Динамические системы, том 3(31), No. 1-2, 115–133

УДК 517.972: 517.982

Компактные субдифференциалы высших порядков и их применение к вариационным задачам

З. И. Халилова

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: zarik.210289@mail.ru*

Аннотация. Приведен обзор теории K-субдифференциалов первого порядка. Построена теория K-субдифференциалов второго и высших порядков, вплоть до формулы Тейлора и теории экстремумов. Доказана обобщенная формула Юнга для второго и высших порядков. Рассмотрены приложения к вариационным функционалам с негладким интегрантом. Получена оценка K-субдифференциала второго порядка вариационного функционала, найден компактный выпуклый аналог условия Лежандра. Рассмотрен конкретный пример – «анизотропный субгармонический осциллятор».

Ключевые слова: компактный субдифференциал, включение Эйлера-Лагранжа, формула Тейлора для субдифференциалов, условие Лежандра при негладком интегранте, субгармонический осциллятор.

Введение

В работах И. В. Орлова и Ф. С. Стонякина (см. [2], [7], [12]) было введено понятие компактного субдифференциала (или K-субдифференциала) для отображений скалярного отрезка в локально выпуклое пространство. Идея определения состоит в равномерном стягивании замкнутых выпуклых оболочек разностных отношений к их компактному пересечению (K-пределу). Понятие K-субдифференциала оказалось удобным инструментом при исследовании проблемы Радона-Никодима для интеграла Бохнера и позволило найти топологическое решение этой проблемы в классе пространств Фреше ([3], [6]).

Построена теория K-субдифференциалов для отображений векторного аргумента ([4], [8], [9]). Следуя традиционной для банаховых пространств схеме Адамара-Фреше определения сильной дифференцируемости: K-субдифференциал по фиксированному направлению $\longrightarrow$ слабый K-субдифференциал $\longrightarrow$ K-субдифференциал по Гато $\longrightarrow$ K-субдифференциал по Фреше, мы приходим к нормированным и банаховым конусам (вместо традиционных банаховых пространств), а также к многозначным сублинейным операторам с компактными выпуклыми значениями (вместо традиционных линейных операторов), которые образуют банахов конус.

Таким образом, возникла потребность в предварительном построении элементов сублинейного анализа в нормированных конусах. При этом построение замкнутой теории приводит к необходимости с самого начала вести основные построения в абстрактных нормированных конусах.

Построенный аппарат оказался удобным инструментом при исследовании на экстремум вариационных функционалов с негладким (K-субдифференцируемым) интегрантом. Это позволило получить оценку K-субдифференциала основного вариационного функционала и компактный выпуклый аналог уравнения Эйлера-Лагранжа (включение Эйлера-Лагранжа).

Построенное K-субдифференциальное исчисление позволяет сконструировать и теорию K-субдифференциалов высших порядков как мультисублинейных K-операторов.

Здесь удается доказать каноническую изометрию ограниченных сублинейных и бисублинейных K-операторов и перенести на случай K-субдифференциального исчисления формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

K-субдифференциалы второго порядка также удалось применить в экстремальных вариационных задачах с не-C^2-гладким интегрантом. Это позволило рассмотреть вариационные приложения. Получена оценка второго K-субдифференциала основного вариационного функционала и компактный выпуклый аналог условия Лежандра.

Работа состоит из трех разделов. Первый раздел включает в себя краткий обзор основных понятий K-субдифференциального исчисления первого порядка: нормированные и банаховы конуса, K-операторы в банаховых конусах, компактные субдифференциалы первого порядка отображений в банаховых конусах (по направлению, слабые, Гато, Фреше). Также приведены оценка K-субдифференциала основного вариационного функционала и компактный выпуклый аналог уравнения Эйлера-Лагранжа (включение Эйлера-Лагранжа). Рассмотрен пример с физическим содержанием – «субгармонический осциллятор».

Второй раздел работы содержит теорию бисублинейных K-операторов, теорему о канонической изометрии ограниченных сублинейных и бисублинейных K-операторов, теорию K-субдифференциалов второго порядка, K-субдифференциалов высших порядков, их симметричность, общие свойства. Получена формула Тейлора для K-субдифференциалов.

В третьем разделе работы рассмотрены приложения K-субдифференциалов второго порядка к экстремальным вариационным задачам с не-C^2-гладким интегрантом. Приведена оценка второго K-субдифференциала основного вариационного функционала и компактный выпуклый аналог условия Лежандра. Рассмотрен конкретный пример – «анизотропный субгармонический осциллятор».

1. K-субдифференциалы первого порядка и их приложения к вариационным задачам

Напомним вначале некоторые основные понятия и результаты.

Пусть F – нормированный конус. Через F_K обозначим множество всех компактных выпуклых подмножеств F. Нетрудно проверить, что F_K образует конус, относительно поэлементного сложения множеств и умножения на скаляры из заданного поля (не только положительные) ([10], [11], [19]). При этом нулём в конусе является множество $\{0\}$.

Введем норму в конусе F_K, учитывая компактность $C \in F_K$.

Нормой или *конус-нормой* множества $C \in F_K$ назовём величину $\|C\| = \sup\limits_{y \in C} \|y\|$.

Отметим, что квазиполнота (см. [4]) конуса F влечёт квазиполноту конуса F_K. Т. е. если F – банахов конус, то F_K – банахов конус .

K-сублинейным оператором (или *K-оператором*) назовем отображение A действующее из векторного конуса E в банахов конус F_K, где F– нормированный конус, если для любых $h_1, h_2, h \in E$ верно:

(i) $A(h_1 + h_2) \subset Ah_1 + Ah_2$;

(ii) $A(\lambda h) = \lambda \cdot Ah$, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь случай, когда E также нормированный конус. Будем говорить, что K-оператор A *ограничен (по норме)*, если $\|A\| = \sup\limits_{\|h\|\leq 1} \|Ah\| < \infty$. Если A ограничен, то величину $\|A\|$ назовём *нормой* K-оператора A. Нетрудно убедиться, что норма K-оператора обладает обычными свойствами нормы. Отметим, что K-оператор $A : E \to F_K$ ограничен по норме тогда и только тогда, когда A непрерывен в нуле.

Обозначим множество всех ограниченных K-операторов $A : E \to F_K$ через $L_K(E; F)$. Отметим, что если E и F – нормированные конуса, то $L_K(E; F)$ – также нормированный конус.

Введем понятие композиции K-сублинейных операторов. Пусть $A : E \to F_K$ и $B : F \to G_K$ (где E, F и G – нормированные конуса) – K-сублинейные ограниченные операторы.

Определение 1. *Композицией* $[B \cdot A]$ операторов A и B будем называть следующее многозначное отображение:$[B \cdot A]h = \overline{co}B(Ah) = \overline{co}(\bigcup_{y\in Ah} By)$.

При этом если $A \in L_K(E, F),\ B \in L_K(F, G)$, то $[B \cdot A] \in L_K(E, G)$.

Перенесем понятие K-предела со случая нормированного пространства ([2]) на случай нормированного конуса.

Определение 2. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ – убывающая по вложению система замкнутых выпуклых подмножеств нормированного конуса E. Непустое множество $B \subset E$ называется K-пределом системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$: $B = K\text{-}\lim\limits_{\delta\to 0} B_\delta$, если:

1) $B = \bigcap\limits_{\delta>0} B_\delta$ – компакт;

2) $\forall\, U(0) \subset E\ \exists\, \delta_U > 0 :\ (0 < \delta < \delta_U) \Longrightarrow (B_\delta \subset B + U)$.

K-пределы обладают рядом полезных свойств (см. [4]), отметим наиболее важное из них.

Теорема 1. *(Признак Вейерштрасса)*

Пусть E, F – нормированные конуса, $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложению при $\delta \searrow +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств банахового конуса E. Тогда K-предел $K\text{-}\lim\limits_{\delta\to 0} B_\delta = B$ существует в том и только том случае, если для некоторого выпуклого компакта $\tilde{B} \subset E$ имеет место:

$\forall\, U(0) \subset E \quad \exists \delta_U > 0 :\ (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset \tilde{B} + U)$, *при этом* $B \subset \tilde{B}$.

Понятие субдифференциала хорошо известно в негладком анализе ([1], [14], [15], [16]), дадим определение K-субдифференциала для случая векторного аргумента.

Всюду далее E, E_i, F, F_j – банаховы конуса, $U = U(0)$ – некоторая окрестность нуля в E. Пусть отображение $f : E \to F$ определено в окрестности точки $x \in E$, $h \in U(0)$, $h \neq 0$.

Напомним, что *K-субдифференциалом f в точке x по направлению h* называется множество:

$$\partial_K^h f(x) = K\text{-}\lim_{\delta\to +0} \overline{co}\ \{y \in F \,|\, f(x + th) = f(x) + ty,\ 0 < t < \delta\}\,.$$

Перейдем к понятию слабого K-субдифференциала.

Пусть отображение $f : E \supset U(x) \to F$ определено в окрестности точки $x \in E$ и K-субдифференцируемо в точке x по любому направлению $h \in U(0) \subset E$. Будем говорить, что f *слабо K-субдифференцируемо* в точке x, если K-субдифференциал по направлению $\partial_K^h f(x) : E \to F_K$ сублинеен по h.

Пусть отображение $f : E \to F$ определено в окрестности точки $x \in E$ и слабо K-субдифференцируемо в точке x. Будем говорить, что f *K-субдифференцируемо по Гато* в точке x, если слабый K-субдифференциал $\partial_K f(x)h$ непрерывен по h в нуле (т.е. ограничен по норме).

Если отображение f K-субдифференцируемо по Гато в точке x, причем сходимость в K-пределе $\partial_K f(x)h = K\text{-}\lim\limits_{\delta\to 0} \partial_K^h f(x, \delta)$ равномерна по направлениям $\|h\| \le 1$, то K-оператор $\partial_K f(x)h$ назовем *K-субдифференциалом по Фреше* или *сильным K-субдифференциалом* f в точке x.

K-субдифференциалы по направлению, слабые K-субдифференциалы, K-субдифференциалы по Гато и Фреше обладают рядом полезных свойств (см. [4]).

В случае банаховых конусов традиционная оценка приращения отображения на отрезке приобретает несколько иной вид.

Теорема 2. *(Формула конечных приращений)*
Пусть отображения $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to F$ и $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны на $[a, b]$, K-субдифференцируемы на (a, b), и g возрастает на $[a, b]$. Если при $a < x < b$ выполняется оценка:

$$\sup \|\partial_K f(x)\| \le \inf \partial_K g(x), \tag{1.1}$$

то имеют место представление и оценка:

$$f(b) = f(a) + y, \quad \text{где} \quad \|y\| \le g(b) - g(a). \tag{1.2}$$

Из формулы конечных приращений (1.1) вытекает соответствующая форма теоремы о среднем.

Теорема 3. *(Теорема о среднем) Если отображение $f : \mathbb{R} \supset [a, b] \to F$ непрерывно на $[a, b]$ и K-субдифференцируемо на (a, b), то имеют место представление и оценка:*

$$f(b) = f(a) + y, \ \text{где} \quad \|y\| \le \sup_{a<x<b} \Big(\sup \|\partial_K f(x)\|\Big) \cdot (b - a). \tag{1.3}$$

Важную роль в вариационных приложениях K-субдифференциалов играет K-аналог леммы Ферма.

Теорема 4. *(K-лемма Ферма) Пусть $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Если f K-субдифференцируемо в точке $x \in E$ по некоторому направлению h и имеет экстремум в точке x, то:*

$$0 \in \partial_K^h f(x).$$

Рассмотрим классический вариационный функционал Эйлера-Лагранжа

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx, \quad (y(\cdot) \in C^1[a, b]). \tag{1.4}$$

Как известно, в случае когда интегрант $u = f(x, y, z)$ принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}^3)$, функционал Φ сильно дифференцируем в $C^1[a, b]$, и его первый дифференциал имеет вид

$$\Phi'(y)h = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)h + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)h'\right]dx. \quad (1.5)$$

Рассмотрим вариационный функционал (1.4) в пространстве $C^1[a; b]$. Если интегрант f всюду K-субдифференцируем в $\mathbb{R}^3$, то вариационный функционал $\Phi(y)$ также K-субдифференцируем всюду в $C^1[a; b]$, причем его K-субдифференциал допускает оценку [1]:

$$\partial_K\Phi(y)h \subset \int\limits_a^b \left([\underline{\partial}^y f(x, y, y'); \overline{\partial}^y f(x, y, y')]h(x) + [\underline{\partial}^z f(x, y, y'); \overline{\partial}^z f(x, y, y')]h'(x)\right)dx. \quad (1.6)$$

В качестве важных классов мы рассмотрим далее негладкие интегранты, образованные композицией гладкой и негладкой функции.

1) Пусть $\Phi(y) = \int_a^b \varphi(f(x, y, y'))dx$, где $f \in C^1$, φ всюду K-субдифференцируема. По формуле (1.5) имеем:

$$\partial_K\Phi(y)h \subset \int\limits_a^b \Bigg\{[\underline{\partial}\varphi(f(x, y, y')); \overline{\partial}\varphi(f(x, y, y'))] \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')h +$$

$$+[\underline{\partial}\varphi(f(x, y, y')); \overline{\partial}\varphi(f(x, y, y'))] \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')h'\Bigg\}dx. \quad (1.7)$$

2) Пусть $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(\varphi(x, y, y'))dx$, где f – гладкая, φ K-субдифференцируема. Рассмотрим случай

$$\varphi(x, y, z) = (u = \varphi_1(x), v = \varphi_2(y), w = \varphi_3(z)),\ h = (h_1, h_2, h_3).$$

Тогда выполнена оценка:

$$\partial_K\Phi(y)h \subset \int\limits_a^b \left([\underline{\partial}_y\varphi_2; \overline{\partial}_y\varphi_2]\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi)h + [\underline{\partial}_z\varphi_3; \overline{\partial}_z\varphi_3]\frac{\partial f}{\partial z}(\varphi)h'\right)dx. \quad (1.8)$$

Сформулируем компактный выпуклый аналог классического уравнения Эйлера-Лагранжа – «включение Эйлера-Лагранжа» ([13], [18]). Для начала приведем аналог основной вариационной леммы.

[1]Здесь и далее над интегралом от суммы функциональных отрезков мы понимаем сумму интегралов от этих отрезков, т.е.

$$\int\limits_a^b ([\alpha_1; \alpha_2] + [\beta_1; \beta_2])dx := \{(1-\lambda)\int\limits_a^b \alpha_1 dx + \lambda\int\limits_a^b \alpha_2 dx \big| 0 \le \lambda \le 1\} + \{(1-\mu)\int\limits_a^b \beta_1 dx + \mu\int\limits_a^b \beta_2 dx \big| 0 \le \mu \le 1\}.$$

Теорема 5 (Основная лемма). *Пусть* $[\varphi_1;\varphi_2] \subset L^2[a;b]$.

Если $0 \in \int\limits_a^b [\varphi_1;\varphi_2] h dx$ *для любого* $h \in C^1[a;b]$, *то* $0 \in [\varphi_1;\varphi_2]$.

Теорема 6. *Пусть интегрант* $f(x,y,z)$ *всюду* K*-субдифференцируем по* y,z. *Для того чтобы функционал* $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx$ *определенный в* $C^1[a;b]$ *при граничных условиях* $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, *достигал на данной функции* $y = y(x)$ *экстремума, необходимо, чтобы функция* $y = y(x)$ *почти всюду удовлетворяла включению Эйлера – Лагранжа*

$$0 \in [\underline{\partial}^y f(x,y,y');\overline{\partial}^y f(x,y,y')] - \frac{d}{dx}[\underline{\partial}^z f(x,y,y');\overline{\partial}^z f(x,y,y')]. \tag{1.9}$$

Функцию $y(\cdot) \in C^1[a;b]$, удовлетворяющую включению Эйлера-Лагранжа (1.9), назовем *субэкстремалью* вариационного функционала $\Phi(y)$.

Рассмотрим теперь конкретный пример, так называемый «субгармонический осциллятор».

Напомним, что классический гармонический осциллятор имеет вид (см. [17]):

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)dx. \tag{1.10}$$

Рассмотрим обобщенный гармонический осциллятор с негладким интегрантом, вводя модуль под знак интеграла (1.10).

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |y'^2 - y^2|dx. \tag{1.11}$$

Здесь $f(y,z) = z^2 - y^2, \quad L(f)(y) = -2y - 2y''$. При этом $f(y,y') = y'^2 - y^2 = 0 \Longleftrightarrow y' = \pm y$, поэтому условие Эйлера-Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{ll} \text{либо} & y = C_1\cos x + C_2 \sin x, \quad \text{при} \;\; y \neq Me^{\pm x}\,, \\ \text{либо} & y = M\cdot e^{\pm x}\,. \end{array}\right. \tag{1.12}$$

Рассмотрим функцию

$$y_0(x) = \begin{cases} y = \sin x, \text{ при } 0 \le x \le \pi/4\,; \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}\cdot e^x, \text{при } \pi/4 \le x \le \pi/2\,. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что функция $y_0(x)$ удовлетворяет паре условий (1.12). Таким образом $y_0(x)$ – субэкстремаль вариационного функционала (1.11), при этом:

$$\begin{cases} y_0(\pi/4 - 0) = \sin\pi/4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = y_0(\pi/4 + 0), \\ y_0'(\pi/4 - 0) = \cos\pi/4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = y_0'(\pi/4 + 0), \end{cases}$$

откуда следует, что $y_0 \in C^1[0;\pi/2]$.

2. K-субдифференциалы второго и высших порядков

Перейдем к определению бисублинейных K-операторов.

Пусть E_1, E_2 – векторные конуса, F – нормированный конус.

Оператор $B : E_1 \times E_2 \to F_K$ назовем *бисублинейным K-оператором*, если он сублинеен по каждой из переменных в отдельности.

При этом, если $B : E_1 \times E_2 \to F_K$. Тогда:

1. Оператор B K-бисублинеен в том и только том случае, если

$$\begin{cases} B(\lambda h, \mu k) = \lambda\mu B(h,k) & ; \\ B(h_1+h_2, k_1+k_2) \subset B(h_1,k_1)+B(h_1,k_2)+B(h_2,k_1)+B(h_2,k_2) & . \end{cases}$$

2. Оператор B непрерывен в нуле тогда и только тогда, когда он ограничен по норме:

$$\|B\| := \sup_{\substack{\|h_1\|\le 1 \\ \|h_2\|\le 1}} \|B(h_1,h_2)\| < \infty.$$

   При этом выполняется неравенство:

$$\|B(h_1,h_2)\| \le \|B\|\|h_1\|\|h_2\|.$$

Через $L_K(E_1,E_2;F)$ обозначим нормированный конус бисублинейных K-операторов. Если F – банахов конус, то $L_K(E_1,E_2;F)$ – также банахов конус.

Имеет место каноническая изометрия: $L_K(E_1,E_2;F) \cong L_K(E_1;L_K(E_2,F))$.

Примем далее обозначение $L^2_K(E,F) = L_K(E;L_K(E,F))$.

Всюду далее E, F –банаховы конуса, $U(x)$ – окрестность x точки в E.

Определение 3. Пусть отображение $f : E \supset U(x) \to F$ K-субдифференцируемо (по Фреше) на множестве U.

Рассмотрим отображение $\partial_K f : E \supset U(x) \to L_K(E;F)$.

Если отображение $\partial_K f$ K-субдифференцируемо в точке x, то, по определению, K-субдифференциал Фреше второго порядка f в точке x есть K-субдифференциал от $\partial_K f$: $\partial^2_K f(x) = \partial_K(\partial_K f)(x)$, при этом $\partial^2_K f(x) \in L_K(E;L_K(E;F))$.

В силу канонической изометрии: $L_K(E;L_K(E;F)) \cong L_K(E,E;F)$ можно считать, что $\partial^2_K f(x) \in L_K(E,E;F)$.

Приведём более подробную запись определения $\partial^2_K f(x)$, используя определение первого K-субдифференциала $\partial_K f(x)$:

$$\partial^2_K f(x)h = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\Big\{Z|\,\partial_K f(x+th) = \partial_K f(x) + t\cdot Z,\ 0<t<\delta\Big\},$$

где Z – K-операторы из $L_K(E;F)$.

Отсюда, используя свойства K-предела, можно получить оценку:

$$\partial^2_K f(x)(h;k) \subset K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\Big\{Y|\,\partial_K f(x+th)\cdot k = \partial_K f(x)\cdot k + t\cdot Y,\ 0<t<\delta\Big\}.$$

В случае банаховых пространств повторная K-субдифференцируемость влечет обычную дифференцируемость первого порядка в окрестности данной точки. Если E, F – банаховы пространства, $f : E \supset U(x) \longrightarrow F$ и отображение f дважды K-субдифференцируемо в точке x, то f дифференцируемо в обычном смысле в некоторой окрестности $V(x) \subset U(x)$ точки x.

Для фиксированных $h, k \in E$ предположим, что существует следующий K-предел:

$$\widehat{\partial}^2_K f(x)(h,k) := K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\big\{z | f(x+th+sk)+f(x) = \\ = f(x+th)+f(x+sk)+(st)z | 0<t,s<\delta\big\}. \quad (2.1)$$

Назовем выпуклое компактное множество (2.1) *бисимметрическим вторым K-субдифференциалом* отображения f в точке x по паре направлений (h,k).

Бисимметрический второй K-субдифференциал симметричен относительно векторов h и k : $\widehat{\partial}^2_K f(x)(h,k) = \widehat{\partial}^2_K f(x)(k,h)$. Достаточно заметить, что выражение под знаком замкнутой выпуклой оболочки в (2.1) не изменится, если h и k поменять местами.

Если $\widehat{\partial}^2_K f(x)(h,k)$ существует по любой паре направлений $(h,k) \in E^2$ и оператор $\widehat{\partial}^2_K f(x) : (h,k) \longrightarrow \widehat{\partial}^2_K f(x)(h,k)$ является бисублинейным, то будем говорить, что отображение f *слабо бисимметрически дважды K-субдифференцируемо* в точке x и оператор $\widehat{\partial}^2_K f(x)$ будем называть *слабым бисимметрическим вторым K-субдифференциалом.*

Понятия бисимметрических дифференциалов Гато и Фреше вводятся по аналогии с определением $\partial_K f$.

В случае банаховых пространств K-субдифференциал второго порядка, если он существует, совпадает со вторым бисимметрическим K-субдифференциалом и, как следствие, является *симметрическим* бисублинейным K-оператором.

Теорема 7. *(Обобщенная теорема Юнга) Пусть E и F - банаховы пространства, $f : E \supset U(x) \to F$. Если отображение f дважды K-субдифференцируемо в точке x, то f также бисимметрически дважды K-субдифференцируемо в этой точке, причем эти K-субдифференциалы совпадают:*

$$\partial^2_K f(x)(h,k) = \widehat{\partial}^2_K f(x)(h,k) \quad (\forall h,k \in E). \quad (2.2)$$

В частности, ввиду симметричности по (h,k) бисимметрического K-субдифференциала, $\partial^2_K f(x)$ также симметричен:

$$\partial^2_K f(x)(h,k) = \partial^2_K f(x)(k,h) \quad (\forall h,k \in E). \quad (2.3)$$

Доказательство. 1) Согласно общему определению второго K-субдифференциала в банаховых конусах

$$\partial^2_K f(x)(h,k) = K\text{-}\lim_{\delta_t\to+0} \overline{co}\Big\{Y |\, \partial_K f(x+th)\cdot k = \partial_K f(x)\cdot k + t\cdot Y,\, 0<t<\delta_t\Big\}. \quad (2.4)$$

При этом, поскольку f дифференцируемо обычным образом в некоторой окрестности точки x, то

$$\partial_K f(x+th)\cdot k = f'(x+th)\cdot k = \lim_{s\to0}\frac{f(x+th+sk)-f(x+th)}{s}, \quad (2.5)$$

$$\partial_K f(x)\cdot k = f'(x)\cdot k = \lim_{s\to 0}\frac{f(x+sk)-f(x)}{s}. \tag{2.6}$$

Заметим, что в силу повторной K-субдифферецируемости, отображение f' непрерывно, поэтому предел в (2.5) – равномерный по $0<t<\delta_t$.

С учетом (2.5) – (2.6), равенство (2.4) принимает вид:

$$\partial^2_K f(x)(h;k) = K\text{-}\lim_{\delta_t\to+0}\overline{co}\left\{\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k,\, 0<t<\delta_t\right\}. \tag{2.7}$$

Наконец, вычитая (2.5) и (2.6) почленно, находим:

$$\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k = \lim_{s\to+0}\frac{f(x+th+sk)-f(x+th)-f(x+sk)+f(x)}{ts}, \tag{2.8}$$

где $f(x+th+sk)-f(x+th)-f(x+sk)+f(x)$ обозначим через $\widehat{\Delta}^2 f(x;th,sk)$.

2) Из (2.8) следует, что при любом $\varepsilon>0$ для $0<s<\delta_s(\varepsilon)$ и $0<t<\delta_t$ верно:

$$\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k \in O_\varepsilon\left(\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x;th,sk)}{ts}\right), \tag{2.9}$$

где $\delta_s(\varepsilon)$ не зависит от выбора $t\in(0;\delta_t)$, в силу равномерности по t предела (2.8). Из (2.8) и (2.9) получаем, при $0<s<\delta_s(\varepsilon)$, $0<t<\delta_t$:

$$\overline{co}\left\{\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k\,\middle|\, 0<t<\delta_t\right\} \subset \overline{co}\left\{O_\varepsilon\left(\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x;th,sk)}{ts}\right)\middle|\, 0<t<\delta_t, 0<s<\delta_s(\varepsilon)\right\} =$$

$$= \overline{O_\varepsilon}\left(\overline{co}\left(\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x;th,sk)}{ts}\right)\middle|\, 0<t<\delta_t, 0<s<\delta_s(\varepsilon)\right). \tag{2.10}$$

Переходя в (2.10) к K-пределу, с использованием при $\delta_t\to 0, \delta_s\to 0$, с учетом (2.7) и K-признака Вейерштрасса, имеем при любом $\varepsilon>0$:

$$\partial^2_K f(x)(h,k)\subset O_\varepsilon\left(K\text{-}\lim_{\delta_t\to 0,\delta_s\to 0}\overline{co}\left\{\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x;th,sk)}{ts}\middle|\, 0<t<\delta_t, 0<s<\delta_s\right\}\right) =$$

$$= \overline{O_\varepsilon}(\widehat{\partial}^2_K f(x)(h,k)). \tag{2.11}$$

Так как множество $\widehat{\partial}^2_K f(x)(h,k)$ замкнуто, то переходя справа в (2.11) к пересечению по всем $\varepsilon>0$, приходим к включению:

$$\partial^2_K f(x)(h,k)\subset \widehat{\partial}^2_K f(x)(h,k). \tag{2.12}$$

3) Проверим теперь справедливость обратного включения. Из (2.8) следует, что при любом $\varepsilon>0$ для $0<s<\delta_s(\varepsilon)$ и $0<t<\delta_t$ верно:

$$\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x;th,sk)}{ts}\in O_\varepsilon\left(\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k\right). \tag{2.13}$$

Из (2.8) и (2.13) получаем, при $0 < s < \delta_s(\varepsilon)$, $0 < t < \delta_t$:

$$\overline{co}\left\{\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x;th,sk)}{ts}\middle| 0 < t < \delta_t, 0 < s < \delta_s(\varepsilon)\right\} \subset \overline{co}\left\{O_\varepsilon\left(\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k\right)\middle| 0 < t < \delta_t\right\} =$$

$$= \overline{O_\varepsilon}\left(\overline{co}\left(\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k\right)\middle| 0 < t < \delta_t\right). \tag{2.14}$$

Переходя в (2.14) к пределу при $\delta_t \to 0, \delta_s \to 0$, с учетом признака Вейерштрасса, имеем при любом $\varepsilon > 0$:

$$\widehat{\partial}^2_K f(x)(h,k) \subset \overline{O}_\varepsilon\left(K\text{-}\lim_{\delta_t\to 0,\delta_s\to 0}\overline{co}\left\{\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k\middle| 0 < t < \delta_t, 0 < s < \delta_s\right\}\right) =$$

$$= \overline{O_\varepsilon}(\partial^2_K f(x)(h,k)). \tag{2.15}$$

Отсюда, приходим к включению:

$$\widehat{\partial}^2_K f(x)(h,k) \subset \partial^2_K f(x)(h,k). \tag{2.16}$$

4) Наконец, из взаимно-обратных включений (2.12) и (2.16) следуют равенства (2.18) и (2.3). □

Примененный нами подход позволяет использовать индукцию для определения K-субдифференциала n-го порядка.

Пусть отображение $f : E \supset U(x) \to F$ $n-1$ раз K-субдифференцируемо на множестве $U(x)$. Рассмотрим отображение: $\partial^{n-1}_K f : U(x) \longrightarrow L^{n-1}_K(E;F)$. Если отображение $\partial^{n-1}_K f$ K-субдифференцируемо в точке x, то по определению K-субдифференциал n-го порядка отображения f в точке x есть K-субдифференциал от $\partial^{n-1}_K f$: $\partial^n_K f(x) := \partial_K(\partial^{n-1}_K f)(x)$, при этом

$$\partial^n_K f(x) \in L^n_K(E; L^{n-1}_K(E;F)) \cong L^n_K(E;F).$$

Отметим, что если E, F – банаховы пространства, $f : E \supset U(x) \longrightarrow F$ и отображение f n раз K-субдифференцируемо в точке x, то f $(n-1)$ раз дифференцируемо в обычном смысле в некоторой окрестности $V(x) \subset U(x)$ точки x.

Обобщим понятие бисимметрического K-субдифференциала на случай n-го порядка. Вначале введем понятие мультисимметрической разности.

Пусть $x, h_1, ..., h_n \in E$. Следующее выражение

$$\widehat{\Delta}^n f(x,h_1,...,h_n) = f(x+\sum_{k=1}^{n} h_k) - \sum_{1\le k_1<...<k_{n-1}\le n} f(x+\sum_{i=1}^{n-1} h_{k_i}) +$$

$$+ \sum_{1\le k_1<...<k_{n-2}\le n} f(x+\sum_{i=1}^{n-2} h_{k_i}) - ... + (-1)^n f(x)$$

назовем *мультисимметрической разностью* n-го порядка для отображения f в точке x, соответствующей набору приращений $(h_1,...h_n)$. Заметим, что мультисимметрическая разность, очевидно, симметрична относительно любой перестановки переменных $h_1,...h_n$.

Для фиксированных направлений $h_1, ..., h_n \in E$ предположим, что существует следующий K-предел:

$$\widehat{\partial}^n_K f(x, h_1, ..., h_n) = K\text{-}\lim_{t_1 \to +0, ..., t_n \to +0} \frac{\widehat{\Delta}^n f(x, t_1 h_1, t_2 h_2 ..., t_n h_n)}{t_1 \cdot ... \cdot t_n}. \tag{2.17}$$

Назовем его *мультисимметрическим K-субдифференциалом n-ого порядка* для f в точке x по направлениям $(h_1, ..., h_n)$ или по направлению $h = (h_1, ..., h_n)$. Заметим, что $\widehat{\partial}^n_K f(x, h_1, ..., h_n)$, очевидно, не изменяется при любой перестановке $h_1, ..., h_n$.

Если $\widehat{\partial}^n_K f(x, h_1, ..., h_n)$ существует по любому направлению $h = (h_1, ..., h_n)$ и является n-сублинейным K-оператором, то будем говорить, что f *слабо мультисимметрически K-субдифференцируемо n раз* в точке x и примем обозначение $\widehat{\partial}^n_K f(x)(h_1, ..., h_n) := \widehat{\partial}^n_K f(x; h_1, ..., h_n)$.

Далее, если n-сублинейный мультисимметрический K-оператор $\widehat{\partial}^n_K f(x)$ ограничен: $\widehat{\partial}^n_K \in L^n_K(E; F)$, то будем говорить, что f *мультисимметрически K-субдифференцируемо n раз в точке x по Гато.* Наконец, если $\widehat{\partial}^n_K f(x)$ – субдифференциал Гато и сходимость в равенстве

$$\widehat{\partial}^n_K f(x)(h_1, ..., h_n) = K\text{-}\lim_{t_1 \to +0, ..., t_n \to +0} \frac{\widehat{\Delta}^n f(x, t_1 h_1, t_2 h_2 ..., t_n h_n)}{t_1 \cdot ... \cdot t_n}$$

равномерна по мультинаправлениям $h = (h_1, ... h_n)$, $\|h\| \le 1$, то будем говорить, что f *мультисимметрически K-субдифференцируемо n раз в точке x по Фреше.*

Теорема 8. *(Обобщенная теорема Юнга n-го порядка)*
Пусть E и F - банаховы пространства, $f : E \supset U(x) \to F$, $x, h_1, ..., h_n \in E$. Если отображение f n раз K-субдифференцируемо в точке x, то f также мультисимметрически n раз K-субдифференцируемо в этой точке, причем эти K-субдифференциалы совпадают:

$$\partial^n_K f(x)(h_1, ..., h_n) = \widehat{\partial}^n_K f(x)(h_1, ..., h_n) \quad (\forall h_1, ..., h_n \in E). \tag{2.18}$$

В частности, ввиду симметричности мультисимметрического K-субдифференциала, $\partial^n_K f(x)$ также симметричен:

$$\partial^n_K f(x)(h_1, ..., h_n) = \partial^n_K f(x)(h_{\sigma_1}, ..., h_{\sigma_n})$$

для любой перестановки σ индексов $1, ..., n$.

В случае банаховых пространств для n-кратно K-субдифференцируемых отображений имеет место аналог формулы Тейлора в асимптотической форме.

Теорема 9. *Пусть E и F – банаховы пространства, отображение $f : E \supset U(x) \to F$ непрерывно на $[x; x + h] \subset U$ и n раз K-субдифференцирумо в точке x. Тогда:*

$$f(x + h) - \left(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} \partial^l f(x)(h)^l + \frac{1}{n!} \partial^n_K f(x)(h)^n \right) = o(\|h\|^n). \tag{2.19}$$

Доказательство. 1) Так как f n-кратно K-субдифференцируемо в точке x, следовательно существует $(n-1)$-кратная обычная дифференцируемость f в точке x, тогда получаем:

$$\begin{cases} \partial_K^l f(x) &= \{\partial^l f(x)\} \text{ при } 0 < l \le n-1, \\ \partial_K^n f(x) &= \partial(\partial^{(n-1)} f)(x). \end{cases}$$

Следовательно, (2.19) можно записать в виде:

$$\left(f(x+h) - \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} \partial^l f(x)(h)^l \right) - \frac{1}{n!} \partial_K^n f(x)(h)^n = o(\|h\|^n).$$

2) Рассмотрим вспомогательную функцию

$$r_n(f,h) = f(x+h) - \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} \partial^l f(x)(h)^l - \frac{1}{n!} \partial_K^n f(x)(h)^n,$$

которая действует из банахового пространства E в банахов конус F_K. Применим математическую индукцию.

a) При $n = 1$ получим определение K-субдифференциала из критерия K-субдифференцируемости (см. [4]): $f(x+h) - f(x) - \partial_K f(x)h = o(\|h\|)$.

b) Воспользуемся индукцией по n. Предположим, что формула (2.19) верна для $n-1$. Вычислим K-субдифференциал вспомогательной функции r_n, получим:

$$\partial_K r_n(f,h) = f'(x+h) - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{(l-1)!} \partial^l f(x)(h)^{l-1} - \frac{1}{(n-1)!} \partial_K^n f(x)(h)^{n-1} =$$

$$= f'(x+h) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \partial^l f(x)(h)^k - \frac{1}{(n-1)!} \partial_K^{n-1}(f')(x)(h)^{n-1} = r_{n-1}(f',h),$$

что по допущению индукции означает:

$$\partial_K r_n(f,h) = r_{n-1}(f',h) = o(\|h\|^{n-1}).$$

Применяя теорему о среднем 3, получим:

$$\|r_n(f,h)\| = \|r_n(f,h) - r_n(f,0)\| \le \sup_{0<\theta<1} \|\partial_K r_n(f,\theta h)\| \cdot \|h\| = \sup_{0<\theta<1} \|r_{n-1}(f',\theta h)\| \cdot \|h\| =$$

$$= \sup_{0<\theta<1} o(\|\theta h\|^{n-1}) \cdot \|h\| = o(\|h\|^{n-1}) \cdot \|h\|) = o(\|h\|^n).$$

Таким образом, мы получили формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. □

В условиях теоремы верно включение:

$$f(x+h) - \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} \partial^l f(x)(h)^l \in \frac{1}{n!} \partial_K^n f(x)(h)^n + o(\|h\|^n).$$

Предварительно введем понятия квадратичной K-формы, неотрицательной, положительной и положительно определенной K-формы. Далее E –банахов конус. Отображение $B : E \longrightarrow \mathbb{R}_K$ назовем *квадратичной K-формой*, если для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и для любого $h \in E$ выполняется следующее равенство:

$$B(\lambda h) = \lambda^2 \cdot B(h). \tag{2.20}$$

Если B непрерывно в нуле, то из (2.20) следует, что $B(0) = \{0\}$.

Определение 4. Пусть $B : E \longrightarrow \mathbb{R}_K$ – квадратичная K-форма.

Будем говорить, что B неотрицательна ($B \geq 0$), если выполнено неравенство: $\min B(h) \geq 0$ $(\forall h \in E)$.

Будем говорить, что K-форма $B(h)$ *положительна* ($B > 0$), если $B(0) = \{0\}$ и $\min B(h) > 0 \quad (\forall h \neq 0)$.

Будем говорить, что K-форма $B(h)$ *положительно определена* ($B \gg 0$), если существует такая постоянная $\gamma^2 > 0$, что $\min B(h) \geq \gamma^2 \|h\|^2 \quad (\forall\, h \in E)$.

Заметим, что условия $B \leq 0$, $B < 0$ и $B \ll 0$ могут быть введены обычным образом, с помощью перехода к форме $(-B)$.

Теорема 10. *(Необходимое условие минимума) Пусть отображение $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ дважды K-субдифференцируемо в точке $x \in E$, причем $0 \in \partial_K f(x)$. Для того, чтобы f достигало минимума в точке x необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$\partial_K^2 f(x) \geq 0. \tag{2.21}$$

Доказательство. По K-лемме Ферма $0 \in \partial_K f(x)$, при этом если существует $\partial_K^2 f(x)$, то существует f' в окрестности точки x, т.е. приходим к условию $f'(x) = 0$.

По обобщенной формуле Тейлора (2.19) второго порядка для любого достаточно малого h получаем: $f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \frac{1}{2}\partial^2 f(x)(h)^2 = o(\|h\|^2)$, откуда при достаточно малых $\|h\|$ верно:

$$0 \leq f(x+h) - f(x) \in \frac{1}{2}\partial^2 f(x)(h)^2 + o(\|h\|^2) \tag{2.22}$$

Допустим противное. Пусть существует $h_0 \in E$ и $y_0 < 0$ такие, что

$$\partial_K^2 f(x_0)(h_0)^2 \ni y_0.$$

Заменяя в (2.22) h на th_0, имеем:

$$\frac{\frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(th_0)^2 + o(\|th_0\|)^2}{t^2} = \frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(h_0)^2 + \frac{o(t^2)}{t_2},$$

где $\frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(h_0)^2 \ni y_0$ и $\dfrac{o(t^2)}{t^2} \to 0$ при $t \to +0$. При достаточно малом $t > 0$ верно неравенство: $\left\|\dfrac{o(t^2)}{t^2}\right\| < \dfrac{|y_0|}{2}$. Тогда множество $\dfrac{\frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(th_0)^2 + o(\|th_0\|)^2}{t^2}$ содержит число $z_0 < y_0 + \dfrac{|y_0|}{2} < 0$.

Следовательно, множество $\frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(th_0)^2 + o(\|th_0\|)^2$ содержит некоторое фиксированное отрицательное число $z_0 < 0$ (при достаточно малых t).

Но так как $\left\|\frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(th_0)^2 + o(\|th_0\|)^2\right\| \to 0$, при $t \to 0$, то и

$\sup\left(\frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(th_0)^2 + o(\|th_0\|)^2\right) < 0$ при достаточно малом $t > 0$. Тогда из (2.22) следует, что $f(x+th_0)-f(x) < 0$ при любом достаточно малом $t > 0$. Получаем противоречие условию, что f достигает минимума в точке x. $\square$

Если в условиях теоремы 10, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то условие (2.21) можно записать в виде:

$$\overline{\partial}(f')(x) \geq 0.$$

Действительно, при $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, как известно (см. [5]) $\partial_K^2 f(x) = [\underline{\partial}(f')(x); \overline{\partial}(f')(x)]$. Применяя теорему 10 получаем, что $\overline{\partial}(f')(x) \geq 0$.

Получим теперь достаточное условие минимума в терминах второго K-субдифференциала.

Теорема 11. *Пусть отображение $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ дважды K-субдифференцируемо в точке $x \in E$, причем выполнено условие $f'(x) = 0$. Для того, чтобы f достигало минимума в точке x, достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$(\partial_K^2 f(x) \gg 0) \Longleftrightarrow (\min \partial_K^2 f(x) \geq \gamma^2 \|h\|^2 \qquad (\forall\, h \in E)),$$

где $\gamma^2 = const > 0$.

Доказательство. Действительно, выберем ε настолько малым, чтобы при $\|h\| < \varepsilon$ величина $o(\|h\|^2)$ в равенстве (2.22) удовлетворяла условию $\|o(\|h\|^2)\| < \dfrac{\gamma^2}{2}\|h\|^2$. Тогда при $\|h\| < \varepsilon$:

$$\left(inf\frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(th_0)^2 + o(\|th_0\|)^2\right) > \frac{\gamma^2}{2}\|h\|^2 > 0. \qquad (2.23)$$

Из формулы Тейлора (2.19), как уже отмечалось, вытекает включение

$$f(x+h) - f(x) - f'(x)h \in \frac{1}{2}\partial^2 f(x)(h)^2 + o(\|h\|^2).$$

Отсюда, в силу (2.23), получаем

$$f(x+h) - f(x) \geq \gamma^2\|h\|^2 > 0$$

при достаточно малом $\|h\| > 0$, т.е. f достигает строгого локального минимума в точке x. $\square$

3. Приложения K-субдифференциалов второго порядка к вариационным задачам

Приведем оценку K-субдифференциала второго порядка вариационного функционала $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx$.

Теорема 12. *Рассмотрим вариационный функционал $\Phi(y)$. Если интегрант f дважды K-субдифференцируем, то вариационный функционал $\Phi(y)$ также дважды K-субдифференцируем, причем его K-субдифференциал второго порядка допускает оценку*

$$\partial_K^2\Phi(y)h \subset \int\limits_a^b \Big([\underline{\partial}^y(f'_y)(x,y,y'); \overline{\partial}^y(f'_y)(x,y,y')]h^2(x) +$$

$$+2[\underline{\partial}^y(f'_z)(x,y,y'); \overline{\partial}^y(f'_z)(x,y,y')]h(x)h'(x)dx + [\underline{\partial}^z(f'_z)(x,y,y'); \overline{\partial}^z(f'_z)(x,y,y')]h'^2\Big)dx \tag{3.1}$$

Доказательство. Так как f дважды K-субдифференцируем, то f один раз дифференцируем обычным образом (см. [5]), т.е. существует f'. Тогда вариационный функционал $\Phi(y)$ также один раз дифференцируем в обычном смысле и его дифференциал выглядит следующим образом

$$\Psi(y)h = \Phi'(y)h = \int\limits_a^b (f'_y(x,y,y')h + f'_z(x,y,y')h')dx. \tag{3.2}$$

Введем вспомогательный линейный оператор

$$(Ay)(x) = (x, y(x), y'(x)),\ A:\ C^1[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\times C^1[a,b]\times C[a,b].$$

Очевидно, оператор A непрерывен. Теперь введем общий оператор композиции $B_\varphi(\widetilde{A}) = \varphi(\widetilde{A}(y))$. Получим $B_{f'_y} = f'_y(\widetilde{A}(y))$ и $B_{f'_z} = f'_z(\widetilde{A}(y))$. При этом

$$\widetilde{A} \in L(C^1[a,b]; \mathbb{R}\times C^1[a,b]\times C[a,b]).$$

Введем также линейный по u, v и по h интегральный оператор:

$$D(u,v) = \int\limits_a^b [u(x)h(x) + v(x)h'(x)]dx, \qquad D: C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Тогда вариационный функционал Ψ может быть записан в виде композиции

$$\Psi(y)h = D[(B_{f'_y}(A), B_{f'_z}(A))]h. \tag{3.3}$$

Применяя к композиции (3.3) теорему о K-субдифференцировании композиции (см. [9]), получаем

$$\partial_K^h\Psi(y)h = \partial_K^h(D[(B_{f'_y}(A), B_{f'_z}(A))]h) \subset$$

$$\subset [\partial_K^h D(u,v)\cdot[(\partial_K^{w_2,w_3}(B_{f'_{w_2}}(w)), \partial_K^{w_2,w_3}(B_{f'_{w_3}}(w)))\cdot\partial(A(y))]h]. \tag{3.4}$$

Теперь рассмотрим в отдельности компоненты справа в (3.4).

1) Т.к. $A-$ линейный непрерывный оператор, то он дифференцируем по Фреше, причем $A'(y) \equiv A$. Следовательно, $\partial_K(Ay)(x) = (x, y(x), y'(x))$.

2) Для операторов $B_{f'_{w_2}}(w) = B_{f_{w_2}}((w_1, w_2, w_3))$ и $B_{f'_{w_3}}(w) = B_{f_{w_3}}((w_1, w_2, w_3))$ мы вычисляем K-субдифференциалы по w_2, w_3. Получаем:

$$(\partial_K^{yz} B_{f'_y}(A(y))h)(x) \subset [\underline{\partial}^y f'_y(x,y,y'); \overline{\partial}^y f'_y(x,y,y')]h(x) + [\underline{\partial}^z f'_y(x,y,y'); \overline{\partial}^z f'_y(x,y,y')]h'(x),$$

$$(\partial_K^{yz} B_{f'_z}(A(y))h)(x) \subset [\underline{\partial}^y f'_z(x,y,y'); \overline{\partial}^y f'_z(x,y,y')]h(x) + [\underline{\partial}^z f'_z(x,y,y'); \overline{\partial}^z f'_z(x,y,y')]h'(x).$$

3) Т.к. $D-$ линейный непрерывный функционал, то он дифференцируем по Фреше, причем $D'(v) \equiv D$. Отсюда:

$$\partial_K \Psi(y)h \subset \int_a^b \Big(([\underline{\partial}^y f'_y(x,y,y'); \overline{\partial}^y f'_y(x,y,y')]h(x) + [\underline{\partial}^z f'_y(x,y,y'); \overline{\partial}^z f'_y(x,y,y')]h'(x))h(x) +$$

$$+([\underline{\partial}^y f'_z(x,y,y'); \overline{\partial}^y f'_z(x,y,y')]h(x) + [\underline{\partial}^z f'_z(x,y,y'); \overline{\partial}^z f'_z(x,y,y')]h'(x))h'(x) =$$

$$= \int_a^b \Big([\underline{\partial}^y f'_y(x,y,y'); \overline{\partial}^y f'_y(x,y,y')]h^2(x) +$$

$$+2[\underline{\partial}^z f'_y(x,y,y'); \overline{\partial}^z f'y(x,y,y')]h(x)h'(x) + [\underline{\partial}^z f'_z(x,y,y'); \overline{\partial}^z f'_z(x,y,y')]h'^2(x) \Big). \tag{3.5}$$

$\square$

Пусть $\Phi : E \longrightarrow F_K$. Тогда Φ *полунепрерывно сверху* в точке x_0 ($\Phi \in \overline{C}_K(x_0)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \ (\|x - x_0\| < \delta) \Longrightarrow (\Phi(x) \subset U_\varepsilon(\Phi(x_0))).$$

В случае $F = \mathbb{R}$ при $\Phi(x) = [\underline{\Phi}(x); \overline{\Phi}(x)]$ условие K-полунепрерывности сверху принимает следующий вид:

$$\underline{\Phi}(x_0) \le \underline{\lim}_{x \to x_0} \underline{\Phi}(x) \le \overline{\lim}_{x \to x_0} \overline{\Phi}(x) \le \overline{\Phi}(x_0).$$

Справедливо следующее условие неотрицательности квадратичных функционалов с коэффициентами из $\overline{C}^1_K$.

Теорема 13. *Для того чтобы K-квадратичный функционал*

$$\Psi(h) = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2)dx \quad (P(x) = [\underline{P}(x); \overline{P}(x)], \ Q(x) = [\underline{Q}; \overline{Q}], \ P, Q \in \overline{C}^2_K),$$

определенный на функциях $h \in C^1[a;b]$ таких, что $h(a) = h(b) = 0$, был неотрицательным, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\overline{P}(x) \ge 0 \quad (a \le x \le b). \tag{3.6}$$

Доказательство. Действительно, пусть (3.6) не выполнено, т.е. в некоторой точке x_0 пусть $\mathrm{P}(x_0) < 0$. Покажем, что в этом случае функционал $\Psi(h)$ примет при соответствующем выборе $h(x)$ отрицательное значение. Для этого подберем $h(x)$ так, чтобы основной вклад давался бы слагаемым Ph'^2, а член Qh^2 был бы мал. Положим

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{\sigma}\left(1 + \dfrac{x - x_0}{\sigma}\right) & \text{при } \ x_0 - \sigma \le x \le x_0, \\ \sqrt{\sigma}\left(1 - \dfrac{x - x_0}{\sigma}\right) & \text{при } \ x_0 \le x \le x_0 + \sigma, \\ \quad 0 \quad \text{при всех остальных } x. \end{cases}.$$

На интервале $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ имеем $h'^2(x) = \frac{1}{\sigma}, \ h^2 \le \sigma$. При таком выборе $h(x)$ получаем интегрирование по отрезку $[x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$:

$$\Psi(h) = \int\limits_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} Q(x)h^2 dx + \int\limits_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} P(x)h'^2 dx,$$

где $h'^2 = \frac{1}{\sigma}, \ h^2 \le \sigma$ на $[x_0 - \sigma; x_0 + \sigma]$, вне $[x_0 - \sigma; x_0 + \sigma]$ $h = h' = 0$. Отсюда

$$\Psi(h) = \int\limits_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} Q(x)h^2 dx + \int\limits_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} P(x)h'^2 dx,$$

где $\Psi_P(h) = \int\limits_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} [\underline{P}(x); \overline{P}(x)]h'^2 dx$, $\Psi_Q(h) = \int\limits_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} [\underline{Q}(x); \overline{Q}(x)]h^2 dx$.

а) Оценим сначала $|\Psi_Q(h)|$, применяя аналог теоремы Вейерштрасса:

$$|\Psi_Q(h)| \le \sigma \cdot 2\sigma \cdot \max(\sup_x |\underline{Q}|; \sup_x |\overline{Q}|) \longrightarrow 0 \quad \text{при } \sigma \to 0.$$

б) Теперь, используя определение K-полунепрерывности сверху, получаем:

$$\frac{1}{\sigma} \cdot 2\sigma \cdot \inf_{|x - x_0 \le \sigma|} \underline{P} \le \Phi_P(h) \le \frac{1}{\sigma} \cdot 2\sigma \cdot \sup_{|x - x_0 \le \sigma|} \overline{P}.$$

Здесь

$$\frac{1}{\sigma} \cdot 2\sigma \cdot \inf_{|x - x_0| \le \sigma} \underline{P} \longrightarrow 2 \varliminf_{x \to x_0} \underline{P}(x) \ge 2\underline{P}(x_0) \text{ и } \frac{1}{\sigma} \cdot 2\sigma \cdot \sup_{|x - x_0 \le \sigma|} \overline{P} \longrightarrow 2 \varlimsup_{x \to x_0} \overline{P}(x) \le 2\overline{P}(x_0)$$

Так как $P \in \overline{C}_K$, то $2\underline{P}(x_0) \le \Psi_P(h) \le \overline{P}(x_0)$. Из нашего предположения $\overline{P}(x_0) < 0$ мы получаем, что $\Psi_P(h) < 0$. А это противоречит условию минимума. Тем самым наше утверждение доказано. □

Последний результат позволяет обобщить классическое необходимое условие Лежандра экстремума вариационного функционала на случай дважды K-субдифференцируемого интегранта. Действительно, из теоремы (13) и необходимого условия минимума (теорема (10)) при $P = \partial_K^{z^2} f$, $Q = \partial_K^{y^2} f - \dfrac{d}{dx}(\partial_K^{yz} f)$ сразу вытекает следующая теорема.

Теорема 14. *Для того чтобы на экстремали $y = y_0(x)$ достигался минимум функционала $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx$, где f дважды K-субдифференцируем и $f \in \overline{C}_K$ необходимо, чтобы выполнялось неравенство*

$$\overline{\partial}^z (f'_z(x, y, y')) \geq 0.$$

3.1. Пример

Вернемся к классическому гармоническому осциллятору

$$\Phi(y) = \int_0^T (y'^2 - y^2)dx \qquad (y(\cdot) \in C^1[0;T],\ y(0) = y(T) = 0).$$

Как хорошо известно, Φ достигает минимума на нулевой экстремали при $T < \pi$.
Рассмотрим теперь «анизотропный гармонический осциллятор»:

$$\widetilde{\Phi}(y) = \int_0^T \overbrace{[\varphi(y') \cdot y'^2 - y^2]}^{f(y,y')} dx$$

где

$$\varphi(z) = \begin{cases} 2,\ z \geq 0; \\ 1,\ z \leq 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что $y(x) \equiv 0$ удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа для вариационного функционала $\widetilde{\Phi}(y)$. Очевидно, на нулевой экстремали Φ также достигает строгого минимума, поскольку $\widetilde{\Phi}(0) = 0$, и $(\varphi(y') \cdot y'^2 - y^2 \geq y'^2 - y^2) \Longrightarrow (\widetilde{\Phi}(y) \geq \Phi(y))$.

Интегрант функционала $\widetilde{\Phi}$ имеет вид

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 2z^2 - y^2,\ z \geq 0; \\ \ \ z^2 - y^2,\ z \leq 0. \end{cases}$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(y, z) = \begin{cases} 4z,\ z \geq 0; \\ 2z,\ z \leq 0. \end{cases}$$

Тогда $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(y, 0)$ не существует, $\overline{\partial}_z(\dfrac{\partial f}{\partial z})(y, 0) = 4 > 0$, в частности, $\overline{\partial}_z(\dfrac{\partial f}{\partial z})(0, 0) > 0$. Таким образом, классическое условие Лежандра для функционала $\widetilde{\Phi}$ на нулевой экстремали неприменимо, в то время как обобщенное условие Лежандра выполняется.

Автор выражает признательность профессору И. В. Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список цитируемых источников

1. *Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. — 1980, 35:6. С. 11–46.

2. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2009. — Т. 34. — С. 121–138.
3. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Предельная форма свойства Радона-Никодима справедлива в любом пространстве Фреше // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2010. — Т. 37. — С. 55–69.
4. *Орлов И. В., Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2013. —Т. 48. — С. 100-136.
5. *Стонякин Ф. С.* Аналог теоремы Данжуа-Юнг-Сакса о контингенции для отображений в пространства Фреше и одно его приложение в теории векторного интегрирования // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2010. — Т. 20. — С. 168-–176.
6. *Стонякин Ф. С.* К-свойство Радона-Никодима для пространств Фреше // Учёные записки ТНУ им. В. И. Вернадского. Серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика». –– 2009. — Т.22(61), №1. — С. 102–113.
7. *Стонякин Ф. С.* Сравнительный анализ понятия компактного субдифференциала // Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iменi В.Н.Каразiна. Серiя "Математика, прикладна математика i механiка". — 2009. — №850. — С. 11–21.
8. *Халилова З. И.* *К*-сублинейные многозначные операторы и их свойства // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия "Физико-математические науки". — 2011. — Т. 24 (63), №3. — С.110–122.
9. *Халилова З. И.* Применение компактных субдифференциалов в банаховых пространствах к вариационным функционалам // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия "Физико-математические науки". — 2012. — Т. 25 (64), №2. — С.140–160.
10. *Roth W.* A uniform boudedness theorem for locally convex cones // Proceedings of the american mathematical society. — 1998. —Vol. 126, №7. – P. 1973–1982.
11. *Ranjbari A., Saiflu H.* Some results on the uniform boundedness theorem in locally convex cones // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — T. 15, №4. — P. 361–368.
12. *Orlov I. V., Stonyakin F. S.* Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol. 15 (1). – P. 74–90.
13. *Иосида К.* Функциональный анализ. — Москва: Мир, 1967. — 624 с.
14. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — Москва: Мир, 1971. — 400 с.
15. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. — Москва: Наука, 1988. — 280 с.
16. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы: теория и приложения. — Новосибирск: Наука, 1992. — 270 с.
17. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. — Москва: Наука, 1972. — 466 с.
18. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — Москва: Мир, 1973. — 472 с.
19. *Fuchssteiner B., Lusky W.* Convex cones. — North Holland Math. Studies, vol.56, 1981. –438 p.

Получена 22.05.2013