задачі

Розглянемо процес, який описується системою диференціальних рівнянь

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u, \tag{1}$$

де $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$ — квадратні матриці n-го порядку, $C(t,\varepsilon)$ — $(n\times m)$-матриця, $x(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор стану, $u(t,\varepsilon)$ — m-вимірний вектор управління, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малий параметр: $\varepsilon_0 \ll 1$; $h \in N$, $t \in [0;T]$.

Задача полягає у відшуканні такого управління $u(t,\varepsilon)$, під дією якого система переходить із стану

$$x(0,\varepsilon) = x_1(\varepsilon) \tag{2}$$

в стан

$$x(T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon) \tag{3}$$

за фіксований проміжок часу T, мінімізуючи квадратичний функціонал:

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h}\int\limits_0^T (D(t,\varepsilon)u,u)\,dt \to \min_u, \tag{4}$$

в якому $D(t,\varepsilon)$ — ермітова додатно визначена матриця m-го порядку.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1. Матриці $A(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$, $D(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра:
$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k A_k(t), \qquad C(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k C_k(t),$$
$$D(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k D_k(t). \tag{5}$$

2. Коефіцієнти $A_k(t)$, $C_k(t)$, $D_k(t)$, $k = 0, 1, 2, ...$, розвинень (5) нескінченно диференційовні на $[0;T]$.

3. $$det D_0(t) \neq 0, \forall t \in [0;T]. \tag{6}$$

4. $$det B(t) \equiv 0, \forall t \in [0;T]. \tag{7}$$

5. В'язка матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ регулярна на $[0;T]$ і має $n-1$ простих скінченних елементарних дільників $\lambda - \lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, та один — нескінченний.

6. Вектори $x_1(\varepsilon)$, $x_2(\varepsilon)$, які задають початковий і кінцевий стани, зображаються у вигляді розвинень
$$x_1(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_{1k}, \qquad x_2(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_{2k}. \tag{8}$$

7. Область допустимих значень для управління $u(t,\varepsilon)$ збігається з усім заданим m–вимірним простором.

Подібна задача, яка описується системою диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами та одиничною матрицею при похідних, розглядалась в [1], [2], де передбачалось, що всі власні значення матриці $A_0(t)$ уявні. В роботі [3] одержано критерії повного управління та спостережуваності для лінійних систем із змінними матричними коефіцієнтами та виродженою матрицею при похідних.

У даній статті вивчається можливість побудови асимптотичного розв'язку цієї задачі з використанням результатів асимптотичного аналізу лінійних сингулярно збурених систем з виродженнями, здійсненого в роботах [4], [5].

2. Деякі допоміжні перетворення

Застосувавши до даної задачі принцип максимуму Л.С. Понтрягіна [6], побудуємо функцію Гамільтона
$$H(t,x,y,u) = \varepsilon^{-h}(A(t,\varepsilon)x, y) + \varepsilon^{-h}(C(t,\varepsilon)u, y) - \frac{1}{2\varepsilon^h}(D(t,\varepsilon)u, u),$$
де y — n-вимірний вектор спряжених змінних.

Виходячи з результатів роботи [5], неважко показати, що за виконання умови 5 для мінімізації критерія (4) необхідно, щоб

$$grad_u H = \varepsilon^{-h} C^*(t,\varepsilon)y - \varepsilon^{-h} D(t,\varepsilon)u = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(B^*(t)y) = -grad_x H = -\varepsilon^{-h} A^*(t,\varepsilon)y$$

(символом X^* позначається матриця, спряжена з X).

Одержимо систему рівнянь

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u,$$

$$\varepsilon^h \frac{d}{dt}\left(B^*(t)y\right) = -A^*(t,\varepsilon)y,$$
$$0 = C^*(t,\varepsilon)y - D(t,\varepsilon)u.$$

За виконання попередніх умов дістанемо:

$$u(t,\varepsilon) = D^{-1}(t,\varepsilon)C^*(t,\varepsilon)y, \tag{9}$$

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + F(t,\varepsilon)y, \tag{10}$$

$$\varepsilon^h B^*(t)\frac{dy}{dt} = -\left[A^*(t,\varepsilon) + \varepsilon^h (B^*(t))'\right]y, \tag{11}$$

де $F(t,\varepsilon) = C(t,\varepsilon)D^{-1}(t,\varepsilon)C^*(t,\varepsilon)$.

Зауважимо, що завдяки умові (7) матрицю $D^{-1}(t,\varepsilon)$ можна подати у вигляді асимптотичного розвинення:

$$D^{-1}(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \tilde{D}_k(t), \tag{12}$$

де $\tilde{D}_k(t) = D_0^{-1}(t)\sum_{j=1}^{k}(-1)^j P_j^k(DD_0^{-1})$, а символом $P_j^k(DD_0^{-1})$ позначена сума всіх можливих добутків j множників $D_{i_1}D_0^{-1}, D_{i_2}D_0^{-1}, ..., D_{i_j}D_0^{-1}$ з натуральними індексами, сума яких $i_1+i_2+...+i_j = k$ (тут і надалі, де буде використовуватись подібний символ, за означенням покладемо $P_0^0(DD_0^{-1}) = E$, $P_0^k(DD_0^{-1}) = 0$ при $k > 0$, де E — одинична матриця, а 0 — нульова).

Введемо в розгляд $2n$–вимірний вектор

$$z = col(x,y). \tag{13}$$

Тоді рівняння (10), (11) можна записати у вигляді системи

$$\varepsilon^h \tilde{B}(t)\frac{dz}{dt} = \tilde{A}(t,\varepsilon)z, \tag{14}$$

де
$$\tilde{A}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{A}_k(t), \tag{15}$$
$$\tilde{A}_k(t)=\begin{pmatrix} A_k(t) & F_k(t) \\ 0 & -A_k^*(t)-\delta_{k,h}(B^*(t))' \end{pmatrix}, \qquad k=0,1,...,$$
$$\tilde{B}(t)=\begin{pmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & B^*(t) \end{pmatrix},$$
$F_k(t)$, $k=0,1,...,$ — коефіцієнти розвинення матриці $F(t,\varepsilon)$ за степенями ε, $\delta_{k,h}$ — символ Кронекера, а символом 0 позначено нульові блоки відповідних розмірів.

При цьому згідно з (2), (3) вектор $z(t,\varepsilon)$ має задовольняти крайову умову
$$Mz(0,\varepsilon)+Nz(T,\varepsilon)=\tilde{x}(\varepsilon), \tag{16}$$
де M, N — квадратні матриці $2n$–го порядку вигляду
$$M=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N=\begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\tilde{x}(\varepsilon)=col(x_1(\varepsilon),x_2(\varepsilon)).$$

Таким чином, задача оптимального управління (1)–(4) зводиться до двоточкової крайової задачі (14), (16). Для її розв'язання побудуємо спочатку асимптотику загального розв'язку основної системи (14), використовуючи ідеї робіт [4], [5].

3. Побудова загального асимптотичного розв'язку основної системи

Як відомо [4], [5], побудова асимптотичних розв'язків системи (14) залежить від структури спектра граничної в'язки матриць
$$\tilde{A}_0(t)-\lambda\tilde{B}(t). \tag{17}$$

Оскільки $det(\tilde{A}_0(t)-\lambda\tilde{B}(t))=(-1)^n det(A_0(t)-\lambda B(t))det(A_0^*(t)+\lambda B^*(t))$, то ця в'язка матриць (17) буде регулярною на $[0;T]$, а її скінченні елементарні дільники збігаються із скінченними елементарними дільниками в'язок $A_0(t)-\lambda B(t)$ та $A_0^*(t)-\lambda B^*(t)$.

У даній статті розглядатимемо випадок, коли всі скінченні елементарні дільники $\lambda-\lambda_i(t)$, $\lambda+\bar{\lambda}_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, є простими, тобто виконуються умови:
$$\lambda_i(t)-\lambda_j(t)\neq 0, \qquad i\neq j, \qquad i,j=\overline{1,n-1}, \qquad \forall t\in[0;T]; \tag{18}$$
$$\lambda_i(t)+\bar{\lambda}_j(t)\neq 0, \qquad i,j=\overline{1,n-1}, \qquad \forall t\in[0;T]. \tag{19}$$
Крім того, будемо передбачати, що
$$Re\lambda_i(t)<0, \qquad \forall t\in[0;T]. \tag{20}$$

Власні вектори матриці $A_0(t)$ відносно $B(t)$, що відповідають її власним значенням $\lambda_i(t)$, позначимо $\varphi_i(t)$, а відповідні базисні вектори нуль–простору матриці $(A_0(t)-\lambda_i B(t))^*$ — $\psi_i(t)$. Оскільки матриці $A_0(t)$, $B(t)$ нескінченно диференційовні на $[0;T]$, то функції $\lambda_i(t)$ також нескінченно диференційовні, а вектори $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, можна визначити так, щоб і вони були нескінченно диференційовними на заданому відрізку [9]. Крім того, їх можна вибрати так, щоб виконувалися співвідношення

$$(\varphi_i(t),\psi_j(t))=\delta_{ij},\qquad i,j=\overline{1,n-1}, \tag{21}$$

де δ_{ij} — символ Кронекера [5].

З умови 5 випливає, що нульовому власному значенню матриці $B(t)$ відповідає A_0–жорданів ланцюжок векторів завдовжки 1, що складається лише з власного вектора, який позначимо $\varphi(t)$. Елемент нуль–простору матриці $B^*(t)$ позначимо $\psi(t)$ і визначимо так, щоб виконувалось співвідношення

$$(A_0(t)\varphi(t),\psi(t))=1. \tag{22}$$

Крім того, обидва вектори $\varphi(t)$, $\psi(t)$ визначимо так, щоб вони були нескінченно диференційовними на $[0;T]$.

Виходячи з структури матриці $\tilde{B}(t)$, неважко переконатися, що її нульовому власному значенню відповідають два лінійно незалежні власні вектори

$$\tilde{\varphi}_1(t)=\begin{pmatrix}\varphi(t)\\0\end{pmatrix},\qquad \tilde{\varphi}_2(t)=\begin{pmatrix}0\\\psi(t)\end{pmatrix}.$$

Аналогічно визначимо й відповідні власні вектори матриці $\tilde{B}^*(t)$:

$$\tilde{\psi}_1(t)=\begin{pmatrix}\psi(t)\\0\end{pmatrix},\qquad \tilde{\psi}_2(t)=\begin{pmatrix}0\\\varphi(t)\end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що при досить малих ε матриця $\tilde{B}(t)$ не має приєднаних векторів відносно оператора $\tilde{L}(t,\varepsilon)=\tilde{A}(t,\varepsilon)-\varepsilon^h\tilde{B}(t)\frac{d}{dt}$, оскільки згідно з (22)

$$\left(\tilde{L}(t,\varepsilon)\tilde{\varphi}_1(t),\tilde{\psi}_1(t)\right)=\left(\tilde{A}(t,\varepsilon)\tilde{\varphi}_1(t),\tilde{\psi}_1(t)\right)-\varepsilon^h\left(\tilde{B}(t)\tilde{\varphi}_1{}'(t),\tilde{\psi}_1(t)\right)=$$

$$=(A_0(t)\varphi(t),\psi(t))+O(\varepsilon)=1+O(\varepsilon);$$

$$\left(\tilde{L}(t,\varepsilon)\tilde{\varphi}_2(t),\tilde{\psi}_2(t)\right)=-(A_0^*(t)\psi(t),\varphi(t))+O(\varepsilon)=$$

$$=-\overline{(A_0(t)\varphi(t),\psi(t))}+O(\varepsilon)=-1+O(\varepsilon).$$

Тому, як показано в [7], однорідна система (14) має загальний розв'язок типу Коші, який являє собою лінійну комбінацію її $(2n-2)$–х частинних лінійно незалежних розв'язків.

Виходячи з структури векторно–матричних рівнянь (10), (11), які утворюють систему (14), неважко переконатися, що ці розв'язки складаються з $n-1$ $2n$–вимірних векторів вигляду $col(x_i(t,\varepsilon),0)$, де $x_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$, — лінійно незалежні розв'язки n–вимірної однорідної системи

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon)x, \tag{23}$$

і $n-1$ $2n$–вимірних векторів вигляду $col(\tilde{x}_i(t,\varepsilon),y_i(t,\varepsilon))$, де $y_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$, — лінійно незалежні розв'язки спряженої системи (11), а $\tilde{x}_i(t,\varepsilon)$ — відповідні їм частинні розв'язки неоднорідної системи (10).

Згідно з результатами досліджень, викладених у роботі [5], $n-1$ лінійно незалежних розв'язків системи (23) можна побудувати у вигляді

$$x_i(t,\varepsilon)=\tilde{v}_i(t,\varepsilon)exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right),\qquad i=\overline{1,n-1}, \tag{24}$$

де $\tilde{v}_i(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\varepsilon)$ — скалярні функції, що зображаються формальними розвиненнями за степенями ε:

$$\tilde{v}_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{v}_k^{(i)}(t),\qquad i=\overline{1,n-1}; \tag{25}$$

$$\lambda_i(t,\varepsilon)=\lambda_i(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(t),\qquad i=\overline{1,n-1}. \tag{26}$$

Для визначення коефіцієнтів цих розвинень необхідно підставити (24) у систему (23) і в одержаній рівності прирівняти вирази при однакових степенях ε з урахуванням (5) та (25), (26).

У результаті отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$(A_0(t)-\lambda_i(t)B(t))\tilde{v}_0^{(i)}(t)=0,\qquad i=\overline{1,n-1}, \tag{27}$$

$$\left(A_0(t)-\lambda_i(t)B(t)\right)\tilde{v}_k^{(i)}(t)=b_k^{(i)}(t),\qquad k=1,2,...,\qquad i=\overline{1,n-1}, \tag{28}$$

де

$$b_k^{(i)}(t)=\lambda_k^{(i)}(t)B(t)\varphi_i(t)+g_k^{(i)}(t),\qquad k=1,2,...,\qquad i=\overline{1,n-1}, \tag{29}$$

$$g_k^{(i)}(t)=\sum_{s=1}^{k-1}\lambda_s^{(i)}(t)B(t)v_{k-s}^{(i)}(t)-\sum_{s=1}^{k}A_k(t)v_{k-s}^{(i)}(t)+B(t)\left(v_{k-h}^{(i)}(t)\right)',$$
$$k=1,2,...,\qquad i=\overline{1,n-1}. \tag{30}$$

Розв'язуючи її за алгоритмом, описним у [5], функції $\lambda_k^{(i)}(t)$, $k=1,2,...$, $i=\overline{1,n-1}$, знайдемо з умови сумісності рівнянь (28) (ортогональності їх правих частин до векторів $\psi_i(t)$):

$$\lambda_k^{(i)}(t)=-\left(g_k^{(i)}(t),\psi_i(t)\right),\qquad k\geq 1, \tag{31}$$

а вектори $\tilde{v}_k^{(i)}(t)$ — за рекурентними формулами

$$\tilde{v}_0^{(i)}(t) = \varphi_i(t), \qquad \tilde{v}_k^{(i)}(t) = H_i(t) b_k^{(i)}(t), \qquad k \geq 1, \tag{32}$$

де $H_i(t)$ — напівобернена матриця для матриці $A_0(t) - \lambda_i(t) B(t)$.

Для розв'язання поставленої задачі (1)–(4) формальні розв'язки (24) подамо у вигляді

$$x_i(t, \varepsilon) = v_i(t, \varepsilon) exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \left(\lambda_i(\tau) + \sum_{k=1}^{h-1} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(\tau) \right) d\tau \right), \tag{33}$$

приєднавши вираз $exp\left(\int\limits_0^t \sum_{k=h}^{\infty} \varepsilon^{k-h} \lambda_k^{(i)}(\tau)\right)$ до вектора $\tilde{v}_i(t, \varepsilon)$. З цією метою подамо його у вигляді формального ряду за степенями ε, поклавши

$$exp \left(\int_0^t \sum_{k=h}^{\infty} \varepsilon^{k-h} \lambda_k^{(i)}(\tau) d\tau \right) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s c_s^{(i)}(t). \tag{34}$$

Продиференціювавши обидві частини цієї рівності, маємо

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \left(c_s^{(i)}(t) \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_{k+h}^{(i)}(t) \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s c_s^{(i)}(t),$$

або

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \left(c_s^{(i)}(t) \right)' = \sum_{j=0}^{s} \varepsilon^j \lambda_{h+j}^{(i)}(t) c_{s-j}^{(i)}(t).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, дістанемо нескінченну систему лінійних диференціальних рівнянь, з якої визначаються функції $c_s^{(i)}(t)$:

$$\frac{dc_0^{(i)}(t)}{dt} = \lambda_h^{(i)}(t) c_0^{(i)}(t), \qquad i = \overline{1, n-1}; \tag{35}$$

$$\frac{dc_s^{(i)}(t)}{dt} - \lambda_h^{(i)}(t) c_s^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{s} \lambda_{h+j}^{(i)}(t) c_{s-j}^{(i)}(t), \qquad i = \overline{1, n-1}, \qquad s = 1, 2, ... \tag{36}$$

Перемноживши формальні ряди (25), (34), отримаємо відповідні розвинення для вектор–функцій $v_i(t, \varepsilon)$:

$$v_i(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k^{(i)}(t), \qquad i = \overline{1, n-1}, \tag{37}$$

коефіцієнти якого виражаються рекурентними формулами

$$v_0^{(i)}(t) = c_0^{(i)}(t) \varphi_i(t), \qquad i = \overline{1, n-1}, \tag{38}$$

$$v_k^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{k}c_j^{(i)}(t)\tilde{v}_{k-j}^{(i)}(t),\qquad k=1,2,...,\qquad i=\overline{1,n-1}. \tag{39}$$

Аналогічно будуються й $n-1$ лінійно незалежних розв'язків спряженої системи (11). Взявши до уваги, що власними значеннями граничної в'язки матриць $-A_0^*(t)-\lambda B^*(t)$ системи (11) будуть функції $-\bar{\lambda}_i(t)$, ці розв'язки побудуємо у вигляді

$$y_i(t,\varepsilon)=w_i(t,\varepsilon)exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\left(\bar{\lambda}_i(\tau)+\sum_{k=1}^{h-1}\varepsilon^k\tilde{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right),\qquad i=\overline{1,n-1}, \tag{40}$$

де $w_i(t,\varepsilon)$ — n–вимірні вектор–функції, які зображаються формальними розвиненнями

$$w_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k^{(i)}(t). \tag{41}$$

При цьому коефіцієнти $\tilde{\lambda}_k^{(i)}(t)$, $w_k^{(i)}(t)$ визначаються за рекурентними формулами:

$$\tilde{\lambda}_k^{(i)}(t)=\left(\tilde{g}_k^{(i)}(t),\varphi_i(t)\right)=\bar{\lambda}_k^{(i)}(t),\qquad k=1,2,...,\qquad i=\overline{1,n-1}; \tag{42}$$

$$w_k^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{k}\tilde{c}_j^{(i)}(t)\tilde{w}_{k-j}^{(i)}(t),\qquad k=0,1,2,...,\qquad i=\overline{1,n-1}; \tag{43}$$

$$\tilde{w}_0^{(i)}(t)=\psi_i(t),\qquad i=\overline{1,n-1}; \tag{44}$$

$$\tilde{w}_k^{(i)}(t)=H_i^*(t)\tilde{b}_k^{(i)}(t),\qquad k=1,2,...,\qquad i=\overline{1,n-1}; \tag{45}$$

$$\tilde{b}_k^{(i)}(t)=\tilde{\lambda}_k^{(i)}(t)B^*(t)\psi_i(t)-\tilde{g}_k^{(i)}(t),\qquad k=1,2,...,\qquad i=\overline{1,n-1}; \tag{46}$$

$$\tilde{g}_k^{(i)}(t)=-\sum\nolimits_{s=1}^{k-1}\tilde{\lambda}_s^{(i)}(t)B^*(t)\tilde{w}_{k-s}^{(i)}(t)+\sum\nolimits_{s=1}^{k}A_k^*(t)\tilde{w}_{k-s}^{(i)}(t)+\left(B^*(t)\tilde{w}_{k-h}^{(i)}(t)\right)',$$
$$k=1,2,...,\qquad i=\overline{1,n-1}, \tag{47}$$

а функції $\tilde{c}_k^{(i)}(t)$, $k=0,1,...,$ $i=\overline{1,n-1}$, — з диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\tilde{c}_0^{(i)}(t)}{dt}+\tilde{\lambda}_h^{(i)}(t)\tilde{c}_0^{(i)}(t)=0,\qquad i=\overline{1,n-1}; \tag{48}$$

$$\frac{d\tilde{c}_k^{(i)}(t)}{dt}+\tilde{\lambda}_h^{(i)}(t)\tilde{c}_k^{(i)}(t)=-\sum_{j=1}^{k}\tilde{\lambda}_{h+j}^{(i)}(t)\tilde{c}_{k-j}^{(i)}(t),\qquad k=1,2,...,\qquad i=\overline{1,n-1}. \tag{49}$$

Підставивши замість y у систему (10) вектор (40) і зафіксувавши індекс i, розглянемо неоднорідну систему

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon)x+F(t,\varepsilon)w_i(t,\varepsilon)exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\tilde{\lambda}_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \tag{50}$$

де

$$\tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon) = \bar{\lambda}_i(t) + \sum_{k=1}^{h-1} \varepsilon^k \bar{\lambda}_k^{(i)}(t). \tag{51}$$

Її розв'язок будемо шукати у вигляді

$$\tilde{x}_i(t,\varepsilon) = p_i(t,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_t^T \tilde{\lambda}_i(\tau,\varepsilon) d\tau\right), \tag{52}$$

де $p_i(t,\varepsilon)$ — n–вимірний вектор, що зображається у вигляді формального ряду

$$p_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k^{(i)}(t). \tag{53}$$

Для знаходження його коефіцієнтів підставимо (52), (53) у (50) і прирівняємо в одержаній рівності вирази при однакових степенях ε. Взявши до уваги умову (19), отримаємо такі рекурентні формули:

$$p_0^{(i)}(t) = G_i(t) F_0(t) w_0^{(i)}(t), \tag{54}$$

$$p_k^{(i)}(t) = G_i(t) d_k^{(i)}(t), \qquad k = 1,2,..., \tag{55}$$

$$d_k^{(i)}(t) = -\sum_{j=1}^{h-1} \bar{\lambda}_j^{(i)}(t) B(t) p_{k-j}^{(i)}(t) - \sum_{s=0}^{k} F_j(t) w_{k-j}(t) + B(t) \left(p_{k-h}^{(i)}(t)\right)', \quad k = 1,2,..., \tag{56}$$

де $G_i(t) = \left(A_0(t) + \bar{\lambda}_i(t) B(t)\right)^{-1}$.

Як показано в [5], за виконання умови (20) побудовані в такий спосіб формальні розв'язки систем (23), (11), (50) є асимптотичними розвиненнями деяких точних розв'язків цих систем при $\varepsilon \to 0$.

У результаті побудовано загальний асимптотичний розв'язок системи рівнянь (10), (11), який запишемо у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i(t,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t \left(\lambda_i(\tau) + \sum_{k=1}^{h-1} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(\tau)\right) d\tau\right) \alpha_1^{(i)}(\varepsilon) + \sum_{i=1}^{n-1} p_i(t,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_t^T \left(\bar{\lambda}_i(\tau) + \sum_{k=1}^{h-1} \varepsilon^k \bar{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\right) d\tau\right) \alpha_2^{(i)}(\varepsilon), \tag{57}$$

$$y(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} w_i(t,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_t^T \left(\bar{\lambda}_i(\tau) + \sum_{k=1}^{h-1} \varepsilon^k \bar{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\right) d\tau\right) \alpha_2^{(i)}(\varepsilon), \tag{58}$$

де $\alpha_1^{(i)}(\varepsilon)$, $\alpha_2^{(i)}(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$, — сталі множники, для знаходження яких використаємо крайові умови (2), (3).

4. Асимптотика розв'язку крайової задачі

Підставивши (57) у (2), (3), дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n-1} v_i(0,\varepsilon)\alpha_1^{(i)}(\varepsilon) + \sum_{i=1}^{n-1} p_i(0,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^T \left(\bar{\lambda}_i(t) + \sum_{k=1}^{h-1}\varepsilon^k \bar{\lambda}_k^{(i)}(t)\right)dt\right)\alpha_2^{(i)}(\varepsilon) = x_1(\varepsilon); \tag{59}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} v_i(T,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^T \left(\lambda_i(t) + \sum_{k=1}^{h-1}\varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t)\right)dt\right)\alpha_1^{(i)}(\varepsilon) + \sum_{i=1}^{n-1} p_i(T,\varepsilon)\alpha_2^{(i)}(\varepsilon) = x_2(\varepsilon), \tag{60}$$

або у векторно-матричній формі

$$Q(\varepsilon)\tilde{\alpha}(\varepsilon) = \tilde{x}(\varepsilon), \tag{61}$$

де

$$Q(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k Q_k(\varepsilon), \tag{62}$$

$$Q_k(\varepsilon) = \begin{pmatrix} V_k(0) & P_k(0) exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^T \bar{\Lambda}(t,\varepsilon)dt\right) \\ V_k(T) exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^T \Lambda(t,\varepsilon)dt\right) & P_k(T) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\alpha}(\varepsilon) = col(\alpha_1(\varepsilon), \alpha_2(\varepsilon)),$$

$$\alpha_1(\varepsilon) = col\left(\alpha_1^{(1)}(\varepsilon), ..., \alpha_1^{(n-1)}(\varepsilon)\right), \qquad \alpha_2(\varepsilon) = col\left(\alpha_2^{(1)}(\varepsilon), ..., \alpha_2^{(n-1)}(\varepsilon)\right),$$

$$V_k(t) = \left[v_k^{(1)}(t), v_k^{(2)}(t), ..., v_k^{(n-1)}(t)\right], \qquad k = 0, 1, 2, ...;$$

$$P_k(t) = \left[p_k^{(1)}(t), p_k^{(2)}(t), ..., p_k^{(n-1)}(t)\right], \qquad k = 0, 1, 2, ...;$$

$$\Lambda(t,\varepsilon) = \Lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{h-1}\varepsilon^k \Lambda_k(t), \qquad \Lambda_0(t) = diag\left\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_{n-1}(t)\right\},$$

$$\Lambda_k(t) = diag\left\{\lambda_k^{(1)}(t), \lambda_k^{(2)}(t), ..., \lambda_k^{(n-1)}(t)\right\}, \qquad k = \overline{1, h-1}.$$

Зокрема,

$$V_0(t) = \left[c_0^{(1)}(t)\varphi_1(t), c_0^{(2)}(t)\varphi_2(t), ..., c_0^{(n-1)}(t)\varphi_{n-1}(t)\right],$$

$$P_0(t) = \left[\tilde{c}_0^{(1)}(t)G_1(t)F_0(t)\psi_1(t), ..., \tilde{c}_0^{(n-1)}(t)G_{n-1}(t)F_0(t)\psi_{n-1}(t)\right],$$

де $F_0(t) = C_0(t)D_0^{-1}(t)C_0^*(t)$.

Припустимо, що виконується умова:

8. Вектори $G_i(T)F_0(T)\psi_i(T)$, $i=\overline{1,n-1}$ лінійно незалежні.

Тоді завдяки лінійній незалежності власних векторів $\varphi_i(0)$, $i=\overline{1,n-1}$, ранг прямокутної $2n\times(2n-2)$–матриці $Q_0(\varepsilon)$ дорівнює $2n-2$ при досить малих $\varepsilon\geq 0$ оскільки

$$Q_0(\varepsilon)=\begin{pmatrix} V_0(0) & 0 \\ 0 & P_0(T)\end{pmatrix}+O\left(e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon^h}}\right),\qquad \gamma>0.$$

Тому при досить малих ε ранг матриці $Q(\varepsilon)$, яка зображається асимптотичним рядом (62), також дорівнює $2n-2$. Таким же буде й ранг спряженої з нею матриці $Q^*(\varepsilon)$, звідки випливає, що розмірність її нуль–простору дорівнює 2.

Нехай $g_1(\varepsilon)$, $g_2(\varepsilon)$ — $2n$–вимірні вектори, що утворюють базис цього простору. Виходячи з (62), їх можна подати у вигляді асимптотичних рядів

$$g_i(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k g_k^{(i)}(\varepsilon),\qquad i=1,2, \tag{63}$$

коефіцієнти яких знайдемо з системи рівнянь

$$\begin{aligned} &Q_0^*(\varepsilon)g_0^{(i)}(\varepsilon)=0,\\ &Q_0^*(\varepsilon)g_k^{(i)}(\varepsilon)=-\textstyle\sum_{s=1}^{k}Q_s^*(\varepsilon)g_{k-s}^{(i)}(\varepsilon),\qquad k=1,2,.... \end{aligned} \tag{64}$$

Оскільки всі стовпці матриці $Q_0(\varepsilon)$ лінійно незалежні при досить малих $\varepsilon>0$ і, отже, її нуль–простір містить лише нульовий вектор, то рівняння (64) розв'язні, і вектори $g_k^{(i)}(\varepsilon)$ з них можна виразити за допомогою рекурентних формул

$$g_k^{(i)}(\varepsilon)=-(Q_0^*(\varepsilon))^+\sum_{s=1}^{k}Q_s^*(\varepsilon)g_{k-s}^{(i)}(\varepsilon),\qquad k=1,2,...,$$

де $(Q_0^*(\varepsilon))^+$ — псевдообернена матриця до матриці $Q_0^*(\varepsilon)$.

Виражаючи послідовно $g_1^{(i)}(\varepsilon),g_2^{(i)}(\varepsilon),...$ через $g_0^{(i)}(\varepsilon)$, останню формулу перетворимо до вигляду

$$g_k^{(i)}(\varepsilon)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^jP_j^k\left(\left(Q_0^*(\varepsilon)\right)^+Q^*(\varepsilon)\right)g_0^{(i)}(\varepsilon),\qquad i=1,2, \tag{65}$$

де символом $P_j^k((Q_0^*)^+Q^*)$ позначена сума всіх можливих добутків j множників $((Q_0^*)^+Q_{s_1}^*),...,((Q_0^*)^+Q_{s_j}^*)$, сума індексів яких $s_1+s_2+...+s_j=k$, а $g_0^{(i)}(\varepsilon)$, $i=1,2$, — фіксовані базисні вектори з нуль–простору матриці $Q_0^*(\varepsilon)$.

Рівняння (61) буде розв'язним відносно $(2n-2)$–вимірного вектора $\tilde{\alpha}(\varepsilon)$ тоді і тільки тоді, коли вектор $\tilde{x}(\varepsilon)$ буде ортогональним до векторів $g_i(\varepsilon)$, $i=1,2$, тобто, коли виконуватимуться рівності

$$(\tilde{x}(\varepsilon),g_i(\varepsilon))=0,\qquad i=1,2.$$

Підставивши в ці рівності розвинення (8), (63) і прирівнявши вирази при однакових степенях ε, маємо

$$\sum_{s=0}^{k}\left(\tilde{x}_j, g_{k-s}^{(i)}(\varepsilon)\right) = 0, \qquad k = 0, 1, ..., \qquad i = 1, 2.$$

Нарешті, врахувавши (65), дістанемо

$$\sum_{s=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}(-1)^j\left(P_j^{k-s}\left(Q(\varepsilon)Q_0^{+}(\varepsilon)\right)\tilde{x}_j, g_0^{(i)}(\varepsilon)\right) = 0, \qquad k = 0, 1, ..., \qquad i = 1, 2, \quad (66)$$

де $P_j^{k-s}((Q(\varepsilon)Q_0^{+}(\varepsilon))$ — сума всіх можливих добутків j множників $Q_i(\varepsilon)Q_0^{+}(\varepsilon)$ з натуральними індексами, сума яких дорівнює $k-s$, $\tilde{x}_j = col(x_{1j}, x_{2j})$, $j = 0, 1, ...$

Припустимо тепер, що умова (66) виконується. Тоді розв'язок рівняння (61) будемо шукати у вигляді асимптотичного ряду

$$\tilde{\alpha}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{\alpha}_k(\varepsilon), \quad (67)$$

де

$$\tilde{\alpha}_k(\varepsilon) = col(\alpha_{1k}(\varepsilon), \alpha_{2k}(\varepsilon)), \qquad k = 0, 1, ...;$$

$$\alpha_{ik}(\varepsilon) = col\left(\alpha_{ik}^{(1)}(\varepsilon), \alpha_{ik}^{(2)}(\varepsilon), ..., \alpha_{ik}^{(n-1)}(\varepsilon)\right), \qquad k = 0, 1, ..., \qquad i = 1, 2.$$

Підставивши (67) у (61) і прирівнявши вирази при однакових степенях ε, маємо

$$Q_0(\varepsilon)\tilde{\alpha}_0(\varepsilon) = \tilde{x}_0(\varepsilon), \quad (68)$$

$$Q_0(\varepsilon)\tilde{\alpha}_k(\varepsilon) = \tilde{x}_k(\varepsilon) - \sum_{j=1}^{k}Q_j(\varepsilon)\tilde{\alpha}_{k-j}(\varepsilon), \qquad k = 1, 2, ... \quad (69)$$

Згідно з умовою (66) рівняння (68) однозначно розв'язне і має єдиний розв'язок, який виражається формулою

$$\tilde{\alpha}_0(\varepsilon) = Q_0^{+}(\varepsilon)\tilde{x}_0(\varepsilon).$$

Підставивши цей вираз у рівняння (69) при $k = 1$, дістанемо рівняння відносно вектора $\tilde{\alpha}_1(\varepsilon)$:

$$Q_0(\varepsilon)\tilde{\alpha}_1(\varepsilon) = \tilde{x}_1(\varepsilon) - Q_1(\varepsilon)Q_0^{+}(\varepsilon)\tilde{x}_0(\varepsilon),$$

яке також буде однозначно розв'язним завдяки виконанню умови (66). З нього знайдемо

$$\tilde{\alpha}_1(\varepsilon) = Q_0^{+}(\varepsilon)\tilde{x}_1(\varepsilon) - Q_0^{+}(\varepsilon)Q_1(\varepsilon)Q_0^{+}(\varepsilon)\tilde{x}_0(\varepsilon).$$

Продовжуючи так і далі, методом математичної індукції встановимо, що всі рівняння (69) розв'язні, а вектори $\tilde{\alpha}_k(\varepsilon)$ виражаються з них за формулами

$$\tilde{\alpha}_k(\varepsilon) = \sum_{s=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-s} (-1)^j Q_0^+(\varepsilon) P_j^{k-s} \left(Q(\varepsilon) Q_0^+(\varepsilon)\right) \tilde{x}_s, \qquad k = 0, 1, ... \tag{70}$$

Покажемо, що побудована описаним способом вектор–функція (57) є асимптотичним розвиненням шуканої траєкторії, яка переводить дану систему із стану $x_1(\varepsilon)$ в стан $x_2(\varepsilon)$, а вектор–функція

$$u(t,\varepsilon) = D^{-1}(t,\varepsilon) C^*(t,\varepsilon) \sum_{i=1}^{n-1} w_i(t,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^T \left(\bar{\lambda}_i(\tau) + \sum_{k=1}^{h-1} \varepsilon^k \bar{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\right) d\tau\right) \alpha_2^{(i)}(\varepsilon) \tag{71}$$

— асимптотичним зображенням відповідного оптимального управління, за допомогою якого здійснюється цей перехід.

З цією метою перетворимо вираз (57), перемноживши відповідні ряди, якими зображаються вектор–функції $v_i(t,\varepsilon)$, $p_i(t,\varepsilon)$ і скалярні множники $\alpha_1(i)(\varepsilon)$, $\alpha_2^{(i)}(\varepsilon)$. Отримаємо

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) = \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i(t,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t \left(\lambda_i(\tau) + \sum_{k=1}^{h-1} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(\tau)\right) d\tau\right) + \\ + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{x}_i(t,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_t^T \left(\bar{\lambda}_i(\tau) + \sum_{k=1}^{h-1} \varepsilon^k \bar{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\right) d\tau\right), \end{aligned} \tag{72}$$

де

$$x_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k^{(i)}(t,\varepsilon), \qquad \tilde{x}_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{x}_k^{(i)}(t,\varepsilon), \qquad i = \overline{1, n-1}; \tag{73}$$

$$x_k^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{k} v_j^{(i)}(t) \alpha_{1,k-j}^{(i)}(\varepsilon), \qquad k = 0, 1, ..., \qquad i = \overline{1, n-1}; \tag{74}$$

$$\tilde{x}_k^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{k} p_j^{(i)}(t) \alpha_{2,k-j}^{(i)}(\varepsilon), \qquad k = 0, 1, ..., \qquad i = \overline{1, n-1}. \tag{75}$$

Аналогічним чином перетворимо й вираз (58):

$$y(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i(t,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^T \left(\bar{\lambda}_i(\tau) + \sum_{k=1}^{h-1} \varepsilon^k \bar{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\right) d\tau\right), \tag{76}$$

де

$$y_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k^{(i)}(t,\varepsilon), \qquad i = \overline{1, n-1}; \tag{77}$$

$$y_k^{(i)}(t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{k} w_j^{(i)}(t)\alpha_{2,k-j}^{(i)}(\varepsilon), \qquad k=0,1,..., \qquad i=\overline{1,n-1}. \tag{78}$$

Позначимо $x^{(m)}(t,\varepsilon)$, $y^{(m)}(t,\varepsilon)$ — m–наближення, які утворюються з (72), (76) шляхом обривання відповідних розвинень (73), (77) на m–у члені:

$$\begin{gathered}x^{(m)}(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k x_k^{(i)}(t,\varepsilon)exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\left(\lambda_i(\tau)+\sum_{k=1}^{h-1}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right)+\\+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k \tilde{x}_k^{(i)}(t,\varepsilon)exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\left(\bar{\lambda}_i(\tau)+\sum_{k=1}^{h-1}\varepsilon^k\bar{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right),\end{gathered} \tag{79}$$

$$y^{(m)}(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k y_k^{(i)}(t,\varepsilon)exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\left(\bar{\lambda}_i(\tau)+\sum_{k=1}^{h-1}\varepsilon^k\bar{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right). \tag{80}$$

За побудовою завдяки умові (20) вектор–функції (79), (80) задовольняють відповідні рівняння (10), (11) та крайові умови (2), (3) з точністю до $O(\varepsilon^{m+1})$. Тому з такою ж точністю $2n$–вимірний вектор

$$z_m(t,\varepsilon)=col\left(x^{(m)}(t,\varepsilon),y^{(m)}(t,\varepsilon)\right) \tag{81}$$

задовольняє систему рівнянь (14) і крайову умову (16), тобто

$$\varepsilon^h\tilde{B}(t)\frac{dz_m(t,\varepsilon)}{dt}=\tilde{A}(t,\varepsilon)z_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}f(t,\varepsilon), \tag{82}$$

$$Mz_m(0,\varepsilon)+Nz_m(T,\varepsilon)=\tilde{x}(\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}\beta(\varepsilon), \tag{83}$$

де $f(t,\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ — деякі обмежені $2n$-вимірні вектори.

Нехай $z(t,\varepsilon)=col(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon))$ — точний розв'язок крайової задачі (14), (16), існування і єдиність якого забезпечується виконанням умови (66).

Тоді, позначивши

$$z_m(t,\varepsilon)-z(t,\varepsilon)=\tilde{z}(t,\varepsilon), \tag{84}$$

маємо однозначно розв'язну крайову задачу

$$\varepsilon^h\tilde{B}(t)\frac{d\tilde{z}(t,\varepsilon)}{dt}=\tilde{A}(t,\varepsilon)\tilde{z}(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}f(t,\varepsilon), \tag{85}$$

$$M\tilde{z}(0,\varepsilon)+N\tilde{z}(T,\varepsilon)=\varepsilon^{m+1}\beta(\varepsilon). \tag{86}$$

Позначимо $X_m(t,\varepsilon)$, $Y_m(t,\varepsilon)$, $P_m(t,\varepsilon)$ — $n\times(n-1)$–матриці, складені з вектор–функцій

$$\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k v_k^{(i)}(t)exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\left(\lambda_i(\tau)+\sum_{k=1}^{h-1}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right), \qquad i=\overline{1,n-1};$$

$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k w_k^{(i)}(t) exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T \left(\bar{\lambda}_i(\tau) + \sum_{k=1}^{h-1}\varepsilon^k \bar{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\right) d\tau\right), \qquad i=\overline{1,n-1};$$

$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k p_k^{(i)}(t) exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T \left(\bar{\lambda}_i(\tau) + \sum_{k=1}^{h-1}\varepsilon^k \bar{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\right) d\tau\right), \qquad i=\overline{1,n-1},$$

відповідно, і утворимо з них матрицю

$$Z_m(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} X_m(t,\varepsilon) & R_m(t,\varepsilon) \\ 0 & Y_m(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$$

розмірністю $2n \times (2n-2)$. Тоді, як показано в [5], фундаментальна матриця $Z(t,\varepsilon)$ однорідної системи (14) задається асимптотичною формулою

$$Z(t,\varepsilon) = Z_m(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{m+1-h}\right). \tag{87}$$

Аналогічною зображається й фундаментальна матриця системи

$$\varepsilon^h \frac{d}{dt}\left(\tilde{B}^*(t)\tilde{z}\right) = -\tilde{A}^*(t,\varepsilon)\tilde{z},$$

спряженої з (14):

$$\tilde{Z}(t,\varepsilon) = \tilde{Z}_m(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{m+1-h}\right), \tag{88}$$

де $\tilde{Z}_m(t,\varepsilon)$, як і $Z_m(t,\varepsilon)$, обмежена на $[0;T]$ при $\varepsilon \to 0$ завдяки умові (20) та неперервності по t всіх її елементів.

Використовуючи формули (87), (88), згідно з [5], отримаємо такий вираз для загального розв'язку системи (85):

$$\tilde{z}(t,\varepsilon) = \left[Z_m(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{m+1-h}\right)\right] c(\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\int_0^t \left(Z_m(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{m+1-h}\right)\right) \times$$

$$\times \left(\tilde{Z}_m^*(\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1-h})\right) f(\tau,\varepsilon)d\tau - \varepsilon^{m+1}\Phi(t)\left(\Psi^*(t)\tilde{L}(t,\varepsilon)\Phi(t)\right)^{-1}\Psi^*(t)f(t,\varepsilon),$$

де $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ — прямокутні матриці розмірністю $2n \times 2$, складені з вектор–стовпців $\tilde{\varphi}_1(t)$, $\tilde{\varphi}_2(t)$ та $\tilde{\psi}_1(t)$, $\tilde{\psi}_2(t)$ відповідно, а $c(\varepsilon)$ — довільний $(2n-2)$–вимірний вектор.

Враховуючи обмеженість усіх матричних і векторних функцій, що утворюють даний вираз, запишемо його у вигляді

$$\tilde{z}(t,\varepsilon) = \left(Z_m(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{m+1-h}\right)\right) c(\varepsilon) + \varepsilon^{m+1-h} q(t,\varepsilon), \tag{89}$$

де $q(t,\varepsilon)$ — деяка обмежена $2n$–вимірна вектор–функція.

Підставивши даний вираз у крайову умову (86), матимемо

$$M\Big(\left[Z_m(0,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{m+1-h}\right)\right] c(\varepsilon) + \varepsilon^{m+1-h} q(0,\varepsilon)\Big) + N\Big(\left[Z_m(T,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{m+1-h}\right)\right] \times$$

$$\times\, c(\varepsilon) + \varepsilon^{m+1-h} q(T,\varepsilon)\Big) = \varepsilon^{m+1}\beta(\varepsilon).$$

Враховуючи структуру матриць M, N та $Z_m(t,\varepsilon)$, дістанемо

$$\left(\begin{pmatrix} V_m(0,\varepsilon) & P_m(0,\varepsilon)exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^T \bar{\Lambda}(t,\varepsilon)dt\right) \\ V_m(T,\varepsilon)exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^T \Lambda(t,\varepsilon)dt\right) & P_m(T,\varepsilon) \end{pmatrix} + O\left(\varepsilon^{m+1-h}\right)\right)\times$$

$$\times\, c(\varepsilon) = \varepsilon^{m+1-h}\tilde{\beta}(\varepsilon),$$

де

$$V_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k V_k(t), \qquad P_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k P_k(t),$$

або

$$\left(Q^{(m)}(\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{m+1-h}\right)\right)c(\varepsilon) = \varepsilon^{m+1-h}\tilde{\beta}(\varepsilon),$$

де $Q^{(m)}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k Q_k(\varepsilon)$, $\tilde{\beta}(\varepsilon)$ — обмежений вектор, а $Q_k(\varepsilon)$ — ті самі матриці, що й у рівнянні (61).

Вектор $c(\varepsilon)$ звідси визначимо за формулою

$$c(\varepsilon) = \varepsilon^{m+1-h}\left[Q^{(m)}(\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1-h})\right]^{+}\tilde{\beta}(\varepsilon),$$

де $[Q^{(m)}(\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1-h})]^{+}$ — псевдообернена матриця до матриці $Q^{(m)}(\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1-h})$. Виходячи з означення псевдооберненої матриці і формули для її обчислення, наведеної в [8], легко переконатися, що $[Q^{(m)}(\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1-h})]^{+} = Q_0^{+}(\varepsilon) + O(\varepsilon)$, де $Q_0^{+}(\varepsilon)$ — обмежена матриця. Отже,

$$c(\varepsilon) = \varepsilon^{m+1-h}\gamma(\varepsilon), \tag{90}$$

де $\gamma(\varepsilon)$ — деякий вектор, обмежений при $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$.

Підставивши (90) у (89), дістанемо

$$\tilde{z}(t,\varepsilon) = \varepsilon^{m+1-h}\left[Z_m(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{m+1-h}\right)\right]\gamma(\varepsilon) + \varepsilon^{m+1-h}q(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{m+1-h}).$$

Отже, згідно з (84) розв'язок крайової задачі (14), (16) виражається асимптотичною формулою

$$z(t,\varepsilon) = z_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1-h}). \tag{91}$$

5. Формулювання основного результату

З формули (91), згідно з (13), отримуємо такі асимптотичні формули для шуканої траєкторії $x(t,\varepsilon)$ та вектора спряжених змінних $y(t,\varepsilon)$:

$$x(t,\varepsilon) = x^{(m)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1-h}), \qquad y(t,\varepsilon) = y^{(m)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1-h}), \tag{92}$$

де $x^{(m)}(t,\varepsilon)$, $y^{(m)}(t,\varepsilon)$ — відповідні m–наближення (79), (80).

Із врахуванням (92), (71), (12) дістанемо аналогічну формулу й для вектора управління:

$$u(t,\varepsilon) = u^{(m)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1-h}), \tag{93}$$

де

$$u^{(m)}(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k u_k^{(i)}(t,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\left(\bar{\lambda}_i(\tau) + \sum_{k=1}^{h-1}\varepsilon^k\bar{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right), \tag{94}$$

$$u_k^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{k}\sum_{s=0}^{k-j}\tilde{D}_j(t)C_s^*(t)y_{k-j-s}^{(i)}(t,\varepsilon), \qquad k=0,1,..., \qquad i=\overline{1,n-1}. \tag{95}$$

У результаті приходимо до такої теореми.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1—8, (18)—(20) і вектори $x_1(\varepsilon)$, $x_2(\varepsilon)$ задовольняють рівності (66), то при досить малих ε задача оптимального управління (1)—(4) має єдиний розв'язок, який задається асимптотичними формулами*

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k x_k^{(i)}(t,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\left(\lambda_i(\tau) + \sum_{k=1}^{h-1}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k \tilde{x}_k^{(i)}(t,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\left(\bar{\lambda}_i(\tau) + \sum_{k=1}^{h-1}\varepsilon^k\bar{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right) + O\left(\varepsilon^{m+1-h}\right),$$

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k u_k^{(i)}(t,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\left(\bar{\lambda}_i(\tau) + \sum_{k=1}^{h-1}\varepsilon^k\bar{\lambda}_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right) + O\left(\varepsilon^{m+1-h}\right),$$

коефіцієнти яких $x_k^{(i)}(t,\varepsilon)$, $\tilde{x}_k^{(i)}(t,\varepsilon)$, $u_k^{(i)}(t,\varepsilon)$, $k=\overline{0,m}$, $i=\overline{1,n-1}$, $\lambda_k^{(i)}(t)$, $k=\overline{1,h-1}$, $i=\overline{1,n-1}$, визначаються за допомогою рекурентних формул (74), (38), (39),(29)–(32); (75), (55), (56), (43)–(47); (95), (78) та диференціальних рівнянь (35), (36), (48), (49).

Перелік цитованих джерел

1. *Шкиль Н.И., Лейфура В.Н.* Об асимптотическом решении задачи оптимального управления для систем с медленноменяющимися коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А — 1976. — № 7. — С. 604 – 608.
2. *Шкиль Н.И., Лейфура В.Н.* К вопросу об асимптотическом решении задачи оптимального управления системами с медленноменяющимися коэффициентами в случае кратных корней // Межвед. респ. сб.: Вычисл. и прикл. математика. — К., 1977. — вып. 31. — С. 81 – 92.
3. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003. — 320 с.

4. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — К.: Вища шк., 1991. — 207 с.
5. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковецъ В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — К.: Вища школа, 2000. — 294 с.
6. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1983. — 392 с.
7. *Самойленко А.М., Яковец В.П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Докл. АН Украины. — 1993. – № 4. – с. 10 – 15.
8. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно–обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — К., 1995.
9. *Sibuya Y.* Some global properties of matrixes of functions of one variable // Math. Anal. — 1965. — 161, N 1. — P. 67 – 77.

Получена 18.06.2009