

УДК 517.9+530.1

Анализ автомодельных режимов горения вдоль полосы

О.В. Шиян

Крымский институт бизнеса,
Симферополь, 95047. E-mail: *olgshiiyan@yandex.ru*

Аннотация. Для распределенной автоколебательной системы, состоящей из диффузионно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля и описывающей движение фронта горения, проводится численно-аналитический анализ периодических по времени устойчивых пространственно неоднородных решений. Эти решения возникают при потере устойчивости пространственно однородного режима автоколебаний.

Ключевые слова: горение, бифуркация, периодические решения, автомодельные циклы, орбитальная устойчивость, параболические уравнения.

1. Введение

Эволюцию фронта безгазового горения феноменологически описывает уравнение [2, 6]

$$\ddot{\xi} + \xi = 2\delta \left(\dot{\xi} - \frac{4}{3}(\dot{\xi})^3 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \xi + \frac{\lambda\beta}{2\pi} \sqrt{-\Delta \xi} \dot{\xi} \right), \quad (1)$$

где ξ — отклонение положения фронта от невозмущенного, соответствующего стационарному режиму. Здесь точка означает дифференцирование по времени t , $\lambda > 0$ — корреляционная длина теплопроводностной связи соседних участков фронта, $\beta > 0$ — коэффициент нелокальной связи участков фронта, $0 < \delta \ll 1$ — инкремент неустойчивости, Δ — одномерный лапласиан.

Исследование решений (1) на окружности радиуса R типа бегущих волн представляет интерес, поскольку эти решения соответствуют спиновым волнам горения кругового цилиндра радиуса R . В [2] установлено, что число бегущих волн (1) на окружности радиуса R неограниченно увеличивается при увеличении R и фиксированных прочих параметрах. Необходимое условие устойчивости m -ой спиновой волны было получено в [2], а критерии её устойчивости установлены в [7, 1] ($\beta = 0$), [10] ($\beta \geq 0$).

В данной работе уравнение (1) рассматривается на отрезке длины l с крайними условиями:

$$\left. \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

Задача (1), (2) в случае $\beta = 0$ рассматривалась в [9, 6] в связи исследованием горения теплоизолированной полосы ширины l . Согласно [9, 6] задача (1), (2) имеет

решения в виде стоячих волн. Все они неустойчивы, за исключением решения $\xi_0 = \cos t + O(\delta)$ — синфазной волны.

При $\beta > 0$ пространственно однородный цикл теряет устойчивость [4] тогда, когда параметр $\rho = 2\pi l/\lambda$ возрастая, проходит бифуркационное значение $\rho_0 = \frac{1}{\beta}$. При этом от ξ_0 ответвляются два пространственно неоднородных (автомодельных) экспоненциально орбитально устойчивых циклов, переходящих друг в друга при преобразовании $x \rightarrow l-x$. Форма этих циклов при малых $\rho - \rho_0$ вполне определяется двумя параметрами. При увеличении ρ и отходе от ρ_0 динамика автомодельных циклов зависит от параметра β . Существует β^* такое, что при $\beta \in (0, \beta^*)$ автомодельные циклы сохраняют устойчивость на достаточно большом промежутке изменения бифуркационного параметра ρ . Если же $\beta > \beta^*$, то тогда существует значение $\tilde{\rho}(\beta)$ такое, что при $\rho = \tilde{\rho}(\beta)$ автомодельные циклы устойчивость теряют.

Статья организована следующим образом. В первом разделе устанавливаются условия, обеспечивающие локальную разрешимость начально-краевой задачи. Во втором разделе приведены результаты аналитического исследования характера устойчивости упрощенной двухмодовой аппроксимации задачи (1), (2). В третьем разделе исследуется четырехмодовая модель. В четвертом разделе приведены результаты численного анализа восьмимодовой аппроксимации Галеркина задачи (1), (2). В заключении подчеркнуты основные результаты работы.

2. Существование и единственность решения

Задача (1), (2) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= p, \\ \dot{p} &= -\xi + 2\delta \left(p \left(1 - \frac{4}{3} p^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta p + \frac{\lambda\beta}{2\pi} \sqrt{-\Delta} p \right), \\ \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (1), (2) или (3) рассматривается при начальных условиях:

$$\xi \Big|_{t=0} = \xi_0, \quad \dot{\xi} \Big|_{t=0} = p_0, \quad \text{или} \quad \xi \Big|_{t=0} = \xi_0, \quad p \Big|_{t=0} = p_0, \quad (4)$$

Обозначим, следуя [3, см. I.5], $H^s, s \geq 0$, шкалу пространств, порожденную на $[0, l]$ оператором $-\Delta$ при условии (2) (Δ — одномерный лапласиан). Норма в H^s определяется равенством $\|u\|_S^2 = \langle -\Delta^s u, u \rangle + \langle u, u \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в пространстве $H = L_2(0, l)$.

Система (3) является системой спаренных "обыкновенного" и "параболического" уравнений. Следуя [12, см. 3.4], приходим к заключению о существовании и единственности решения (3), (4) при $\xi_0 \in H, p_0 \in H^1$. Итак, система (3) или, что

то же самое, (1), (2) в пространстве $E = H \times H^1$ порождает локальную динамическую систему. Далее, в качестве фазового пространства задачи (1), (2) примем пространство E .

Справедлива следующая теорема [4].

Теорема 1. *Существует δ_0 такое, что при $0 < \delta < \delta_0$ и малых $\rho - \rho_0 > 0$ ($\rho_0 = \beta^{-1}$) задача (1), (2) имеет периодические по t пространственно неоднородные решения $\xi_1^\pm(\omega(\delta)t, \theta)$, где $\omega(\delta) = 1 + O(\delta^2)$ - гладкая функция δ . Справедливо равенство:*

$$\xi_1^\pm(t, \theta) = \sqrt{3 - 2\alpha_1} \cos t \pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1} \sin t \cos \theta + O(\delta, \rho - \rho_0), \quad \theta = \frac{\pi x}{l}. \quad (5)$$

$$\alpha_k = \alpha_k(\rho) = 1 - \frac{k^2}{\rho^2} + \beta \frac{k}{\rho}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \rho = 2\pi l / \lambda.$$

Решения $\xi_1^\pm(\omega(\delta)t, \theta)$ экспоненциально орбитально устойчивы при малых $\delta, \rho - \rho_0$.

Для доказательства теоремы в [4] использовался метод Крылова-Боголюбова [5].

3. Анализ двухмодовой модели

В [4] для нахождения асимптотики приближенных периодических решений ξ_1^\pm задачи (1), (2) использовалась двухмодовая аппроксимация Галеркина исходной задачи. В этом случае приближенные решения задачи (1), (2) были построены в виде:

$$\xi(t, \theta) = \sum_{k=0}^1 (z_k + \bar{z}_k) \cos(k\theta) + \delta \sigma_1(z, \bar{z}, \theta), \quad \theta = \frac{\pi x}{l}, \quad (6)$$

где $\sigma_1(z, \bar{z}, \theta)$ ($\sigma_1(z, \bar{z}, \theta + 2\pi) = \sigma_1(z, \bar{z}, \theta)$) - кубическая форма по z, \bar{z} , а $z_k = z_k(t)$, $k = 0, 1$, удовлетворяет уравнению:

$$\dot{z}_k = (i + \delta \alpha_k) z_k + \delta b_k(z, \bar{z}), \quad z = (z_0, z_1) \quad k = 0, 1. \quad (7)$$

Подставим (6), (7) в уравнение (1) и приравняем затем коэффициенты при δ . В результате относительно $\sigma_1(z, \bar{z}, \theta)$ получим линейное неоднородное уравнение:

$$\mathcal{B} \sigma_1(z, \bar{z}, \theta) = \frac{8}{3} i \left(\sum_{k=0}^1 (z_k - \bar{z}_k) \cos k\theta \right)^3 - iM \sum_{k=0}^1 (b_k - \bar{b}_k) \cos k\theta, \quad (8)$$

где

$$Mb(z, \bar{z}) = b(z, \bar{z}) + \frac{\partial b}{\partial z} z - \frac{\partial b}{\partial \bar{z}} \bar{z},$$

оператор \mathcal{B} является диагональным на пространстве многочленов относительно z, \bar{z} . При этом

$$\mathcal{B} z^\alpha \bar{z}^\beta = \left(1 - \sum_{j=0}^1 (\alpha_j - \beta_j)^2 \right) z^\alpha \bar{z}^\beta,$$

где $z^\alpha = z_0^{\alpha_0} z_1^{\alpha_1}$; $\bar{z}^\beta = z_0^{\beta_0} z_1^{\beta_1}$.

В соответствии с методом Галеркина, из условия разрешимости (8) однозначно находятся b_k , $k = 0, 1$. Подставим теперь b_k , в (7), выполним замену $z_k \mapsto \frac{1}{2} z_k \exp(it)$, $k = 0, 1$, а затем в полученной относительно z_k , $k = 0, 1$, системе осуществим преобразование $t = \tau/\delta$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} z'_0 &= z_0(\alpha_0 - |z_0|^2 - |z_1|^2) - \frac{1}{2} \bar{z}_0 z_1^2, \\ z'_1 &= z_1(\alpha_1 - 2|z_0|^2 - \frac{3}{4}|z_1|^2) - \bar{z}_1 z_0^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь штрих – дифференцирование по τ . При этом \bar{z}_k , $k = 0, 1$, удовлетворяют комплексно сопряженным уравнениям.

Отметим, что система (9) является S^1 -эквивариантной, градиентной системой. Она инвариантна относительно группы вращений окружности $(z_0, z_1) \mapsto \exp(i\varphi)(z_0, z_1)$, $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Если $\alpha_1 < 1$ ($\rho < \frac{1}{\beta}$), то единственным аттрактором в системе (9) является окружность стационарных точек

$$S_{1,1}(\alpha_1(\rho, \beta)) = \{\exp(i\varphi)(1, 0), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

При возрастании ρ и прохождении им значения $\frac{1}{\beta}$ из окружности $S_{1,1}(\alpha_1(\rho, \beta)) = S_{1,1}(\rho, \beta)$ бифурцируют две устойчивые окружности стационарных точек

$$S_{1,1}^\pm(\alpha_1(\rho, \beta)) = \{\exp(i\varphi)(\pm\sqrt{3 - 2\alpha_1}, \pm 2i\sqrt{\alpha_1 - 1}), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Если $\beta < 2$, то тогда $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ являются единственными аттракторами в (9) при $\rho \in (\frac{1}{\beta}, \infty)$. Отметим, что $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ гладкие функции ρ на $(\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta})$. При возрастании ρ от значения $\frac{2}{\beta}$, $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ проходят в обратном порядке свои значения.

Пусть теперь $\beta > 2$. Если $\rho \in (\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 2}})$, то тогда $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ – аттракторы в системе (9). В точке $\rho = \frac{2}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 2}}$ окружности $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ умирают, передавая устойчивость окружности стационарных точек:

$$S_{0,1}(\rho, \beta) = \left\{ \exp(i\varphi) \left(0, 2\sqrt{\frac{\alpha_1}{3}} \right), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}.$$

Если $\rho \in (\frac{2}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 2}}, \frac{2}{\beta - \sqrt{\beta^2 - 2}})$, то тогда $S_{0,1}(\rho, \beta)$ – единственный аттрактор в (9). В точке $\rho = \frac{2}{\beta - \sqrt{\beta^2 - 2}}$ окружность $S_{0,1}(\rho, \beta)$ устойчивость теряет и от неё ответвляются две устойчивые окружности $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$. Таким образом, при $\rho > \frac{2}{\beta - \sqrt{\beta^2 - 2}}$ аттракторами в (9) являются $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$.

4. Анализ четырехмодовой модели

Для анализа устойчивости решений ξ_1^\pm , при углублении параметра ρ в область надкритичности, согласно [4], построим приближенные решения задачи (1), (2) в виде:

$$\xi(t, \theta) = \sum_{k=0}^3 (z_k + \bar{z}_k) \cos(k\theta) + \delta\sigma_1(z, \bar{z}, \theta),$$

где $\sigma_1(z, \bar{z}, \theta)$ — кубическая форма по z, \bar{z} , а $z_k = z_k(t)$, $k = 0, 1, 2, 3$. Следуя описанной выше методике, приходим к S^1 -эquivариантной системе

$$\begin{aligned} z_0' &= z_0 (\alpha_0 - |z|^2) - \frac{1}{2} \bar{z}_0 (d^2 - z_0^2) - f_0, \\ z_k' &= z_k (\alpha_k - |z|^2 - |z_0|^2 + \frac{1}{4} |z_k|^2) - \frac{1}{2} \bar{z}_k (d^2 + z_0^2 - z_k^2) - f_k, \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (10)$$

где $|z|^2 = \sum_{k=0}^3 |z_k|^2$, $d^2 = \sum_{k=0}^3 z_k^2$,

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{4} z_1^2 \bar{z}_2 + \frac{1}{2} |z_1|^2 z_2 + \frac{1}{2} (\bar{z}_1 z_2 z_3 + \bar{z}_2 z_1 z_3 + \bar{z}_3 z_2 z_1), \\ f_1 &= \frac{1}{4} z_1^2 \bar{z}_3 + \frac{1}{2} |z_1|^2 z_3 + \frac{1}{4} z_2^2 \bar{z}_3 + \frac{1}{2} |z_2|^2 z_3 + \\ &\quad + (\bar{z}_0 z_1 z_2 + \bar{z}_1 z_0 z_2 + \bar{z}_2 z_0 z_1) + (\bar{z}_0 z_2 z_3 + \bar{z}_2 z_0 z_3 + \bar{z}_3 z_2 z_0), \\ f_2 &= \frac{1}{2} z_1^2 \bar{z}_0 + |z_1|^2 z_0 + (\bar{z}_0 z_1 z_3 + \bar{z}_1 z_0 z_3 + \bar{z}_3 z_0 z_1) + \frac{1}{2} (\bar{z}_1 z_2 z_3 + \bar{z}_2 z_1 z_3 + \bar{z}_3 z_2 z_1), \\ f_3 &= \frac{1}{4} z_2^2 \bar{z}_1 + \frac{1}{2} |z_2|^2 z_1 + \frac{1}{4} z_1^2 \bar{z}_1 + (\bar{z}_0 z_1 z_2 + \bar{z}_1 z_0 z_2 + \bar{z}_2 z_0 z_1) \end{aligned}$$

Как и выше, при $\rho < \frac{1}{\beta}$ единственным аттрактором в системе (10) является окружность стационарных точек

$$\tilde{S}_{1,1} = \{\exp(i\varphi)(1, 0, 0, 0), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Переход ρ через $\rho_0 = \frac{1}{\beta}$ приводит к потере устойчивости окружности $\tilde{S}_{1,1}$ — одна простая точка её спектра возрастая, проходит через нуль. При этом из $\tilde{S}_{1,1}$ бифурцируют две устойчивые окружности стационарных точек

$$\tilde{S}_{1,1}^\pm(\rho, \beta) = \{\exp(i\varphi)(x_0, \pm ix_1, x_2, \pm ix_3), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Здесь $x_k = x_k(\rho, \beta)$, $k = 0, 1, 2, 3$ — непрерывная ветвь решений системы

$$\begin{aligned} x_0(\alpha_0 - x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2) - \frac{1}{4}x_1^2 x_2 - \frac{1}{2}x_1 x_2 x_3 &= 0, \\ x_1(\alpha_1 - x_0^2 - \frac{3}{4}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2) - x_0 x_1 x_2 - x_0 x_2 x_3 - \frac{3}{4}x_1^2 x_3 - \frac{1}{4}x_2^2 x_3 &= 0, \\ x_2(\alpha_2 - 3x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{4}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2) - \frac{1}{2}x_0 x_1^2 - x_0 x_1 x_3 - \frac{1}{2}x_1 x_2 x_3 &= 0, \\ x_3(\alpha_3 - x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{4}x_3^2) - x_0 x_1 x_2 - \frac{1}{4}x_1 x_2^2 - \frac{1}{4}x_1^3 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

такая, что $x_0 = 2 - \alpha_1 + O((1 - \alpha_1)^2)$.

Динамика окружностей стационарных точек $\tilde{S}_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ системы (10) при возрастании ρ соответствует динамике окружностей стационарных точек $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ системы (9). А именно, существует такое $\tilde{\beta}$, ($\tilde{\beta} \approx 1.91$), что при $\beta \in (0, \tilde{\beta})$ окружности

$\tilde{S}_{1,1}^{\pm}(\rho, \beta)$ сохраняют устойчивость на промежутке (ρ_0, ∞) изменения параметра ρ . Пусть теперь $\beta > \tilde{\beta}$. Тогда существует такое $\tilde{\rho}_1(\beta)$, что на промежутке $(\rho_0, \tilde{\rho}_1(\beta))$ окружности $\tilde{S}_{1,1}^{\pm}(\rho, \beta)$ устойчивы. При $\rho = \tilde{\rho}_1(\beta)$ они сливаются и умирают на окружности $\tilde{S}_{0,1}(\rho, \beta)$. Окружность стационарных точек

$$\tilde{S}_{0,1}(\rho, \beta) = \{\exp(i\varphi)(0, ix_1(\rho, \beta), 0, ix_3(\rho, \beta)), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$$

рождается из нулевого решения системы в точке ρ , определяемой из уравнения $\alpha_1(\rho, \beta) = 0$. Здесь $(0, x_1(\rho, \beta), 0, x_3(\rho, \beta))$, $x_1(\rho, \beta) > 0$ — непрерывная ветвь решений системы (11). При $\rho = \tilde{\rho}_1(\beta)$ окружность $\tilde{S}_{0,1}(\rho, \beta)$ обретает устойчивость и сохраняет её на промежутке $(\tilde{\rho}_1(\beta), \tilde{\rho}_2(\beta))$. При $\rho = \tilde{\rho}_2(\beta)$ окружность $\tilde{S}_{0,1}(\rho, \beta)$ теряет устойчивость и от неё ответвляются две устойчивые окружности стационарных точек $\tilde{S}_{1,1}^{\pm}(\rho, \beta)$. Таким образом, динамика аттракторов в системе (10) отвечает соответствующая динамике аттракторов системы (9).

Качественное отличие систем (10) и (9) заключается в следующем. Когда параметр ρ возрастая, проходит точку $2\rho_0$, индекс неустойчивости окружности $\tilde{S}_{1,1}$ возрастает на порядок. При этом из $\tilde{S}_{1,1}$ бифурцируют две окружности стационарных точек

$$\tilde{S}_{1,2}(\rho, \beta) = \left\{ \exp(i\varphi) \left(\frac{1}{2} \sqrt{3 - 2\alpha_2}, 0, \pm i \sqrt{\alpha_2 - 1}, 0 \right), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}.$$

с индексом неустойчивости 1. Проведенный анализ устойчивости этих окружностей показывает, что индекс неустойчивости окружностей $\tilde{S}_{1,2}(\rho, \beta)$ в малой окрестности $\rho - 2\rho_0 > 0$ не меняется.

При отходе ρ от критических значений усиливаются отличия количественных характеристик соответствующих аттракторов в системах (10) и (9). При этом диапазон применения по параметру ρ формулы (5) является узким: усиливается влияние высших гармоник. Представление же двух пространственно неоднородных окружностей стационарных решений задачи (1) - (2) в виде

$$\xi_1^{\pm}(t, \theta, \beta, \rho) = x_0 \cos t \pm x_1 \sin t \cos \theta + x_2 \cos t \cos 2\theta \pm x_3 \sin t \cos 3\theta, \quad \theta = \frac{\pi x}{l},$$

где $x_k = x_k(\rho, \beta)$, $k = 0, 1, 2, 3$ — указанная выше непрерывная ветвь решений системы (11), можно использовать на достаточно большом промежутке изменения параметра ρ . Графики решений $\xi_1^+(t, \theta, 1, 7)$ и $\xi_1^+(t, \theta, 3, 7)$ [11] представлены на рис. 1.

5. Численный анализ восьмимодовой модели

При значительном отходе параметра ρ от бифуркационного значения усиливается влияние старших мод на формы автомодельных решений. Для анализа

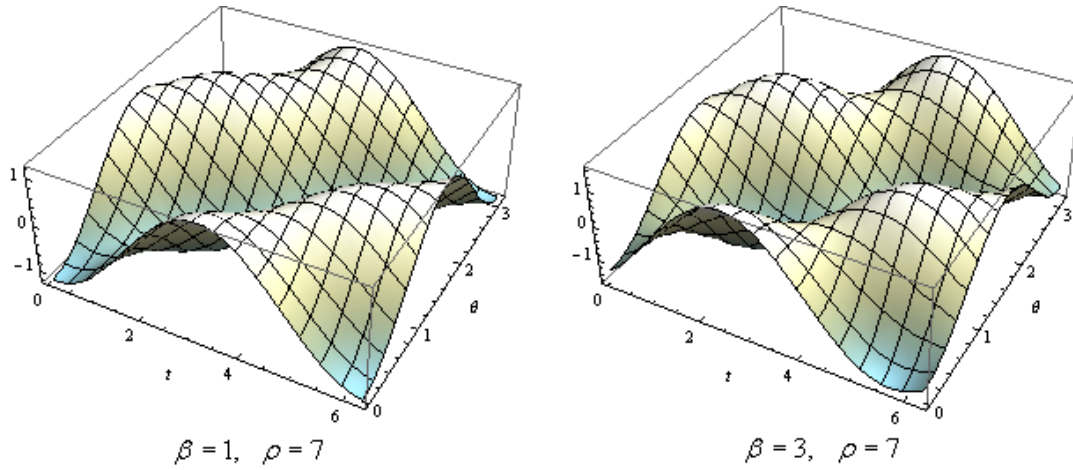


Рис. 1. Графики решений $\xi_1^+(t, \theta, \beta, \rho)$ для случая четырехмодовой модели.

устойчивости ξ_1^\pm в этом случае, согласно [4], строится приближенное решение задачи (1) - (2) в виде:

$$\xi(t, \theta) = \sum_{k=0}^7 (z_k + \bar{z}_k) \cos(k\theta) + \delta\sigma_1(z, \bar{z}, \theta),$$

где $\sigma_1(z, \bar{z}, \theta)$ — кубическая форма по z, \bar{z} , а $z_k = z_k(t)$, $k = \overline{0, 7}$.

Аналогично вышеизложенному, приходим к S^1 -эквивариантной системе

$$\begin{aligned} z_0' &= z_0 (\alpha_0 - |z|^2) - \frac{1}{2} \bar{z}_0 (d^2 - z_0^2) - f_0, \\ z_k' &= z_k (\alpha_k - |z|^2 - |z_0|^2 + \frac{1}{4} |z_k|^2) - \frac{1}{2} \bar{z}_k (d^2 + z_0^2 - z_k^2) - f_k, \quad k = \overline{1, 7}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $|z|^2 = \sum_{k=0}^7 |z_k|^2$, $d^2 = \sum_{k=0}^7 z_k^2$. В виду громоздкости, выражения для функций $f_k = f_k(z)$, $k = \overline{0, 7}$ опущены.

Как и выше, при $\rho < \frac{1}{\beta}$ единственным аттрактором в системе (12) является окружность стационарных точек

$$\tilde{S}_{1,1} = \{\exp(i\varphi)(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Переход ρ через $\rho_1 = \frac{1}{\beta}$ приводит к потере устойчивости окружности $\tilde{S}_{1,1}$ — одна простая точка её спектра возрастая, проходит через нуль. При этом из $\tilde{S}_{1,1}$ бифурцируют две устойчивые окружности стационарных точек

$$\tilde{S}_{1,1}^{\pm}(\rho, \beta) = \{\exp(i\varphi)(x_0, \pm ix_1, x_2, \pm ix_3, x_4, \pm ix_5, x_6, \pm ix_7), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Здесь $x_k = x_k(\rho, \beta)$, $k = \overline{0, 7}$ — непрерывная ветвь решений системы:

$$\begin{aligned}
& x_0(\alpha_0 - x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{3}{2}x_4^2 - \frac{1}{2}x_5^2 - \frac{3}{2}x_6^2 - \frac{1}{2}x_7^2) - \frac{1}{4}x_1^2x_2 - \frac{3}{4}x_2^2x_4 - \frac{1}{4}x_3^2x_6 - \\
& - \frac{1}{2}x_1(x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_6 + x_6x_7) - \frac{1}{2}x_2(x_3x_5 + 3x_4x_6 + x_5x_7) - \frac{1}{2}x_3x_4x_7 = 0, \\
& x_1(\alpha_1 - x_0^2 - \frac{3}{4}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}x_4^2 - \frac{3}{2}x_5^2 - \frac{1}{2}x_6^2 - \frac{3}{2}x_7^2) - \frac{3}{4}x_1^2x_3 - \frac{1}{4}x_2^2x_3 - \frac{1}{4}x_2^2x_5 - \\
& - \frac{3}{4}x_3^2x_5 - \frac{3}{4}x_3^2x_7 - \frac{1}{4}x_4^2x_7 - x_0(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_6 + x_6x_7) - \frac{1}{2}x_1(x_2x_4 + \\
& + 3x_3x_5 + x_4x_6 + 3x_5x_7) - \frac{1}{2}x_2(x_3x_4 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_7 + x_5x_6 + x_6x_7) - \\
& - \frac{1}{2}x_3(x_4x_6 + 3x_5x_7) = 0, \\
& x_2(\alpha_2 - 3x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{4}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{3}{2}x_4^2 - \frac{1}{2}x_5^2 - \frac{3}{2}x_6^2 - \frac{1}{2}x_7^2) - \frac{1}{2}x_0x_1^2 - \frac{1}{4}x_1^2x_4 - \frac{3}{4}x_2^2x_6 - \\
& - \frac{1}{4}x_3^2x_4 - \frac{3}{4}x_4^2x_6 - x_0(x_1x_3 + 3x_2x_4 + x_3x_5 + 3x_4x_6 + x_5x_7) - \frac{1}{2}x_1(x_2x_3 + x_2x_5 + \\
& + x_3x_4 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_7 + x_5x_6 + x_6x_7) - \frac{1}{2}x_2x_3x_7 - \frac{1}{2}x_3(x_4x_5 + x_5x_6 + x_6x_7) - \\
& - \frac{1}{2}x_4x_5x_7 = 0, \\
& x_3(\alpha_3 - x_0^2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{4}x_3^2 - \frac{1}{2}x_4^2 - \frac{3}{2}x_5^2 - \frac{1}{2}x_6^2 - \frac{3}{2}x_7^2) - \frac{1}{4}x_1^3 - \frac{3}{4}x_1^2x_5 - \frac{1}{4}x_1x_2^2 - \\
& - \frac{1}{4}x_2^2x_7 - \frac{1}{4}x_4^2x_5 - \frac{3}{4}x_5^2x_7 - x_0(x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 + x_4x_7) - \frac{1}{2}x_1(x_2x_4 + \\
& + x_2x_6 + 3x_3x_5 + 3x_3x_7 + x_4x_6 + 3x_5x_7) - \frac{1}{2}x_2(x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_6 + x_6x_7) - \\
& - \frac{1}{2}x_4(x_5x_6 + x_6x_7) = 0, \\
& x_4(\alpha_4 - 3x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{3}{4}x_4^2 - \frac{1}{2}x_5^2 - \frac{3}{2}x_6^2 - \frac{1}{2}x_7^2) - \frac{1}{4}x_1^2x_2 - \frac{1}{4}x_1^2x_6 - \frac{3}{2}x_0x_2^2 - \\
& - \frac{1}{4}x_2x_3^2 - \frac{1}{4}x_5^2x_6 - x_0(x_1x_3 + x_1x_5 + 3x_2x_6 + x_3x_7) - \frac{1}{2}x_1(x_2x_3 + x_2x_5 + x_2x_7 + \\
& + x_3x_6 + x_4x_7) - \frac{1}{2}x_2(3x_4x_6 + x_3x_5 + x_5x_7) - \frac{1}{2}x_3(x_4x_5 + x_5x_6 + x_6x_7) - \frac{1}{2}x_5x_6x_7 = 0, \\
& x_5(\alpha_5 - x_0^2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}x_4^2 - \frac{3}{4}x_5^2 - \frac{1}{2}x_6^2 - \frac{3}{2}x_7^2) - \frac{3}{4}x_1^2x_3 - \frac{3}{4}x_1^2x_7 - \frac{1}{4}x_1x_2^2 - \\
& - \frac{3}{4}x_1x_3^2 - \frac{1}{4}x_3x_4^2 - \frac{1}{4}x_6^2x_7 - x_0(x_1x_4 + x_1x_6 + x_2x_3 + x_2x_7) - \frac{1}{2}x_1(x_2x_4 + x_2x_6 + \\
& + 3x_3x_7) - \frac{1}{2}x_2(x_3x_4 + x_3x_6 + x_4x_7) - \frac{1}{2}x_3(x_4x_6 + 3x_5x_7) - \frac{1}{2}x_4(x_5x_6 + x_6x_7) = 0, \\
& x_6(\alpha_6 - 3x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{3}{2}x_4^2 - \frac{1}{2}x_5^2 - \frac{3}{4}x_6^2 - \frac{1}{2}x_7^2) - \frac{1}{4}x_2^3 - \frac{1}{4}x_1^2x_4 - \frac{1}{2}x_0x_3^2 - \\
& - \frac{3}{4}x_2x_4^2 - \frac{1}{4}x_4x_5^2 - x_0(x_1x_5 + 3x_2x_4 + x_1x_7) - \frac{1}{2}x_1(x_2x_3 + x_2x_5 + x_2x_7 + x_3x_4) - \\
& - \frac{1}{2}x_2(x_3x_5 + x_3x_7) - \frac{1}{2}x_3(x_4x_5 + x_4x_7) - \frac{1}{2}x_4x_5x_7 - \frac{1}{2}x_5x_6x_7 = 0, \\
& x_7(\alpha_7 - x_0^2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}x_4^2 - \frac{3}{4}x_7^2 - \frac{1}{2}x_6^2 - \frac{3}{4}x_7^2) - \frac{3}{4}x_1^2x_5 - \frac{1}{4}x_2^2x_3 - \frac{3}{4}x_1x_3^2 - \\
& - \frac{1}{4}x_1x_4^2 - \frac{3}{4}x_3x_5^2 - \frac{1}{4}x_5x_6^2 - x_0(x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4) - \frac{1}{2}x_1(x_2x_4 + x_2x_6 + 3x_3x_5) - \\
& - \frac{1}{2}x_2(x_3x_6 + x_4x_5) - \frac{1}{2}x_3x_4x_5 - \frac{1}{2}x_4x_5x_6 = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

такая, что $x_0 = 2 - \alpha_1 + O((1 - \alpha_1)^2)$.

Можно убедиться, что окружностям стационарных точек $\tilde{S}_{1,1}^{\pm}(\rho, \beta)$ системы (12), отвечают функции

$$\xi_1^{\pm}(t, \theta, \beta, \rho) = \cos t \left(\sum_{k=0}^3 x_{2k} \cos 2k\theta \right) \pm \sin t \left(\sum_{k=0}^3 x_{2k+1} \cos(2k+1)\theta \right), \quad \theta = \frac{\pi x}{l}, \tag{14}$$

где $x_k = x_k(\rho, \beta)$, $k = \overline{0, 7}$ — непрерывная ветвь решений системы (13), являющиеся решениями исходной задачи (1) - (2).

Графики решений $\xi_1^+(t, \theta, 1, 4)$ и $\xi_1^+(t, \theta, 3, 4)$ [11] представлены на рис. 2.

Есть основания полагать, что устойчивым приближенным периодическим решениям (14) отвечают устойчивые стационарные точки $\tilde{S}_{1,1}^{\pm}(\rho, \beta)$.

Приведем далее ряд результатов численного анализа решений системы (13) выполненных при помощи Wolfram Mathematica 7.0. Здесь же приведем значения

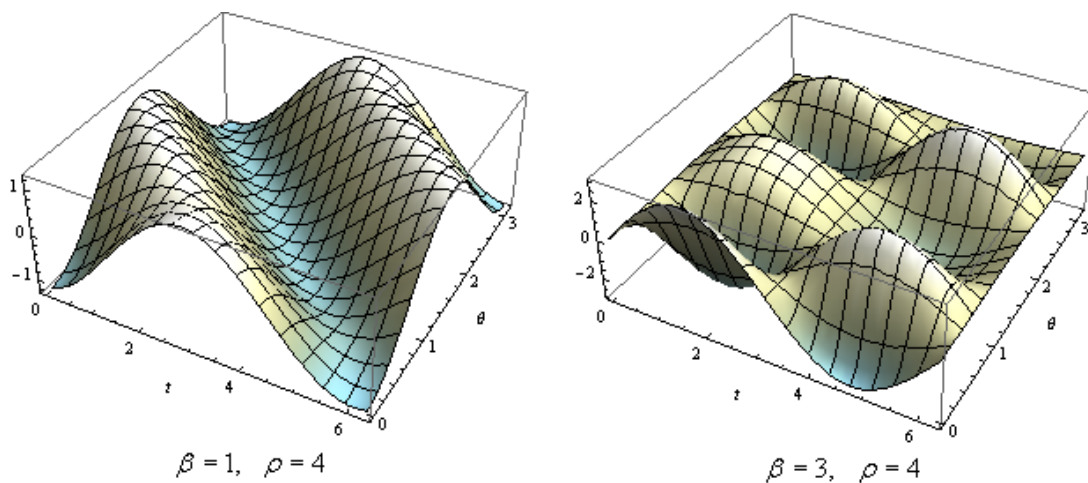


Рис. 2. Графики решений $\xi_1^+(t, \theta, \beta, \rho)$ для случая восьмимодовой модели.

точек спектра (максимальное и близкие к нулю) стационарных решений $\tilde{S}_{1,1}^{\pm}(\rho, \beta)$.

Пусть $\beta = 1$, тогда $\rho = 1.01$ отвечает следующее решение и спектр:

$$(0.9804, 0.2787, -0.098, -0.0005, 0, 0, 0, 0), \quad \{-43.03, \dots, -0.02, 0\}$$

И еще для нескольких значений ρ :

$$\rho = 2 : (0.3810, 1.2996, -0.5556, -0.1474, 0.0289, 0.0052, -0.0009, -0.0002), \\ \{-11.76, \dots, -0.30, 0\};$$

$$\rho = 7 : (-0.0174, -0.3203, -0.3661, -1.0579, 0.9736, 0.2869, 0.1745, 0.2121), \\ \{-2.71, \dots, -0.03, 0\};$$

$$\rho = 10 : (0.1239, -0.2097, -0.1977, -0.8345, 1.0799, 0.4460, 0.2227, 0.4474), \\ \{-2.59, \dots, -0.01, 0\}.$$

Для $\beta = 3$ получим:

$$\rho = 0.3334 : (0.9980, 0.0894, -0.0002, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \{-379.83, \dots, -2, -0.003, 0\};$$

$$\rho = 0.3559 : (0.0689, 1.4349, -0.0047, -0.0154, 0.00004, 0.0001, 0, 0), \\ \{-330.15, \dots, -1.79, -0.004, 0\};$$

$$\rho = 0.6471 : (0.0072, 2.1613, -0.01, -0.1884, 0.0006, 0.0142, -0.0001, -0.0011), \\ \{-90.80, \dots, -1.52, -0.0004, 0\};$$

$$\rho = 1 : (0.1644, 1.8249, -1.4871, -0.3831, 0.0412, -0.0201, 0.0131, 0.0031), \\ \{-33.60, \dots, -1.13, 0\};$$

$$\rho = 4 : (-0.0431, 0.2821, -0.1006, 0.5289, 0.00003, 1.2872, 1.7881, -0.9526), \\ \{-6.42, \dots, -0.29, 0\};$$

$$\rho = 7 : (0.0079, 0.1939, 0.0428, 0.3422, 0.2016, 0.8125, 1.6870, -1.2549), \\ \{-5.59, \dots, -0.47, 0.0071\};$$

$$\rho = 10 : (0.0109, 0.1795, 0.0484, 0.3070, 0.1966, 0.7180, 1.5538, -1.2030), \\ \{-4.91, \dots, -0.42, 0.0066\}.$$

Приведенные численные расчеты иллюстрируют сформулированное выше утверждение о зависимости динамики автомодельных решений от параметра β . А именно, существует такое $\beta^* \in (1.9; 3)$, что если $\beta < \beta^*$, то тогда автомодельные циклы рождаются и остаются устойчивыми на достаточно большом промежутке изменения ρ . При $\beta > \beta^*$ динамика автоволновых решений (12) меняется. Так при $\beta = 3$, существует бифуркационное значение параметра ρ , $\rho = 0.3558$, при котором два автомодельных цикла сливаются и умирают на пространственно неоднородном цикле, инвариантном относительно преобразования отражения отрезка. Этот цикл остается устойчивым до критического $\rho = 0.6471$ значения параметра ρ . Когда параметр ρ возрастая, проходит через указанное значение, то имеет место бифуркация рождения двух устойчивых автомодельных циклов, сохраняющих устойчивость при дальнейшем росте параметра ρ .

Поведение параметров автомодельных циклов (14) для случаев $\beta = 1$ и $\beta = 3$ представлено на рис. 3 и 4 соответственно.

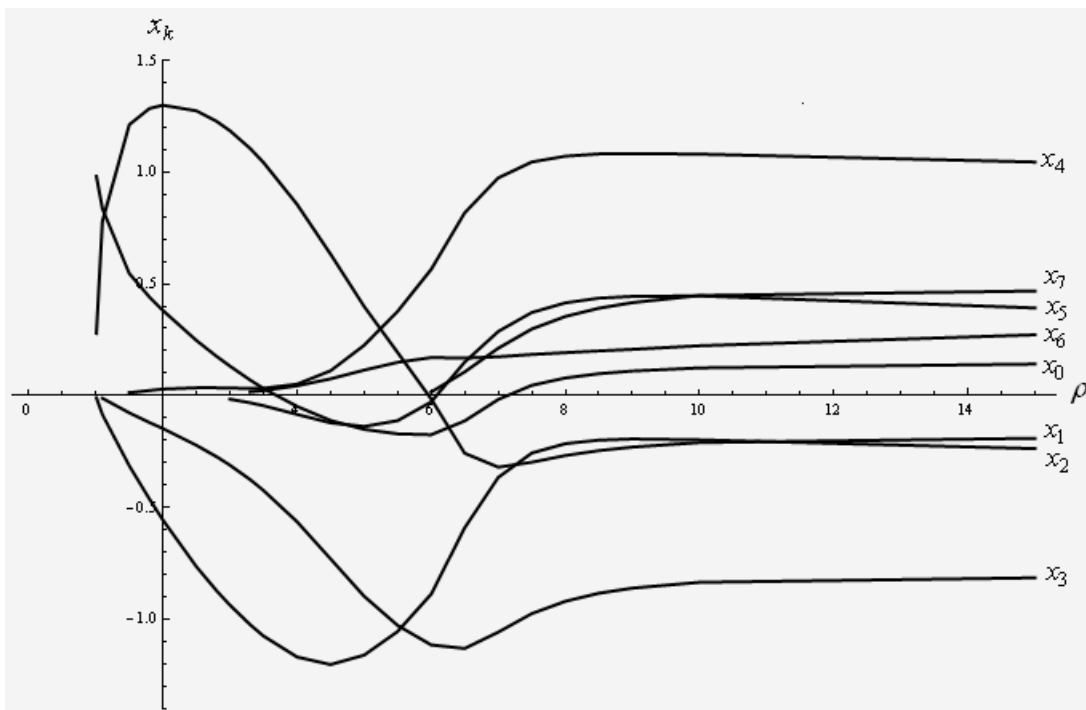


Рис. 3. $\beta = 1$.

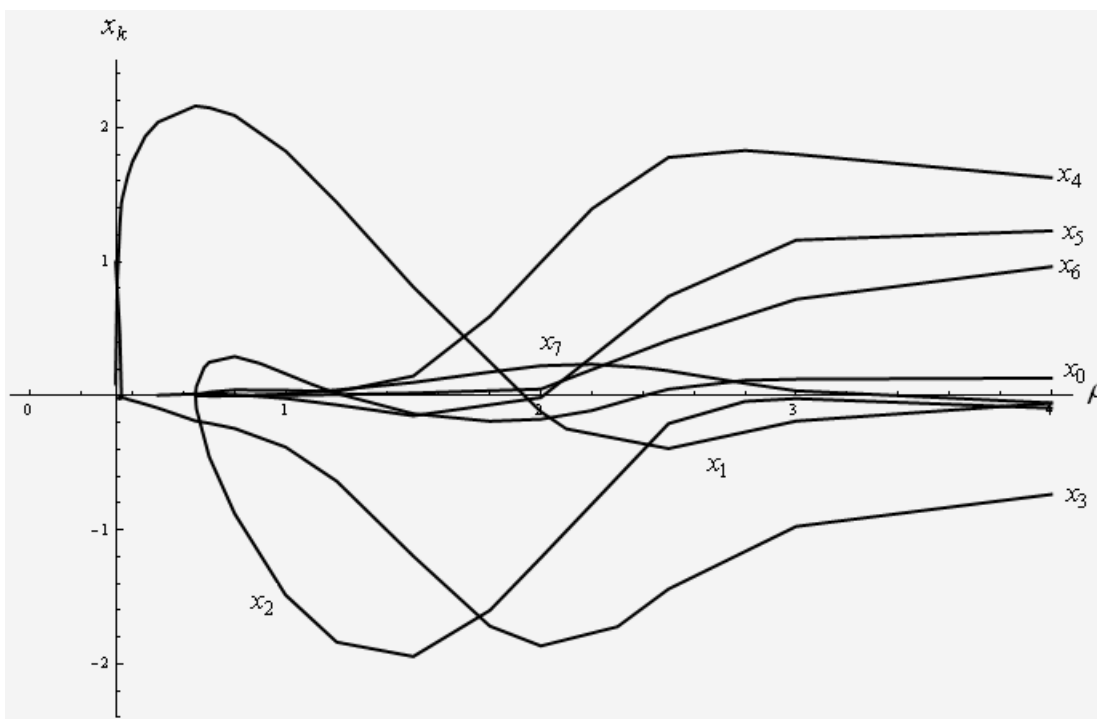


Рис. 4. $\beta = 3$.

Запишем (14) в виде [11]:

$$\xi_1^\pm(t, \theta, \beta, \rho) = A(\theta, \rho, \beta) \cos(t \mp \varphi(\theta, \rho, \beta)), \quad (15)$$

где $A(\theta, \rho, \beta) = \left(\left(\sum_{k=0}^3 z_{2k} \cos 2k\theta \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^3 z_{2k+1} \cos(2k+1)\theta \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$,

$$\operatorname{tg} \varphi(\theta, \rho, \beta) = \left(\sum_{k=0}^3 z_{2k+1} \cos(2k+1)\theta \right) \left(\sum_{k=0}^3 z_{2k} \cos 2k\theta \right)^{-1}.$$

Графики амплитуд $A(\theta) = A(\theta, \rho, \beta)$ автомодельных циклов (15) для случаев $\beta = 1$ и $\beta = 3$ представлены на рис. 5 и 6 соответственно.

Как видно из рис. 5 - 6, при увеличении параметра β амплитуда $A(\theta)$ приобретает релаксационный характер. Увеличение же параметра ρ приводит к увеличению размаха амплитуды $A(\theta)$. Так для случая $\beta = 1$ максимальное значение амплитуды автомодельного цикла - $\max\{A(\theta, \rho, \beta)\} \approx 1,25$, а для случая $\beta = 3$ - $\max\{A(\theta, \rho, \beta)\} \approx 2,25$. Также увеличение параметра ρ приводит и к усилению зависимости амплитуды автомодельных циклов $A(\theta, \rho, \beta)$ от пространственной переменной θ . Так при нахождении ρ вблизи бифуркационного значения амплитуда $A(\theta)$ является медленно меняющейся функцией, а при удалении ρ от бифуркационного значения, уже таковой не является.

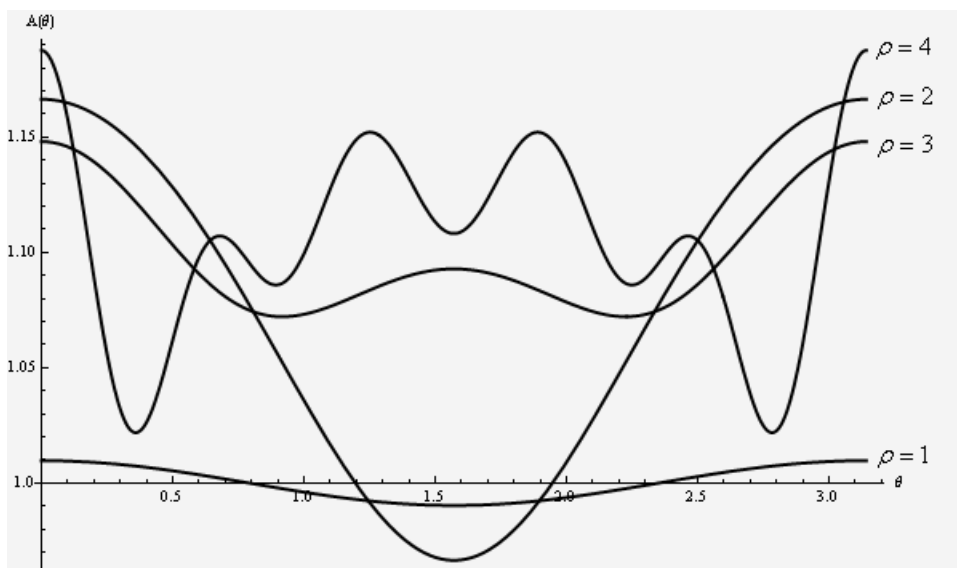


Рис. 5. График амплитуды для ξ_1^+ , случай $\beta = 1$.

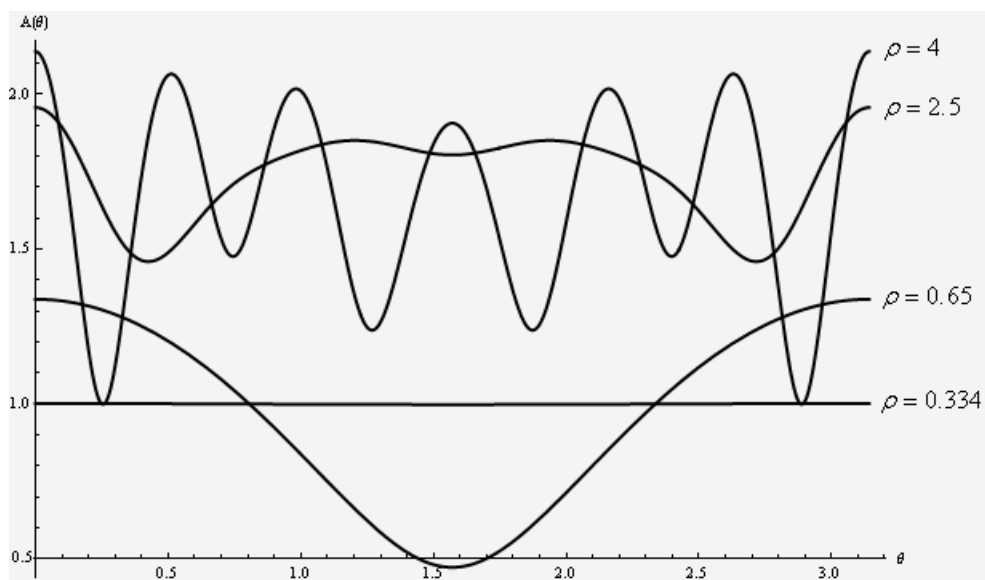


Рис. 6. График амплитуды для ξ_1^+ , случай $\beta = 3$.

6. Заключение

Остановимся здесь на основных результатах работы. В силу теоремы 1 при увеличении бифуркационного параметра ρ и его прохождении через значение $\rho_0 = \beta^{-1}$ из теряющего устойчивость пространственно однородного цикла ответвляется пара экспоненциально орбитально устойчивых пространственно неоднородных (автомодельных) циклов, переходящих друг в друга при преобразовании $x \rightarrow l - x$. Их форма при малых $\rho - \rho_0$ вполне определяется двумя параметрами. Качественно исходную задачу отражает её упрощенная форма — система (7). При $\beta \in (0, \beta^*)$ и увеличении ρ автомодельные циклы $\tilde{S}_{1,1}^{\pm}(\rho, \beta)$, усложняясь по форме, сохраняют устойчивость. Следует отметить, что переход к восьмимодовой аппроксимации исходной задачи не приводит к существенным качественным изменениям. Однако при этом становятся значимыми количественные отличия в значениях параметров автомодельных циклов.

Если $\beta > \beta^*$, то автомодельные циклы существуют и устойчивы на промежутке $(\beta^{-1}, \rho_1(\beta))$ изменения параметра ρ . При $\rho = \rho_1(\beta)$ они сливаются и исчезают, передавая при этом устойчивость пространственно неоднородному циклу, инвариантному относительно преобразования $x \rightarrow l - x$. Этот цикл рождается из неустойчивого нулевого решения тогда, когда индекс неустойчивости нуля, увеличиваясь на единицу, становится равным два. При рождении он имеет форму стоячей волны и фактически сохраняет её при возрастании бифуркационного параметра ρ . При дальнейшем увеличении ρ и прохождении его через бифуркационное значение $\rho_2(\beta)$ он теряет устойчивость, испуская при этом пару устойчивых автомодельных циклов, сохраняющих устойчивость при дальнейшем увеличении ρ .

Следует отметить, что при увеличении параметра β , увеличивается изрезанность $A(\theta) = A(\theta, \rho, \beta)$ и усиливается зависимость амплитуды автомодельных циклов (15) от пространственной переменной θ . Как видно на рис. 5 и 6, когда параметр ρ находится вблизи бифуркационного, то минимальное значение амплитуды приходится на середину, а максимальное — на края интервала $(0; \pi)$. При удалении параметра ρ от бифуркационного значения, минимальное значение амплитуды прижимается к краям интервала $(0; \pi)$.

Список цитируемых источников

1. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е.Ф. Мищенко, В.А. Садовничий, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов. — М.: Физматлит. — 2005. — 430 с.
2. Алдушин А.П. Феноменологическое описание нестационарных неоднородных волн горения / А.П. Алдушин, Б.А. Маломед // Физика горения и взрыва. — 1981. — 17. N 1. — С. 3 — 12.
3. Бабин А.В. Аттракторы эволюционных уравнений. / А.В. Бабин, М.И. Вишик. — М.: Наука. — 1989.
4. Белан Е.П. Автоколебательные режимы горения вдоль полосы. / Е.П. Белан, О.В. Шиян. // Динамические системы. — 2009. — Вып.27. — С. 3-16.

5. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. — М.: Наука. — 1969. — 410 с.
6. Зельдович Я.Б. Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах/Я.Б. Зельдович, Б.А. Маломед // Изв. вузов, сер. Радиофизика, — 1982. — **15**. — N 6. — С. 591 — 618.
7. Колесов А.Ю. Явление буферности в теории горения/А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // ДАН. — 2004. — **396**. — N 2. — С. 170 — 173.
8. Колесов Ю.С. Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией. / Ю.С.Колесов// УМЖ. — 1987. — Т.39. — №1. — С.27–34.
9. Маломед Б.А. Распространение автоколебательных волн вдоль полосы. / Б.А. Маломед // Изв. вузов, сер. Радиофизика. — 1981. — **14**. — N 5. — С. 571 — 576.
10. Самойленко А.М. Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения. / А.М.Самойленко, Е. П. Белан // Доклады РАН. — 2006. — **406**. — N 6. — С. 738-741.
11. Структуры и хаос в нелинейных средах. / Т.С. Ахромеева, С.П.Курдюмов , Г.Г.Малинецкий, А.А.Самарский. — М.: Наука. — 2007. — 484 с.
12. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. / Д. Хенри. — М.: Мир. — 1985. — 376 с.

Получена 30.04.2011